Año III Zaragoza 15 Diciembre de 1893 Núm. 36

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

NICOLAS IVANOVICH LOBACHEFSKI

RESEÑA BIOFRÁFICO-BIBLIOGRÁFICA

Nicolás Ivanovich Lobachefski, el Copérnico de la Geometría, el gran geómetra eslavo cuyo centenario acaba de festejar el mundo matemático, nació en pobre cuna el día 22 de Octubre) nuestro 2 de Noviembre) del año de 1793 en Nijigorodskdi (Rusia). Su padre murió tempranamente, y su madre, que carecía de bienes de fortuna, pasó grandes privaciones para poder darle educación. Al cabo consiguió hacerle entrar en un gimnasio donde pronto sus talentos le hicieron notable. Algunos profesores extranjeros puestos al servicio del gobierno, entre los que se hallaba el astrónomo Bartels, amigo de Gauss, venidos á Kasan, le cobraron afecto y le protegieron. Con su auxilio consiguió revalidarse, pues si bien su esclarecida inteligencia no necesitaba de ayuda ajena, en cambio una falta de disciplina le produjo graves trastornos y aun estuvo á punto de impedir que se graduase. Durante los años de 1814 á 1816 fué profesor adjunto en la Universidad de Kasan, siendo después nombrado profesor numerario en el mismo establecimiento. Lobachefski es el primer alumno de la Universidad Imperial de Kasan que llegó á profesar en ella. No sólo esto; por largos años fué con general aplauso y provecho grandísimo de la Ciencia, Rector, debiéndose á él la creación de un magnífico Observatorio astronómico, en el cual trabajó como albañil, como arquitecto (haciendo los planos) y como astrónomo. Destruída su obra por un violento incendio, tuvo que multiplicar sus fatigas y afanes, consiguiendo al fin su reconstrucción y nuevo arreglo. Cuéntase, á propósito de esto, la siguiente curiosísima anécdota: — Un sabio extranjero de distinguida posición visitaba un día el edificio y sus anejos. Un pobre hombre de aspecto modesto y humilde, con traje miserable, le guiaba, asombrándole con sus conocimientos. El visitante, al despedirse, entregó algunas monedas al cicerone..... que no era otro que el propio Lobachefski, director del Observatorio, en persona. ¡A la tarde se reunieron ambos en la mesa del gobernador!

Como modelo de su sabia administración rectoral se refiere otro rasgo notable:—Cuando el cólera asolaba á Rusia, Lobachefski aisló enérgicamente á la Universidad, en cuyo recinto encerró á los alumnos, á los profesores y á sus familias, logrando así que se salvasen milagrosamente del contagio.

En el año de 1856, 12 de Febrero (estilo antiguo), terminó su vida empleada en provecho de la Ciencia. Los disgustos producidos por la ingratitud de los hombres y la muerte prematura de su único hijo arruinaron su salud y precipitaron su fin. Un año antes de morir, en 1855, se celebraba un aniversario de la fundación de su querida Universidad; el sabio inmortal se sentía morir, y reuniendo todas sus fuerzas escribió su Pangeometría, resumen y corona de sus anteriores trabajos, que dedicó á su amada Alma Mater. Luego languideció de tristeza hasta su muerte. Su memoria será honrada siempre al par de la de los más grandes geómetras y pensadores del mundo. Justo es añadir que su gloria geométrica, al crear la geometría No-Euclídea, la comparte con dos sabios tan modestos cuanto esclarecidos y desgraciados. Nos referimos á Wolfgang y Juan Bolyai, que independientemente llegaron á muchos de sus resultados, y con quienes la Ciencia tiene una deuda grande de gratitud.

Desde que en mal hora se hizo de la Filosofía una Ciencia especial, en vez de considerarla como el resumen de todas, muchos hombres osados se han ocupado de ella y con frecuencia en una jerga pedante é ininteligible. El espacio y el tiempo fueron á menudo el objeto de sus disparatadas lucubraciones. Lobachefski abrió una nueva era en estos estudios, mostrando el verdadero camino que, para conocer su naturaleza, debe emprenderse. Emprendió la investigación escrupulosa de los axiomas (así llamados) geométricos y halló que su verdad es *sólo producto de la experiencia*, mejor aún, la experiencia indica hoy que son ciertos, quizá cuando nuestros medios de observación sean más perfectos podrá descubrirse su falsedad. La razón, con sus solos recursos no puede pronunciarse por el pro ni el contra. La ciencia ha adquirido así las geometrías No-Euclídeas en que se suponen falsos determinