El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO
DE
GEOMETRÍA ANALÍTICA
en la
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TOMO V. ✲ AÑO 1895

ZARAGOZA
Imprenta de C. ARIÑO, Coso, 100, bajos
1895

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

en la

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TOMO V. * AÑO 1895

ZARAGOZA

Imprenta de C. ARIÑO, Coso, 100, bajos

1895

ÍNDICE

ARTÍCULOS Y MEMORIAS

NOTAS MATEMÁTICAS

PEDAGOGÍA Y FILOSOFÍA MATEMÁTICAS

PÁGINAS

ARTÍCULOS Y ANUNCIOS BIBLIOGRÁFICOS

CUESTIONES RESUELTAS

Año V Zaragoza, Enero de 1895 Núm. 49

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

Una aplicación de la teoría de los determinantes á la resolución de ciertas especies de ecuaciones

POR MR. T. C. SIMMONS

1. En les tratados de Algebra se han expuesto métodos para la solución de las ecuaciones simultáneas por medio de los determinantes. Por ejemplo, las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ kx + ly + mz &= n \end{aligned}\right\}$$

tenemos para su solución

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ n & l & m \end{vmatrix} \text{—} \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

con análogas expresiones para y, z. Si las ecuaciones hubiesen sido

$$\left.\begin{aligned} ax^2y + by^3z^2 + cz^5x^3 &= d \\ ex^2y + fy^3z^2 + gz^5x^3 &= h \\ kx^2y + ly^3z^2 + mz^5n^3 &= n \end{aligned}\right\}$$

habríamos obtenido la misma expresión que arriba para x^2y, con análogas expresiones para y^3z^2 y z^5x^3, y determinado así x, y, z particularmente. Y se observará que las *mismas tres funciones* (por ejemplo, x^2y, y^3z^2, z^5x^3) de x, y, z se presentan en las tres ecuaciones, y que eliminamos dos de las tres funciones para determinar la tercera. Y, generalmente hablando, en el caso de n ecuaciones entre n incógnitas, eliminamos $n-1$ funciones de las cantidades, para determinar el valor de la n^{sima} función.

2. Procedamos á obtener los determinantes que pueden emplearse en casos enteramente diferentes, en los que se hallan más de n funciones de las cantidades desconocidas en las n ecuaciones dadas. Eliminaremos, no $n - 1$ funciones, sino n de una vez.

Y procediendo así, podremos resolver ecuaciones que ofrezcan dificultades naturales que ha sido imposible resolver hasta ahora por el método ordinario. Con el objeto de simplificar nos limitaremos en este escrito al caso de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas x, y, z.

3. Sean las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} yz\,(lx + my + nz) &= a \\ zx\,(l'x + m'y + n'z) &= b \\ xy\,(l''x + m''y + n''z) &= c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Escribamos, pues, así:

$$\begin{aligned} &\left(l - \frac{a}{xyz}\right)x &&+ my &&+ nz &&= 0 \\ &l'x &&+ \left(m' - \frac{b}{xyz}\right)y &&+ n'z &&= 0 \\ &l''x &&+ m''y &&+ \left(n'' - \frac{c}{xyz}\right)z &&= 0 \end{aligned}$$

Entonces, eliminando x, y, z, y reteniendo el producto xyz, tenemos

$$\begin{vmatrix} l - \dfrac{a}{xyz} & m & n \\ l' & m' - \dfrac{b}{xyz} & n' \\ l'' & m'' & n'' - \dfrac{c}{xyz} \end{vmatrix} = 0$$

y obtenemos de esto una ecuación cúbica de la forma

$$\mathrm{A}\,(xyz)^3 + \mathrm{B}\,(xyz)^2 + \mathrm{C}\,xyz + \mathrm{D} = 0$$

Y si r es una raíz de esta ecuación, entonces de (I) podemos obtener las razones de x, y, z bajo la forma $x = \alpha z$, $z = \beta z$: de donde $\alpha\beta z^3 = r$, determinando z, y por consiguiente x é y.

4. Tomemos el siguiente como un ejemplo numérico

$$\left.\begin{aligned} yz\,(-x + 2y + 3z) &= 1 \\ zx\,(-301x - 4y + z) &= 1 \\ xy\,(\ 214x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

El determinante se reduce á

$$\begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{xyz} & -2 & -3 \\ 301 & 4+\dfrac{1}{xyz} & -1 \\ -204 & -2 & 2+\dfrac{1}{xyz} \end{vmatrix} = 0$$

Haciendo $xyz = X$, resulta

$$20\,x^3 - 28\,x^2 + 7\,x \quad + 1 = 0$$

ó

$$(10\,x+1)\,(2x-1)\,(x-1) = 0$$

esto es,

$$xyz = 1\,, \quad ó \quad \frac{1}{2}\,, \quad ó \quad -\frac{1}{10}$$

En el primer caso (II) se reduce á

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y - 3z &= 0 \\ 301x + 5y - \ z &= 0 \\ 214x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

uniendo

$$x = -\frac{y}{53} = \frac{z}{36} = -\frac{1}{\sqrt[3]{1908}}$$

ó $\qquad - x = .080626\,,\ + y = 4{\cdot}273178\,.\ - z = 2{\cdot}902536$

En el segundo caso, si $xyz = \dfrac{1}{2}$, tenemos

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 0 \\ 301x + 6y - \ z &= 0 \\ 214x + 2y - 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

uniendo

$$y = -45x\,, \qquad z = 31\,x\,, \qquad x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2790}}$$

ó $\qquad - x = {\cdot}071034 + y = 3.19653,\ - z = 2.202054$

En el tercer caso, si $xyz = -\dfrac{1}{10}$, tenemos

$$\left.\begin{aligned} 9x + 2y + 3z &= 0 \\ 301x - 6y - \ z &= 0 \\ 214x + 2y + 8z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

uniendo $y = 57x$, $z = -41x$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2337}}$

ó $+x = 075355$, $+y = 4.295235$, $-z = 3.089555$

5. El método se aplica evidentemente á ecuaciones del tipo

$$\left.\begin{aligned} ax^n + by^n + cz^n &= kx^{n+m}y^m z^m \\ a'x^n + b'y^n + c'z^n &= k'y^{n+m}z^m x^m \\ a''x^n + b''y^n + c''z^n &= k''z^{n+m}x^m y^m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

en las que eliminamos x^n, y^n, z^n particularmente, hallando el valor de xyz del que se obtienen x, y, z.

Como ejemplos particulares pueden considerarse

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= kx^2yz \\ a'x + b'y + c'z &= k'xy^2z \\ a''x + b''y + c''z &= k''xyz^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} &= kyz \\ \frac{a'}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{c'}{z} &= k'zx \\ \frac{a''}{x} + \frac{b''}{y} + \frac{c''}{z} &= k''xy \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= kxyz \\ a'x + b'y + c'z &= 'ky^2z \\ a''x + b''y + c''z &= k''yz^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} &= ky^2z \\ \frac{a'}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{c'}{z} &= k'xyz \\ \frac{a''}{x} + \frac{b''}{y} + \frac{c''}{z} &= k''xy^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

De las dos últimas hallamos por el determinante, no xyz sino yz y xy^2z respectivamente.

(Se continuará).

LA SISTEMATIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

I — PRELIMINARES

1. Es incuestionable que los elementos de Euclídes constituyen la obra maestra de la ciencia geométrica en la esfera de los principios fundamentales, y que apesar de haberse publicado muchas excelentes obras, ninguna de ellas ha excedido á la que escribió el geómetra griego, por el rigor en el encadenamiento de la idea y de los razonamientos, por la unidad que un espíritu filosófico descubre á travès de una aparente falta de regularidad y simetría, que tan sólo afecta á la forma sin llegar al fondo el el cual se mantiene compacto y unido.

El germen de esta unidad que rige la obra de Euclídes se halla condensado en el valor lógico de la proposición considerada en sus estados de afirmación, negación y reciprocidad, y por esto en los elementos, el método *ad absurdum* es el núcleo ó lazo de unión de las verdades.

El triángulo equilátero es una figura auxiliar muy importante que facilita los medios, desde el principio, de llegar á las construcciones que dan realidad á las entidades geométricas mediante la resolución de problemas mezclados entre las proposiciones de caracter especulativo ó teoremas.

Se nota en el desarrollo de la obra, desde su comienzo, cierto alarde en evitar el auxilio de axiomas innecesarios, hasta el punto de haber llegado á la proposición XXIX sin emplear el axioma XI, y aún proposiciones tales, como las concernientes á la suma de los ángulos adyacentes y á la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice con que generalmente comienzan los tratados modernos, donde otro plan de exposición ha sustituido al eminentemente *dialéctico* del geómetra griego, en la obra de éste son objeto de las proposiciones XIII, XIV y XV.

El triángulo equilátero con el empleo de la circunferencia permiten á Euclides unir sólidamente las proposiciones, y le evitan en absoluto el apelar al movimiento, estableciendo un sistema rigorosamente *estático*, y además la ley lógica de la equivalencia ó incompatibilidad de las proposiciones le conducen á su demostración, como ya hemos indicado, mediante el método *ad absurdum*.

No insistiremos en estas consideraciones preliminares que nos conducen á examinar, si aprovechando el fondo filosófico en que se apoya la Geometría de Euclides es asequible el hallar cierta simetría, unidad y sistematización de las ideas en una exposición de la Geometría elemental; pero antes de proceder á esta sistematización vamos á señalar los puntos capitales en que puede basarse.

2. Estos puntos de base consisten en la *equivalencia* de las entidades geométricas que se sustituyen dentro de una figura dada, y en las *figuras adjuntas* de una figura. El problema constituído por esta sistematización se reduce pues: 1.º A establecer las equivalencias de las entidades geométricas. 2.º A determinar las figuras adjuntas ó virtualmente contenidas en una figura dada. Procedamos pues á estos desarrollos.

3. Un plano está determinado por tres puntos, y en virtud de contener todas las rectas que pasan por dos de sus puntos se pueden reproducir todos los puntos de aquél por el movimiento de una de sus rectas. Si en vez de esta generación general, partimos de una figura como base, que en primer término conviene sea el triángulo ó el trilátero determinado por tres puntos ó tres rectas fundamentales, veremos que la deformación de este triángulo permitirá la generación del plano.

Pero la variación del triángulo fundamental por la que se transforma en otro, puede someterse á ciertas condiciones que producen en vez de todo el plano, determinadas figuras ó lugares (por ejemplo, si sobre una base común se construyen los triángulos de igual ángulo opuesto, se engendrarán arcos de circunferencia). Y la correspondencia unívoca de los elementos variables de la figura en un semi-plano (pues por la ley de simetría se reproducirán las figuras igualmente á uno y otro lado de cierta recta) á la que quita toda excepción la admisión del postulado, permitirá los cambios de un triángulo (figura fundamental) en otro, ó de unos elementos de aquél en sus correspondientes; y estas variaciones tienen su representación mediante razones en el dominio elemental, ó mediante dobles razones en un dominio ulterior, y bajo forma especial en las relaciones trigonométricas que son instrumentos ó modos de expresión respecto á ciertas unidades de medidas fijas en función de las que las entidades geométricas reciben una determinación. A la rigidez y al aislamiento característicos del modo de determinación en los elementos de Euclides para la que basta el método *ad absurdum*, precisa el sustituir la variación ó deformación y el movimiento cuando se trata de ligar los elementos aislados en un sistema.

No vamos á ocuparnos ahora de la sistematización realizada mediante los conceptos de homografía, dualidad, inversión, etc, que no constituyen actualmente nuestro objeto, sino de otras relaciones entre las figuras que no guardan entre sí la uniformidad anexa á estos modos de transformación, pero mediante la cual las figuras consideradas hasta ahora, separadas en los tratados elementales pueden presentarse en su estudio con cierta solidaridad y según expondremos más adelante.

Pero como preliminar al estudio de las sustituciones equivalentes debemos indicar algo acerca de las figuras adjuntas de una figura.

Así, un triángulo, que está determinado por tres puntos, lleva siempre adjunta una circunferencia determinada por los mismos, y ésta á su vez implica un punto equidistante de aquellos tres que es su centro; y si desde luego pretendemos sistematizar, al hacer variar uno de los tres puntos, con el sistema de triángulos de base común coexistirá un sistema de circunferencias que tendrán una cuerda común; y cada circunferencia separará del sistema total sistemas de puntos unidos por propiedades comunes, la de equidistar de su centro (distinto de todos los demás distribuidos en toda la extensión del plano), la de formar ángulos constantes, etc.

Y si nos detenemos en la consideración del triángulo, antes de seguir adelante, veremos que no consta solamente de los tres vértices y lados, sino que lleva consigo inherentes otros sistemas de lineas y de puntos, tales como los que constituyen las tres bisectrices, medianas, alturas, y, atendiendo al nuevo desenvolvimiento de la Geometría elemental que data del año 1873(*), el de las tres simedianas, los puntos de Brocard, etc.

Y además de las circunferencias inscriptas, circunscriptas y ex-inscriptas, peculiares de cada sistema de tres puntos, otras figuras adjuntas hay que considerar, tales como los círculos de Lemoine, Brocard, Taylor y Tucker, y otros varios puntos y líneas que se estudian en la Geometría reciente, y aun sobre estos sistemas de figuras especiales fundados en la consideración de la igualdad, el paralelismo, perpendicularidad etc., nos elevaremos á relaciones generales, entonces las expresiones analíticas permitirian extender los sistemas de una manera indefinida, llevándonos del dominio de los elementos y de la intuicción que predomina en la Geometría pura, á lo general, sometido á los símbolos y fórmulas en los que el número ó las relaciones métricas se sobreponen á la figura y relaciones descriptivas. Y de estas

(*) Por una inadvertencia, en *Teoremas, Problemas y Métodos geométricos*, t. II, pág. 193, se atribuye á la primera memoria de M. Lemoine la fecha de 1874.

generalizaciones se nos ofrecen como ejemplos notables las contenidas en la *Geometría de posición* de Carnot, en la teoría de las *Cónicas Suplementarias* de Poncelet, y recientemente el *método de transformación continua* de M. Lemoine, etc.

Para completar estas nociones preliminares de nuestro trabajo, observaremos que la consideración de los sistemas adjuntos establece un enlace entre los dos desenvolvimientos opuestos pero complementarios de la Ciencia, el análisis y la síntesis, ó la teoría y la técnia,

En efecto, cada figura y su sistema adjunto, implica un sistema de relaciones recíprocas de tal manera, que deben distribuirse en todas las combinaciones posibles en forma que, parte de ellas constituyan las hipótesis y las restantes, las tesis de sistemas de teoremas recíprocos, expresiones de los modos de coexistencia de los objetos geométricos. Esta diversidad, en la distribución de los elementos de cada figura con su sistema adjunto considerado en la parte ó extensión que convenga en cada caso particular, implica multitud de problemas cuya resolución depende tan sólo del modo de verificar las sustituciones de unos elementos por otros equivalentes, sustituciones en las que se enlazan los elementos dados con los buscados mediante los términos medios que son elementos de tal ó cual parte del sistema adjunto, y solo en la acertada elección de estos elementos estriba la facilidad y la elegancia, con que cada geómetra pueda llegar á la resolución de los problemas ó realice esta *inversión* de la síntesis, es decir, el análisis.

II.—Exposición sistemática de las nociones de geometría.

4 Comenzando nuestros desarrollos, creemos necesario establecer desde luego los conceptos de *linea recta* y de *plano* en los que se ha de basar la exposición sistemática de los principios geométricos.

5 *Línea recta* es un sistema de puntos inseparablemente unidos y tales, que de cualquier manera que se mueva *teniendo siempre dos puntos fijos* en el espacio, el sistema ocupará siempre el mismo lugar en éste (lo que reduce el movimiento del sistema á un simple resbalamiento en el cual cada punto quedará reemplazado por otro, sin repetición y con perfecta reciprocidad ó de una manera unívoca).

Z. G. de Galdeano.

(Se continuará).

BIBLIOGRAFÍA

CALCOLO INFINITISIMALE dettate da ERNESTO PASCAL.—El sólo nombre del distinguido profesor Sr. Pascal, ilustrado colaborador de *Mathematische Annalen, Annali di Matematica* y otros periódicos no tables, conocido especialmente por sus numerosos escritos sobre el Análisis superior, es suficiente garantía para recomendar una obra de *Cálculo infinitesimal,* y el lector lo reconoce inmediatamente que recorre las páginas de los dos elegantes tomos de que consta dicha obra en la que se distingue la elevación del concepto y la sencillez con que están formuladas y desenvueltas las cuestiones capitales en que se resume esta rama superior de la Ciencia Matemática.

Comienza la obra, al tratar de las *funciones de variables reales*, con la definición del *campo de variabilidad* de la variable, de *límite de los valores de la variable, punto límite, grupo infinito de puntos, grupos derivados* de un grupo dado.

Demostrado el teorema de Weierstrass acerca de los límites superior é inferior, hace delicadas y sutiles observaciones respecto á los límites considerados á la derecha é izquierda ó á ambos lados del punto a, del caso del límite infinito, del modo contínuo ó discontínuo, *saltuariamente* de aproximarse la variable indepeudiente al punto a de la distinción entre los casos de admitir el grupo de puntos un máximo ó un límite superior, estableciendo enseguida las condiciones para la existencia de un límite. Trata á continuación de las *funciones invertibles con el signo de límite,* concluyendo que *en las funciones continuas son invertibles los dos signos de función y de límite.*

Al examinar la continuidad de una función en el caso de contar de un número infinito de términos, ó sea las *séries y productos infinitos*, define la *serie convergente en igual grado,* y estudia las condiciones necesaria y suficiente, los casos de ser la serie *absoluta* ó *simplemente convergente*, y después las funciones *uniformemente contínuas.* Demuestra el teorema de Cantor acerca de que *la continuidad uniforme es lo mismo que la continuidad ordinaria*, la posibilidad de hacerse la división en un número finito de intérvalos parciales de modo que en cada uno la oscilación de la función sea menor que σ, examina una función continua en los puntos racionales é irracionales de un segmento, extendiendo estas consideraciones á las funciones de varias variables, y en diez páginas resume con gran sencillez y claridad los principios relativos á los infinitos é infinitésimos de diversos órdenes, concluyendo el cápítulo I con el cálculo de algunos límites particulares.

El capítulo II trata de la *derivada de una función.* Examina las condiciones de existencia de la derivada finita y determinada en un punto, á saber: que la función sea continua y finita, que no debe ser infinita en infinitos puntos de un intervalo cualquiera en las inmediaciones del punto x, ó que debe existir un *entorno* del punto en que la función no sea jamás infinita, que la clase de las funciones derivables es más restringida que la de las contínuas, que el signo de derivación es invertible con el de suma. Demuestra el teorema del *valor medio* y á continuación del cálculo de las derivadas de las funciones explícitas más simples, trata de las funciones que tienen derivada en un intervalo, del teorema de Rolle, y del valor medio y sus corolarios.

Las diferenciales, derivadas y diferenciales de órden superior, derivadas parciales y diferenciales de las funciones de diversas variables, el teorema de la inversión de las derivaciones, el del valor medio en el caso de las funciones compuestas, el cálculo de las derivadas de funciones implícitas, etc., y el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas están tratados con la superioridad de criterio dignas de un tan consumado maestro en estas materias como es el Sr. Pascal; y para no repetir esta indicación aplicada á toda la obra, diremos que el capítulo III trata del *desarrollo* en série de las funciones, terminando con las aplicaciones de la fórmula de Taylor-Maclaurín. El estudio de una función en la proximidad de un punto, algunas aplicaciones analíticas y geométricas con principios de geometría diferencial son los objetos de los capítulos IV, V y VI.

Ventajoso en extremo para la claridad y unificación de los conceptos fundamentales es el plan seguido en la exposición del cálculo integral, objeto del tomo II, observándose siempre que el autor se fija en las dificultades capitales, en los puntos oscuros que son pasados por alto en algunos otros tratados, especialmente los escritos durante los dos primeros tercios de este siglo, y que en las obras recientes se aquilatan más y más gracias á los considerables adelantos del análisis.

Anteponiendo el estudio de los conceptos al de su realización ó al punto de vista práctico, prescinde de la integrabilidad de las funciones que trata en el capítulo II, para comenzar su exposición demostrando que si existe el límite superior ó inferior de la suma

$$\sum_1^n f_r \delta_r$$

extendida á todos los intervalos parciales entre a y b, cuando cada uno de estos disminuye indefinidamente mientras su número n tiende al infinito y es independiente del modo según decrecen las amplitudes de los intervalos y de la elección de los valores f_r, entonces este límite es la *integral definida* de $f(x)$ entre a y b.

A la definición de la integral definida sigue la exposición de las propiedades elementales, fórmula del valor medio, su consideración como función de los límites, su *continuidad* y *derivabilidad*, su estudio en dos casos singulares, á saber, cuando la función no es siempre finita ó cuando los límites no son finitos y demuestra que, *si una función integrable se hace infinita en un punto* b *y su valor absoluto se conserva siempre inferior ó igual al de una función del tipo*

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^{\nu}}$$

en que $\nu < 1$, *y en el que el órden del infinito es menor que* 1, *entonces la integral definida de* a *á* b *es una cantidad finita*, y otros teoremas análogos, pasando enseguida á la integral indefinida en la que los límites pueden considerarse como movibles ó dependientes de la variabilidad de la constante arbitraria.

Derivacion resp.cto á un parámetro: Permutabilidad de los signos de límites y de integración y de los signos de derivación é integración, y en fin, de los signos de integración en las integrales dobles, son las cuestiones tratadas en el capítulo I.

El capítulo II trata de la *integrabilidad de las funciones*, principiando por el problema de si la suma $\Sigma f_r \delta_r$ tiene su límite determinado y finito y enseguida reduce á una forma más práctica el criterio obtenido para la integrabilidad que *la suma de los intervalos parciales en los cuales la oscilación de la función puede hacerse mayor que cierta cantidad cualquiera asignada debe tender á cero.*

Termina el capítulo II con: Funciones integrables y no integrables, Aplicaciones de los criterios demostrados.—Teoremas sobre las funciones integrables.—Integración por série.

El capítulo III. *Cálculo de las integrables definidas é indefinidas* comprende: Integrales indefinidas fundamentales.—Artificios de integración.—Integración por partes.—Ídem por série.—Integración de las funciones racionales, irracionales, binomias, elípticas, transcendentes y cálculo de las integrales definidas eulerianas.

Capítulo IV. *Las integrales múltiples* comprende: Definición, condición de integrabilidad integral múltiple como función de los límites, su definición en casos singulares.—Transformación de las integrales múltiples.—Teorema de Green.

Capítulo V. *Integración de las diferenciales totales.* Capítulo VI. *Geometría integral.* Capítulo VII. *Ecuaciones diferenciales.* Enunciado el problema en estos términos: Conocida una relación entre $x, y, y'... yx$ y desconociéndose los valores explícitos de la función y de x, y de sus n de derivadas, se podrá hallar dicha función? El autor expone la doctrina referente al mismo con el carácter elevado predominante en todo el desarrollo de la obra y dando preferente importancia á los conceptos fundamentales en cuyo conocimiento estriba el dominio de esta parte tan difícil de la ciencia matemática.

Z. G. de Galdeano.

NICOLÁS JOANOVICH LOBACHEWSKY

Extracto del discurso del Sr. Vassilief

con motivo de celebrarse las fiestas que ya anunciamos

(t. III pág. 137.)

Para conmemorar el centenario de Lobachewsky, el profesor de la Universidad de Kasan Sr. Vassilief leyó un interesante discurso traducido por el profesor Mr. G. Bruce Halsted entusiasta del Copérnico de la Geometría, como le llamó el malogrado Clifford, segun revelan sus numerosos escritos acerca de la geometría no-euclidea.

En la imposibilidad de trasncribirlo íntegro, vamos á reproducir algunos de las párrafos en los que se pone de relieve la transcendental extensión que ha alcanzado la Geometría por efecto de los nuevos conceptos que se deben al célebre innovador de esta ciencia, hasta hace un siglo en la dirección que le imprimió la escuela de Alejandría y consignada en la obra de Euclides.

La primera parte del discurso está destinada principalmente á la historia de la Universidad de Kasan; en ella se expone la labor meritísima del profesor Johann Martin Christian Bartels, maestro y profesor, no sólo de Lobachewsky sino del eminente Gauss. En esta reseña histórica se consigna el apoyo que tuvo en tan sabio profesor cuyos relevantes méritos expone, los sufrimientos que arrostró por la malevolencia del curador de la Universidad Magnetsky enemigo de la ciencia, que felizmente destituido, dejó libre el camino de los honores y de la gloria á Lobachewsky nombrado rector á los 33 años y considerado desde entonces como el primero entre los profesores.

Esplica el Sr. Vassilief la intervención de Gauss en los estudios acerca del postulado, cómo fueron objeto de sus investigaciones los fundamentos del nuevo sistema geométrico y la influencia que tuvo en las investigaciones que también realizó Johann Bolyai expuestas en la obra. La ciencia absoluta del espacio que es otra exposición de geometría no-euclidea, dá á conocer las universales aptitudes de Lobachewsky, ya al hacer variados descubrimientos en las matemáticas, ya al desempeñar casi todas las clases de la Universidad, ya al compartir este trabajo con otros experimentales: la química, la botánica, la anatomía; ya al consagrarse á las faenas agrícolas, en forma que su infatigable actividad hallaba siempre tiempo para todo.

Después de ocuparse de las investigaciones de Legendre, y observar que casi simultáneamente con Lobachewsky, Johann Bolyai llegó á la geometría no-euclidea, se ocupa de las investigaciones de los filósofos acerca de los axiomas geométricos, observa que la época en la cual Lobatchewsky, con el entusiasmo de su juventud y deseo de gloria, comienza su trabajo intelectual independiente, es una época muy significativa en la historia del pensamiento humano, y rica en beneficios espirituales, en esperanzas ideales en que se plantea para cada ciencia el problema de la teoría del conocimiento ¿En qué consiste la verdad? ¿En qué sentido nuestros conceptos de las cosas corresponden á las realidades?, recuerda que Helmholtz escribió su memoria «Ueber die Thatsachen in der Wahrnehmung» que Kant después de haber escrito bajo la influencia de Newton su Historia general natural de los cielos, en que como Newton reconoce el espacio como existente objetivamente, llega á su doctrina del espacio *a priori*» como forma subjetiva de nuestra intuición, considerando que los axiomas de la geometría se nos presentan como necesariamente ciertos» no pudiéndonos imaginar un espacio que no posea las propiedades expresadas por estos axiomas, lo que prueba á su modo de ver que son anteriores á la experiencia.

Gauss, contrario á la opinión de Kant, expresa su profunda convicción de que la ciencia del espacio difiere de la ciencia de la cantidad, que el número es *puramente* un producto de nuestra mente, y que el espacio tiene una *realidad exterior* á nuestro espíritu del cual no podemos preordinar leyes *á priori*.

Después de citar al profesor Temofey Osipovsky de la Universidad de Charcov que en su obra sobre el espacio y el tiempo sostiene cómo el concepto de espacio surge de las impresiones del mismo, que son impresiones de nuestros sentidos externos sobre el sentido íntimo, pasa al modo de ver de Lobachewsky, que reconoce el postulado de Euclides como una ley física, un dato de la experiencia, buscando en las observaciones astronómicas la respuesta á la cuestión, que dice en la primera página de sus «Nuevos elementos de geometría»: las ideas de geometría no deben contener esta ley que puede probarse por la experiencia, como otras leyes físicas, idea contradictoria con la opinión de que nuestro conocimiento del espacio es un conocimiento absoluto.

«Hasta Lobachewsky, al menos en geometría, podíamos tener conocimiento absoluto del espacio, que tuviera las mismas cualidades aquí como á grandes distancias, hoy como ayer y mañana.

»Desde Lobachewsky, el geómetra contemporáneo, á quien parece lógicamente posible la forma del espacio dada por Euclides, la forma del espacio estudiado por Lobachewsky y la conocida con el nombre de Riemann, no afirmará que conoce las cualidades del espacio á enormes distancias de nosotros, ni que conoce las distancias que el espacio tiene y puede tener.

»Como después del descubrimiento de Copérnico, así el horizonte intelectual de la humanidad se ha dilatado después de Lobachewsky.

»El pueblo que creyó tener absoluto conocimiento del Cosmos, en el centro del que se hallaba la tierra rodeada por esferas concéntricas cristalinas, después de Copérnico pronto se encontró viviendo en un insignificante grano de arena en el ilimitado Océano de los mundos. ¿Tiene este Océano límite y en qué consiste? Esta fué la cuestión suscitada por Copérnico.

»Las investigaciones de Lobachewsky dirigieron á la filosofía de la naturaleza otra cuestión no menos importante, la cuestión de las cualidades del espacio.

»Son estas cualidades las mismas aquí y en aquellos mundos distintos desde los cuales la luz nos llega en cientos de miles y millones de años?

»Son aquellas cualidades las mismas hoy y cuando el sistema solar se formó de una nebulosa? Y será cuando el mundo se aproxime á esta condición de energía por doquiera esparcida según la que los físicos miran el futuro del universo?

»En esto es en lo que consiste el paralelo entre Copérnico y Lobachewsky, señalado primero por Clifford en su *Philosophy of the Pure Sciences* y sancionado hoy por la autoridad de numerosos y eminentes sabios.

»El nombre de Copérnico de la geometría, tan halagüeño para la raza eslava, fué dado á Lobachewsky por el gran matemático inglés Sylvester.

»Afirmando la relatividad de nuestro conocimiento del espacio, Lobachewsky nos mostró el camino de extender nuestro conocimiento del mismo. Este camino es la experiencia.

»En este concepto Lobachewsky aparece como el continuador de la obra de los grandes científicos y filósofos. Bacon, Descartes, Galileo, Newton que abandonando una reflexión *á priori*, principiaron á interrogar á la naturaleza, conociendo lo que ella puede, como dice Lobachewsky, responder á las cuestiones segura y satisfactoriamente.

«Las investigaciones de Lobatchewsky ilustran la idea de la geometría dada por Newton en el prefacio de sus *Principia*, como parte de la mecánica: *Fundatur igitur geometría in praxi Mechanica et nihil aliud est quam Machanicæ universalis pars illa quæ arten mensurali proponit ac demonstrat.*

»Tocante á la filosofía de la Naturaleza, Lobachewsky expresó frecuentemente sus profundas miras.

»En la Naturaleza, dice, reconocemos unicamente el movimiento. Sin éste, las impresiones sensitivas no son posibles. Todas las demás ideas, por ejemplo, las geométricas se forman por nuestra razon artificialmente, derivándose de las cualidades del movimiento, y por esta razon el espacio, en sí, separadamente, no debe existir para nosotros (Nuevos elementos de geometría, colección completa de las obras de Lobachewsky vol. I, P. 227).

»Los primeros datos son sin duda aquellas ideas que adquirimos en la naturaleza, por nuestras percepciones. La razon puede reducirlas al menor número para hacer de ellas el fundamento de la ciencia.

»Su predilección por la experiencia se expresa también en su notable discurso «Sobre el principal objeto de la educación».

»Los descubrimientos matemáticos sirven directamente para la adquisición de conocimientos. Pero no hemos hecho gran uso de estos medios, que nos fueron señalados por el celebrado Bacon. Evitar trabajos inútiles, arrojar todo el reino de nuestra razón. Preguntar á laNaturaleza. Ella contiene toda la verdad y contestará á nuestras preguntas segura y satisfactoriamente. Finalmente, el genio de Descartes trajo este afortunado cambio, y gracias á su talento vimos desaparecer las sombras del antiguo escolasticismo de las Universidades.»

Es evidente que la idea de Lobachewsky de prescindir de uno de los postulados de Euclides que Kant consideró como verdad necesaria, y demostrar la posibilidad de edificar una geometría sin este postulado, y la inutilidad de los esfuerzos encaminados á demostrarlo, no fué la aspiración de un espíritu caprichoso por ser original.....

Después de exponer el Sr. Vassilief algunas noticias acerca de la oposición que encontraron las doctrinas de Lobatchewsky en Magnetsky y el académico Fus, hasta el momento de ser elevado aquél al rectorado, expone el Sr. Vassilief los puntos de vista de Lobachewsky acerca de la educación, la solución de la ecuación $x^n - 1 = 0$, relacionada con la conclusión de Gauss acerca de que existe un número ilimitado de polígonos regulares inscriptibles con auxilio de la regla y el compás, habiendo también llegado Lobachewsky á la redución del grado de la ecuación binomia en el caso de que el exponente disminuido en una unidad es divisible por 8, añadiendo un importante suplemento á la teoría de Gauss.

En fin, su modo de tratar en Algebra donde introduce las funciones trigonométricas según su definición analítica, sus importantes descubrimientos sobre la relación entre la continuidad y la diferenciabilidad, señalando la distinción entre la graduabilidad y la continuidad, sus trabajos astronómicos y acerca de la teoría de las vibraciones, su apoyo é influencia para establecer la publicación de Memorias científicas en la Universidad, su influencia en el perfeccionamiento de procedimientos agrícolas; todo esto aparece en el discurso del señor Vassilief, como digna corona del genio universal cuyo centenario solemnizó el año pasado la Universidad de Kasan, que terminó expresando el desarrollo que han tenido las ideas de Lobachewsky en Europa y América, explanadas en los trabajos de Hoüel, seguidas de los trabajos de Riemann y Helmholtz, amplificados con las investigaciones de Beltrami en Italia, resultados cuya combinación conduce á la conclusión de que el espacio matemático homogéneo (que admite el movimiento de un cuerpo sólido rígido) de tres dimensiones puede ser de tres especies, denominadas de Lobachewsky, de Euclides y Riemann cuya teoría analítica los distingue por el signo de la curvatura, siendo ésta en el euclídeo igual á cero.

«El estudio de las cualidades del espacio en forma general constituye la geometría no-euclidea. Por este estudio se hace esperar la representación de estos espacios como contenida en el de cuatro dimensiones, y que la geometría del hiperespacio sea considerada como la continuación de la geometría no-euclídea.

(Se concluirá.)

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 183

(Véase tomo IV, página 158).

Un segmento de recta variable se mueve entre dos ejes de manera que su proyección ortogonal sobre uno de los dos eje; permanece constante:

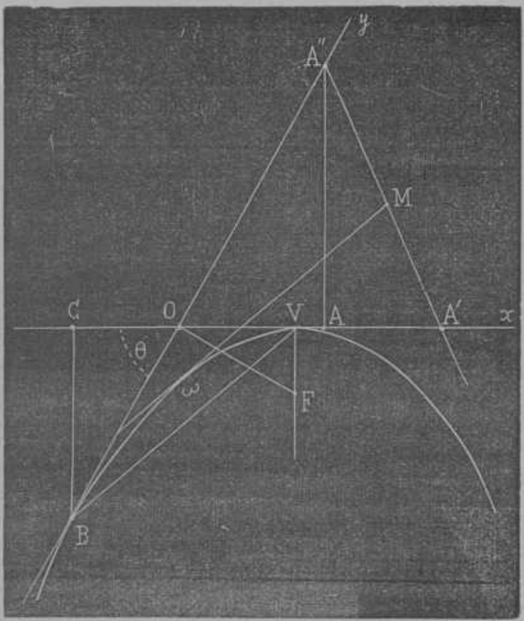
1.º *Cual es el lugar del punto medio de este segmento de recta?*

2.º *Cual es la envolvente de este segmento de recta?*

(M. d'Ocagne.)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Los dos extremos A y A″ del segmento proyección constante describen sobre el eje Ox dos punteadas iguales; los dos puntos A y A″ describen sobre Ox y Oy respectivamente dos punteadas semejantes; luego A y A″ engendran dos punteadas proyectivas; los puntos en el infinito de Ox, Oy son evidentemente un par de puntos correspondientes, por lo cual la envolvente del segmento variable A'A″ es una parábola tangente á los dos ejes.



Tomemos sobre el eje Ox, CO=OV= á la longitud constante de la proyección, y desde C tracemos la perpendicular á Ox que corta á Oy en B: la parábola toca á Ox en V y á Oy en el punto B. El punto en el infinito de la parábola está sobre las perpendiculares á Ox, Oy trazadas respectivamente desde V y O córtanse en el foco F de la curva. El parámetro principal de la parábola es por consiguiente $4\mathrm{VF} = 4p \operatorname{tg} \theta$, siendo p la longitud constante de la proyección y θ el ángulo formado por los dos ejes.

Para determinar el lugar del punto medio del segmento A'A″, se observa que, trazado el diámetro Oω y la tangente en ω, los dos puntos B y V de la curva están separados armónicamente mediante ω y el punto en el infinito: la tangente A'A″ se halla, pues, cortada por las tres tangentes BO, ωM, OV y por la recta en el infinito en cuatro puntos armónicos, y por esto M es el punto medio del segmento A'A''. El lugar del punto M es, pues, la tangente en ω, ó sea la recta que une los dos segmentos OV, OB.

CUESTIÓN 188

(Véase tomo IV, página 159).

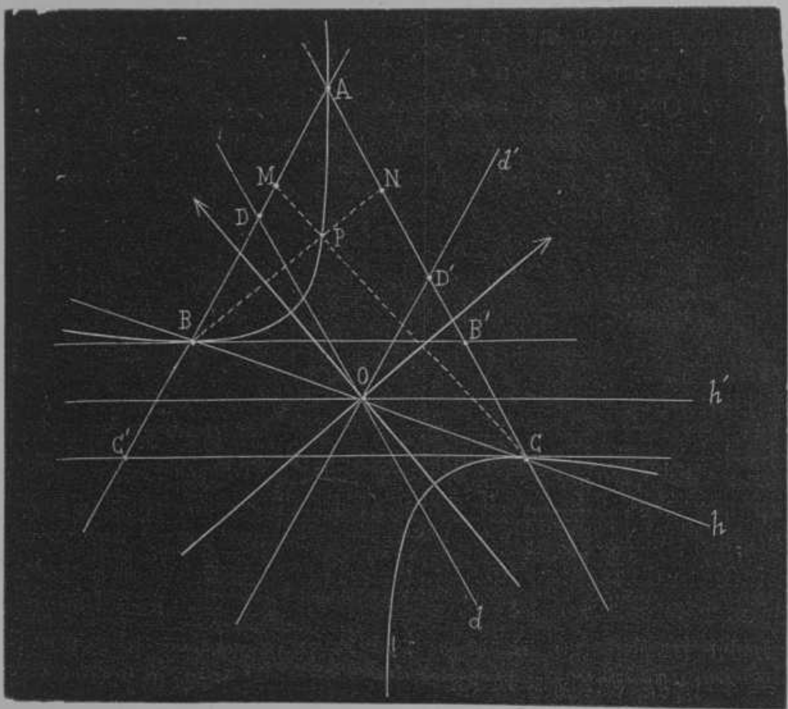
Sobre los lados AB, AC *de un triángulo* ABC *se toman* AM = AN = λ. *Las rectas* BN *y* CM *se cortan en* P.

Demostrar que el lugar de P *es una hipérbola; hallar el centro, las asíntotas y los ejes de esta curva.*

(J. Neuberg)

Solución por el SR. RETALI (V.)

Las dos punteadas (M) y (N) son iguales, A es un punto correspondiente común, y dos puntos en el infinito de AB, AC son corres-



pondientes. Los dos haces de rayos B(N) y C(M) engendran, pues, con las intersecciones de los pares de rayos homólogos, una cónica circunscripta al triángulo ABC, cuyo centro es el punto medio O del lado BC.

Tomemos sobre AC, AB′ = AB y sobre AB, AC′ = AC. Las tangentes á la cónica en B y C son respectivamente BB′ y CC′; la recta BC $\equiv h$ y la paralela h' trazada por O á la BB′ son un par de diámetros conjugados; otro par de diámetros conjugados está dado por las dos rectas d y d' conducidas por O paralelamente á los lados AC y AB; de esto se sigue que los rayos dobles de la involución $(h, h'; d, d')$ son las asíntotas y el par ortogonal de la misma involución da los ejes de la cónica. Los dos pares h, h' y d, d' evidentemente no están separados y por esto la cónica es hipérbola.

Observaciones.—Si AB = AC, el lugar de P se reduce al par de rectas BC, AO; si el ángulo ABC es recto, los ejes de la hipérbola son OD, OD′.

Solución analítica.—Tomando por ejes de las x y de las y las rectas AC y AB, las ecuaciones de BN y CD son

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{c} = 1, \qquad \frac{x}{b} + \frac{y}{\lambda} = 1$$

eliminando λ, entre ellas se tiene por ecuación del lugar:

$$cx^2 - by^2 + bc(y - x) = 0$$

que es una hipérbola circunscripta al triángulo ABC. Transportando los ejes paralelamente á sí mismos al punto $O\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, la ecuación se transforma en

$$\frac{4x^2}{b(b-c)} - \frac{4y^2}{c(b-c)} = 1,$$

y los cuadrados α^2, β^2 de los semi-ejes están dados por las

$$8\alpha^2 = (b-c)^2 + (b-c)\sqrt{(b-c)^2 + 4bc \operatorname{sen}^2 A}$$

$$8\beta^2 = -(b-c)^2 + (b-c)\sqrt{(b-c)^2 + 4bc \operatorname{sen}^2 A}$$

CUESTIÓN 206

(Véase tomo IV, página 208).

Dada la longitud a *del lado* BC *de un triángulo* ABC, *los vértices* B y C *se mueven sobre una recta dada* xx′ *y el ortocentro* H *permanece fijo.*

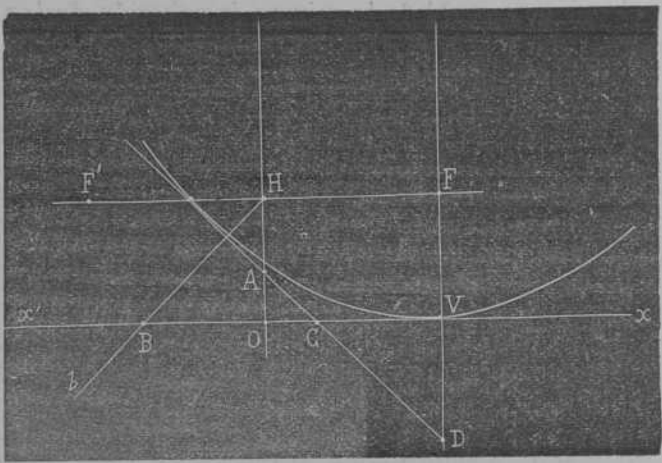
Demostrar que los lados AC *y* AB *envuelven dos parábolas.*

(J. Neuberg.)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Los dos puntos B y C describen sobre la recta xx' dos punteadas iguales (B) y (C), y el haz (b) que proyecta desde H la punteada (B) es, por consiguiente, proyectivo á la punteada (C). CA es la perpendicular trazada desde C sobre b, y la envolvente buscada es la envolvente de las perpendiculares trazadas por un elemento variable de (C) sobre el elemento correspondiente de (*b*), ó sea una parábola tangente á la recta xx'.

Sea O la proyección ortogonal de H sobre xx', y tómese sobre xx' $OB = -OH$, $AC = OV = a$. La parábola toca á xx' en V y á la recta del infinito en el punto en el infinito de la OH; V es, pues el vértice.



La perpendicular trazada por C sobre BH forma con xx' un ángulo de 45°; luego $2CV = 2OH$ es el semi-parámetro principal. La otra parábola, envolvente del lado AB, es evidentemente simétrica á la precedente respecto á la recta OH.

De esto se concluye la construcción siguiente: Tracemos por H la paralela á xx', y tomemos sobre ella los segmentos $HF = -HF' = a$. Los dos puntos F, F' son los focos, y la recta xx' es la tangente al vertice de la parábola hallada.

Solución analítica.—Designando λ el parámetro variable OB y haciéndose $OH = p$, las ecuaciones de las rectas BH, CA son

$$px + \lambda y = p\lambda, \quad \lambda^2 + \lambda(a - x) + py = 0$$

y la ecuación de la envolvente de CA, que se obtiene igualando á cero el discriminante de la última ecuación cuadrática en λ es

$$(a - x)^2 - 4py = 0$$

CUESTIÓN 209.

(Véase tomo IV, página 279).

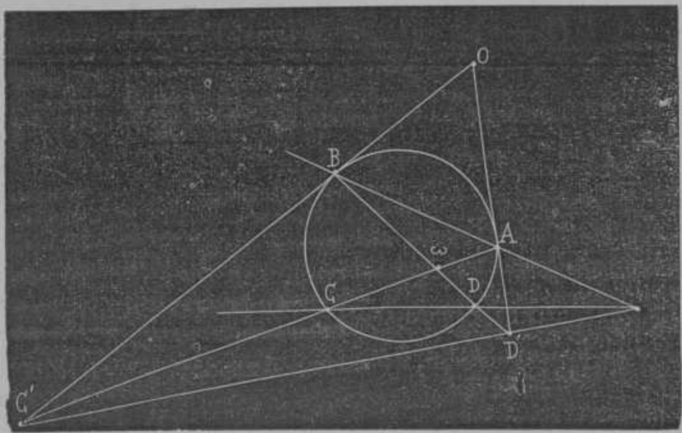
Desde un punto cualquiera O *se trazan dos tangentes* OA, OB *á una cónica. Sean* AC, BD *las cuerdas paralelas á* OB, OA.

Demostrar que las rectas AB *y* CD *son paralelas.*

(J. Neuberg.)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Sean OA y OB dos tangentes reales cualesquiera de una cónica. A y B sus puntos de contacto, C' y D' sus intersecciones con una transversal arbitraria, que no pasa por el punto O. Designemos además con C y D las ulteriores intersecciones de $C'A$ y $D'B$ con la có-



nica, y sea ω el punto de intersección de las dos rectas $C'A$, $D'B$. Los dos haces de rayos A(BCDA), B(ADCB) son proyectivos y por esto son proyectivos los dos grupos $B\omega DD'$ y $A\omega CC'$; pero ω es un punto unido, luego los dos grupos son perspectivos, y las tres rectas AB, CD, $C'D'$ concurren en el mismo punto.

Tomando por transversal $C'D'$ la recta en el infinito, se tiene el teorema propuesto.

CUESTIÓN 211

(Véase tomo IV, página 279).

Los puntos que dividen los cuatro lados de un pseudocuadrado en una misma razon son los vértices de un pseudocuadrado.

(H. Van Aubel.)

Solución por el Sr. Retali, (V.)

Tomando por ejes coordenados las diagonales AC, BD del pseucuadrado y haciendo

$$OA = b,\ \ OC = b',\ \ OB = a,\ \ OD = a'$$

$$a + a' = b + b' = d,\ \ a - a' = \alpha,\ \ b - b' = \beta,$$

las coordenadas de los puntos P, Q, R, S que dividen respectivamente los lados AB, BC, CD, DA en la razón $\gamma : 1$ son

$$\begin{cases} x = a\gamma \\ y = b(1-\gamma) \end{cases} \quad \begin{cases} x = a(1-\gamma) \\ y = -b'\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a'\gamma \\ y = -b'(1-\gamma) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a'(1-\gamma) \\ y = b\gamma \end{cases}$$

y por consiguiente $\overline{PR}^2 = \overline{QS}^2 = d^2[\gamma^2 + (1-\gamma)^2]$

Las ecuaciones de las dos rectas PR, QS son

$$(1) \qquad (1-\gamma)x - \gamma y = \gamma(1-\gamma)\frac{\alpha-\beta}{2}$$

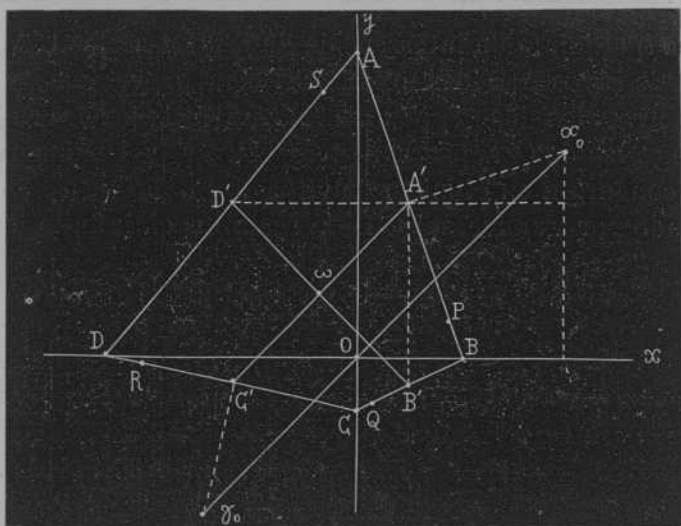
$$(2) \qquad \gamma x + (1-\gamma)y = \gamma(1-\gamma)\frac{\alpha+\beta}{2}$$

PR y QS son, pues, perpendiculares entre sí.

Observaciones.—1.ª Si hacemos $2p = \alpha - \beta$, $2q = \alpha + \beta$, las coordenadas del punto común á las dos rectas PR y QS son

$$x = \frac{\gamma(1-\gamma)(p+\beta\gamma)}{\gamma^2+(1-\gamma)^2} \qquad y = \frac{\gamma(1-\gamma)(q-\alpha\gamma)}{\gamma^2+(1-\gamma)^2}$$

Los dos puntos correspondientes á los valores γ y $1-\gamma$ del pará-



metro γ son simétricos respecto á la recta $\alpha y - \beta x = 0$ que une O con el centro ω del cuadrado A'B'C'D' inscripto en el pseudocuadrado.

2.º Para γ variable, las rectas (1) y (2) envuelven respectivamente las parábolas

$$(x+y+p)^2 - 4px = 0 \qquad (x-y-q)^2 - 4qy = 0$$

ambas tangentes á los dos ejes coordenados. Estas parábolas tienen por ejes las bisectrices de los ángulos de los ejes coordenados y por parámetros respectivamente $-p\sqrt{2}$ y $q\sqrt{2}$; las ecuaciones de las tangentes al vértice son $2(x+y)+p=0$, $2(x-y)-q=0$ que representan las diagonales A'C' y B'D' del cuadrado A'B'C'D'.

3.ª La cuarta tangente común á las dos parábolas tiene por ecuación $2\beta x+2\alpha y=\alpha\beta$, pasa por ω y une las otras dos intersecciones con los ejes coordenados del círculo de centro ω y radio $\overline{\omega O}$ y es el lugar de los centros de los rectángulos inscriptos en el pseudocuadrado.

4.ª El lugar del punto común á las dos rectas OR y QS es la estrofoide recta que tiene su vértice en ω y el punto doble en O. (*)

CUESTIÓN 212.

(Véase tomo IV, página 279).

En un pseudocuadrado la recta que une los puntos medios de los lados opuestos es perpendicular á la que une los centros de los cuadrados construidos exteriormente sobre los otros dos lados é igual á la mitad.

(H Van Aubel.)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Las diagonales A'C', B'D' del cuadrado A'B'C'D' son evidentemente paralelas á las bisectrices de los ángulos formados por las diagonales del pseudocuadrado. Además los centros α_0 y γ_0 de los cuadrados construidos exteriormente sobre AB y CD se hallan en la bisectriz del ángulo AOB; luego $\overline{\alpha_0\gamma_0}$ es perpendicular á B'D'.

Las distancias de α_0 y γ_0 á las rectas AC y BD son respectivamente $\frac{a+b}{2}$ y $-\frac{a'+b'}{2}$, y por consiguiente, con la notación empleada en la solución de la cuestión pendiente

$$\overline{\alpha_0\gamma_0}^2=2\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a'+b'}{2}\right)=2d^2 \quad \overline{A'C'}^2=2\overline{A'B'}^2=2.\frac{d^2}{4}=\frac{d^2}{2}$$

de donde $\alpha_0\gamma_0=2\overline{A'C'}$.

CUESTIÓN 221.

(Véase tomo IV, página 311).

Si consideramos las tres parábolas que tocan dos lados del triángulo ABC *y tienen por eje el tercer lado, los focos de estas curvas estan sobre la recta de Lemoine de* ABC. *Calcular los parámetros.*

(J. Neuberg.)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Descrito el círculo circunscripto al triángulo ABC, trazo la tangente en A, que corta á BC en F_1 y la recta CD simétrica de OA res-

(*) Véase *Mathesis* tomo IV, cuestión 990 (Schoute) pecto á CB. La parábola que toca á las rectas AB, AC y tiene por eje la BC, toca también á la recta CD. El foco de esta parábola es pues la otra intersección de BC con el círculo circunscripto al triángulo CAD. Ahora, se observa que $\angle$ ACB = CAF + AFC, $\angle$ DCF = $\angle$ ACB = ADC + CAF; luego AFC=ADC y el círculo CAD pasa por F; los focos de las tres parábolas son pues los puntos de intersección de los lados del triángulo ABC con las tangentes en los vértices opuestos al círculo circunscripto.

Para calcular los parámetros p_1, p_2, p_3, observo que el pie T de la perpendicular bajada desde F sobre CD pertenece á la tangente en el vértice de la primera parábola. Tendremos pues $p_1 = 4\overline{FV} = 4\overline{FC}$ $\operatorname{sen}^2 C$; pero de las relaciones conocidas $FB : FC = c^2 : b^2$, resulta $FC = ab^2 : (a^2 - b^2)$, y los parámetros buscados son

$$p_1 = \frac{4ab^2}{c^2 - b^2} \operatorname{sen}^2 C = \frac{ab^2c^2}{(c^2 - b^2)\,R^2}$$

$$p_2 = \frac{4bc^2}{a^2 - c^2} \operatorname{sen}^2 A = \frac{a^2bc}{(a^2 - c^2)\,R^2}$$

$$p_3 = \frac{4ac^2}{b^2 - a^2} \operatorname{sen}^2 B = \frac{a^2b^2c}{(b^2 - a^2)}\,R^2$$

donde R es el radio del círculo circunscrito al triángulo ABC.

CUESTIÓN 220

(Véase tomo IV, página 311).

Si en un triángulo ABC *el ángulo* A=45°, *la recta que une el vértice* A *al centro del cuadrado construido exteriormente sobre el lado* BC *pasa por el punto de Lemoine del triángulo, y la relación de las distancias del punto* A *al punto de Lemoine y al centro de este cuadrado es igual á la tangente del ángulo de Brocard.*

(H. Van Aubel.)

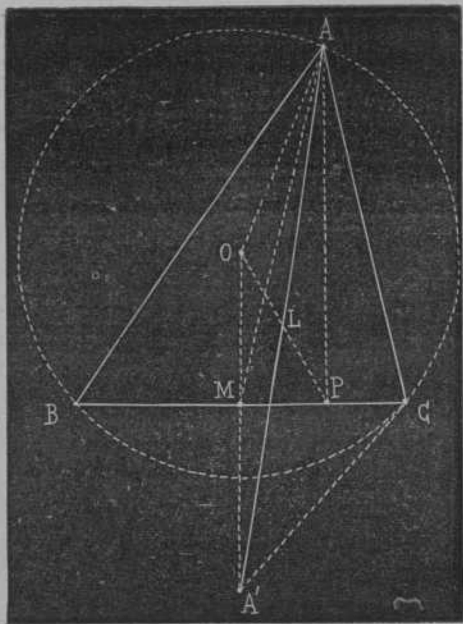
Solución por el Sr. Retali, (V.)

El polo A′ de BC respecto al círculo circunscripto al triángulo ABC es evidentemente el centro del cuadrado descrito exteriormente sobre BC; luego AA′ pasa por el punto de Lemoine L.

Llamando O al centro del círculo y M al punto medio de BC, la AM es mediana del triángulo AOA′ y por consiguiente

$$\overline{AO}^2 + \overline{AA'}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{OM}^2, \quad \text{pero } \overline{AO}^2 + 2\overline{OM}^2 \text{; luego}$$

$$\overline{AA'}^2 = 2\overline{AM}^2 = \frac{-a^2+2b^2+2c^2}{2};$$



Según una fórmula de *Catalán* (véase PROG. MAT., t. I, pág. 128), se tiene

$$\overline{AL}^2 = \frac{b^2c^2(-a^2+2b^2+2c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

y finalmente

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{bc\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$$

$$= \frac{4S}{a^2+b^2+c^2} = \operatorname{tg}\omega$$

Observación.—La recta que une el pie P de la perpendicular trazada desde A sobre BC con el centro del círculo circunscripto pasa por el punto de Lemoine.

Solución por el Comandante de Ingenieros D. IGNACIO BEYENS

1.º Sea a el centro del cuadrado construído sobre Bb, OO', OO″ perpendiculares sobre los lados Ab, AB, se tiene:

$$OO' = OC \text{ sen } ObO'$$

$$OO'' = OB \text{ sen } OBO''$$

pero

$$Ob = OB = \frac{1}{2} Bb\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

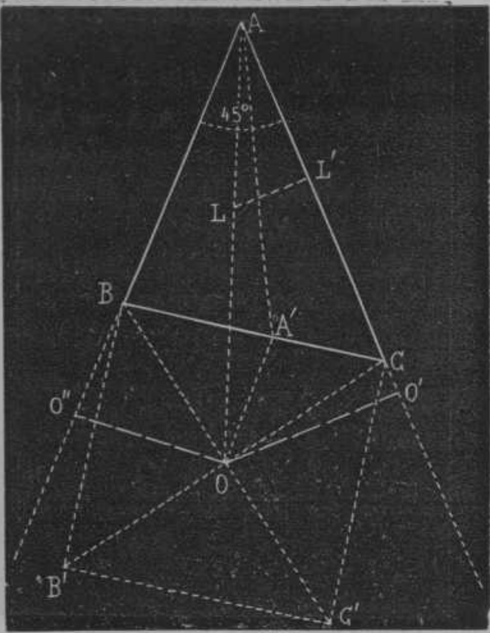
y

$$ObO' = 180^0 - (45^0 + b) = B$$

$$OBO'' - 180^0 - (45^0 + B) = b$$

luego $OO' = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. sen B, $OO'' = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. sen b, por lo tanto $\frac{OO'}{OO''}$ $= \frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} = \frac{b}{c}$, esto es, que el punto O pertenece á la simediana correspondiente al ángulo A; luego AO es la simediana, y sobre ella está situado el punto de Lemoine (L.)

2.º Si bajamos la perpendicular LL sobre el lado Ab, según se sabe, por la *nueva geometría del triángulo*, se tiene



$$LL_b = \frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2}$$

(Δ área del triángulo);

pero $\quad OO' = \frac{a}{2} \sqrt{2}$. sen B,

como $\quad \Delta = \frac{1}{2} a\,c$. sen B,

sen B $= \frac{2\Delta}{ac}$;

luego

$$\frac{LL_b}{OO'} = \frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2} : \frac{2\Delta}{ac} . \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

ó $\quad \frac{LL_b}{OO'} = \frac{bc\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$,

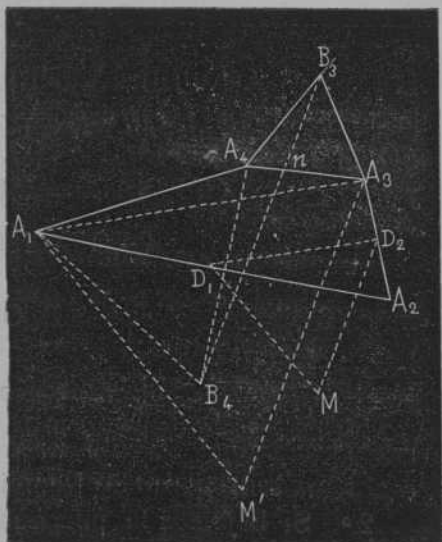
también $\Delta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,.\,bc\sqrt{2}$ $= \frac{1}{4}\,bc\sqrt{2}$ (por ser sen 45° $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$), por lo tanto se tendrá $\frac{LL_b}{OO'}$ $\frac{4\Delta}{a^2+b^2+c^2}$ = tang. Ω, siendo (Ω) el ángulo de Brocard.

CUESTIÓN 191

(Véase tomo IV, páginas 16').

Si se prolonga el lado BC *de un triángulo* ABC *una longitud* $OA_1 = \frac{1}{3}$ BC *y el lado* CA *otra* $AB_1 = 2CA_1$, *los puntos medios del lado* BC *y de las rectas* AA_1, BB_1 *son los vértices de un triángulo equivalente á* ABC.

(H. Van Aubel).



Solución por el Sr. Iturralde (D. M.)

Tenemos: $D_1D_2 = \frac{1}{2}\, A_1A_3$, D_1D_2 paralela á A_1A_3.

$A_1m'A_3$ y D_1MD_2 son triángulos equiláteros; por tanto D_2m y A_3M' son paralelas.

Tenemos, pues, que demostrar que $B_3b_4 = A_1A_3$ y que B_3b_4 es paparalela á A_3M'.

Pero $\triangle A_1A_4A_3 = \triangle I_4A_4B_3$, porque $\angle A_1A_4A_3 = 60^\circ + \angle I_4A_4A_3$ y $\angle b_4A_4B_3 = \angle B_4A_4A_3 + 60^\circ$, y como $A_4B_3 = A_4A_3$ y $A_1A_4 = A_4B_4$; $A_1A_3 = B_4B_3$.

El triángulo B_3nA_3 tiene común con el triángulo $B_3A_4A_3$ el ángulo en A_3; por tanto el ángulo B_3nA_3 vale $60^\circ + \angle A_4B_3B_4$

Por otra parte el ángulo A_4A_3m' vale $60^\circ + \angle A_4A_3A_1$; pero como $\angle A_4B_3B_4 = \angle A_4A_3A_1$, las rectas B_3B_4 y A_3m' son paralelas.

CUESTIÓN 205

(Véase tomo IV, página 208).

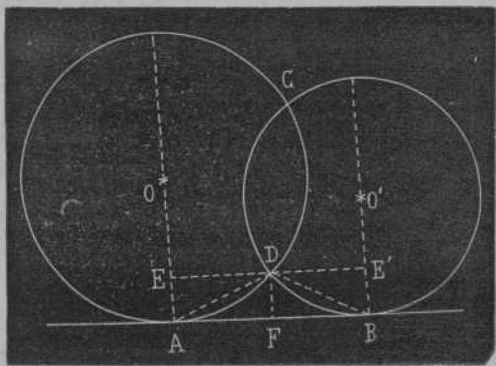
Dos círculos O, O' *se cortan en los puntos* C *y* D; *una tangente común tiene por puntos de contacto* A *y* B. *Demostrar que los círculos* CAB y DAB *son iguales y medios proporcionales entre los círculos* O *y* O'.

(A. Gob).

Solución por el Sr. Luzón de las Cuevas (D. J.)

Llamando R al radio del círculo circunscrito al triángulo ADB, se sabe que.

$$AD \cdot DB = DF \cdot 2R$$



de donde

$$R = \frac{AD \cdot DB}{2DF}$$

pero

$AD = \sqrt{2r \cdot AE}$ y $DB = \sqrt{2r'BE'}$

sustituyendo y siendo $AE = DF = BE'$, se tiene

$$R = \sqrt{rr'}$$

Procediendo de la misma manera en el triángulo ABC, se hallaría igual valor para su radio, quedando así probada en todas sus partes la cuestión.

Solución por el Sr. Caro (D. R.)

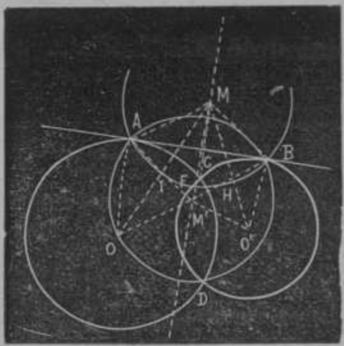
Siendo M y M' los centros de los círculos pedidos, estarán en la perpendicular levantada en el punto medio de AB.

Son semejantes los triángulos OAM y O'BM, por tener

$$\angle OAM = 90^\circ + BAM \qquad \angle OBM = 90^\circ + ABM$$

y además los AOM = OMF y O'MB medidos por los arcos

$$IF = IC - FC = \frac{AC}{2} - FC = \frac{AF + FC}{2} - FC = \frac{AF - FC}{2}$$



y $HB = \frac{BC}{2} = \frac{FB - FC}{2}$

cuya semejanza nos da

$$\frac{OA}{BM} = \frac{AM}{O'B} \quad \text{ó} \quad \overline{AM'}^2 = OA \,.\, O'B \qquad (1)$$

Análogamente se demuestra la semejanza de los triángulos OAM' y O'BM' que nos da

$$\frac{OA}{BM'} = \frac{M'A}{O'B'} \quad \text{ó} \quad \overline{AM'}^2 = OA \,.\, O'B \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) se deduce que AM = AM', y de cualquiera de ellas que

$$\pi^2 \overline{AM}^4 = \pi\overline{OA}^2 \,.\, \pi\overline{OB}^2$$

$$\overline{AM}^4 = \overline{OA}^2 \,.\, \overline{OB}^2$$

CUESTIÓN 207

(Véase tomo IV, página 278).

Construir un triángulo ABC *conocidos el punto de Lemoine* K, *el vértice* A *y las dimensiones de los lados* AB, AC.

(*J. Neuberg.*)

Solución por el SR. SOLLERTINSKY (B.)

Sean B_1, C_1 las proyecciones de K sobre las rectas dadas AC, AB; M el medio de $B_1 C_1$. Sobre la recta MK se toma $KA_1 = 2MK$. La perpendicular en A_1 sobre KA_1 encontrará á las rectas dadas en los vértices B, C del triángulo buscado.

En efecto, siendo K el centro de gravedad de $A_1B_1C_1$, los triángulos KC_1A_1 y KA_1B_1 son equivalentes. Pero, á causa de los ángulos suplementarios, se tiene

$$\frac{KC_1A_1}{ABC} = \frac{KC_1 \,.\, KA_1}{BA \,.\, BC}; \quad \frac{KA_1B_1}{ABC} = \frac{KA_1 \,.\, KB_1}{BC \,.\, CA}$$

luego $\frac{KC_1 . KA_1}{BA . BC} = \frac{KA_1 . KB_1}{BC . CA}$, ó bien $\frac{KC_1}{BA} = \frac{KB_1}{CA}$

Se demostraría de igual modo que $\frac{KB_1}{CA} = \frac{KA_1}{BC}$

El punto K es, pues, el punto de Lemoine de ABC.

CUESTIÓN 208

(Véase tomo IV, página 278).

Se dan el vértice A *y el ortocentro* H *de un triángulo* ABC; *el ángulo* BAC *se dá en magnitud, pero es movible al rededor de su vértice. Demostrar que los vértices* B, C *y el centro* O *del círculo circunscripto describen circunferencias; que la recta que une los pies de las alturas* BH, CH *envuelve una circunferencia, y que las medianas trazadas por* B *y* C *giran cada una al rededor de un punto fijo.*

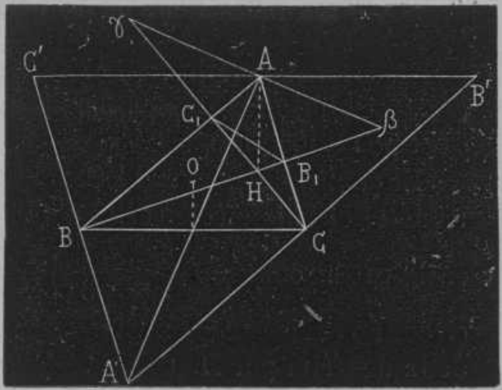
(*J. Neuberg.*)

Solución por el Sr. Sollertinski. (B.)

Sea M el medio de BC. En el triángulo rectángulo OMB el lado $OM = \frac{AH}{2}$ y el $\angle BOM=A$ (ó $180-A$, cuando A es obtuso) son constantes; luego lo mismo ocurre con los otros lados OB, BM del triángulo.

Permaneciendo, por consiguiente, el radio del círculo ABC constante, su centro O describe la circunferencia que tiene por centro A.

Siendo fijas la longitud (2BM) y la dirección de BC, los vértices B′, C′ del triángulo anticomplementario también lo son. De esto: 1.º las medianas BB′, CC′ giran al rededor de los puntos B′, C′; 2.º los ángulos HCB′ y HBC′ siendo rectos, los puntos B, C recorren las circunferencias que tienen HB′ y HC′ por diámetros.



Los pies B_1 y C_1 de las alturas BH y CH son los extremos del arco capaz del ángulo constante A, sobre la circunferencia que tiene AH por diámetro; la longitud B_1C_1

siendo así constante, la cuerda B_1C_1 envuelve una circunferencia que tiene el medio de AH por centro.

OBSERVACIÓN.—*El centro de gravedad, el círculo de los nueve puntos y los cuatro puntos de Nagel describen circunferencias. Los centros de los círculos inscriptos recorren dos caracoles de Pascal. Las bisectrices de los ángulos* B *y* C *envuelven dos hipocicloides con tres retrocesos. Los punt s en que estas bisectrices encuentran á la recta que une los medios de* AB *y* AC *pertenecen á dos trifoliums (oblicuos).*

CUESTIÓN 210.

(Véase tomo IV, página 279).

El vértice A *y el medio del lado* BC *de un triángulo* ABC *permanecen fijos; el ángulo* BAC *se da en magnitud, pero gira alrededor de su vértice. Demostrar que los vértices* B *y* C, *los pies de las tres alturas, el ortocentro* H, *el centro del círculo circunscripto y el centro del círculo de los nueve puntos describen circunferencias; las alturas* BH *y* CH *giran cada una alrededor de un punto fijo.*

(J. Neuberg).

Solución por el SR. SOLLERTINSKY (B.)

(La misma figura que para la cuestión 208). Sea A′ el simétrico de A con relación al medio M de BC.

Siendo fija la recta AA′ y los ángulos $ABA' = ACA' = 180 - A$ siendo constantes, cada uno de los puntos B y C describe una circunferencia siendo recto el $\angle AB'H$, la altura BH pasa por el punto β, diametralmente opuesto al A′ sobre la circunferencia ABA′. De igual modo la altura CH pasa por un punto fijo γ de la circunferencia ACA′.

Los pies B_1 y C_1 de las alturas están en circunferencias que tienen $A\beta$ y $A\gamma$ por diámetros.

El ortocentro H, como el vértice del ángulo constante $\beta H \gamma$, apoyándose sobre los puntos fijos β y γ, describe una circunferencia que pasa por estos puntos.

El centro de gravedad G del triángulo ABC es fijo; pero los centros del círculo circunscripto y el de los nueve puntos dividen á GH en la razón constante $\left(\pm\frac{1}{3}\right)$; luego estos dos centros describen circunferencias respectivamente iguales á la mitad y á la cuarta parte de la descrita por H.

CUESTIÓN 212.

(Véase tomo IV, página 279).

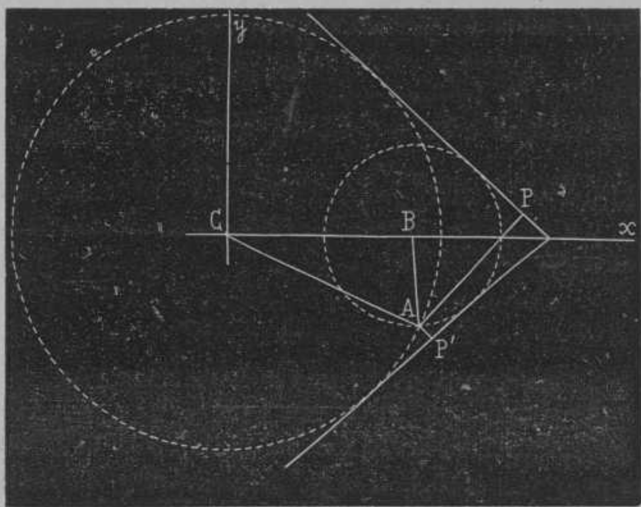
Existen dos parábolas que pasan por dos vértices B, C *de un triángulo* *y tienen por foco el tercer vértice* A. *Los parámetros de estas curvas tienen por expresión*

$$\frac{4bc\ \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}}{b+c \pm 2\sqrt{bc}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}$$

(J. Neuberg).

Solución por el Sr. Ret.li (V.)

Descritos los dos círculos con centros ***B*** y ***C*** respectivamente y que pasan por A, las tangentes comunes á los dos círculos son las directrices de las dos parábolas reales (*), que resuelven el problema. Los semi-parámetros de estas parábolas son las distancias de A á estas dos tangentes comunes.



Tomando por ejes coordenados la CB y la perpendicular en C, las ecuaciones de los dos círculos son

$$x^2+y^2=b^2, \quad (x-x)^2+y^2=c^2,$$

el centro externo de semejanza tiene por coordenadas

$$x=\frac{ba}{b-c}, \quad y=0,$$

las dos tangentes reales comunes están representadas por

$$(1) \qquad \pm(b-c)\,x-2\ \mathrm{sen}\,\frac{\mathrm{A}}{2}\sqrt{bc}\,.\,y \mp ab=0$$

(*) Existen además dos parábolas imaginarias de segunda especie que resuelven el problema y tienen por directrices las dos tangentes imaginarias conjugadas comunes á los dos círculos.

y las coordenadas de A son

$$x = \frac{b^2 - bc \cos A}{a}, \qquad y = -\frac{bc \operatorname{sen} A}{a}$$

la distancia de A á la recta (1) están pues expresadas por

$$\left[\pm (b-c)\,(b^2 - bc \cos A) + 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \,.\, \operatorname{sen} A \,.\, bc \sqrt{bc} \mp a^2 b\right] : a^2$$

ó sea, desarrollando y reduciendo, con observar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A = (b \quad c)^2 + 4\,bc \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

$$= \left(b + c + 2\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}\right)\left(b + c - 2\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}\right),$$

$$\pm (b-c)\,(b^2 - bc \cos A) \mp b\,(b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A)$$

$$= \mp bc\,(b+c)\,(1 - \cos A) = \mp 2\,bc\,(b+c) \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2},$$

los semi-parámetros hallados tienen por expresiones

$$\frac{2\,bc\,(b+c) \mp 2\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}\Big) \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A} = \frac{2\,bc \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}{b + c \pm 2\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}}$$

CUESTIONES PROPUESTAS

239. ¿Bajo qué condición los módulos de la media aritmética y de la media proporcional de dos cantidades imaginarias son iguales? Se recuerda que siendo a y b las dos cantidades, las medias en cuestión son $\frac{a+b}{2}$ y $\sqrt{ab}$

(*C. A. Laisant.*)

240. Si el ángulo A de un triángulo ABC es igual á 45°: 1.° Los vértices de los cuadrados construidos exteriormente sobre los lados AB, AC y el vértice A′ del paralelogramo BACA′ están en una circunferencia concéntrica con el círculo ABC; 2.° La suma de los cuadrados de los radios de estos círculos es igual á la suma de los cuadrados de los lados AB, AC.

(*B. Sollertinsky.*)

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.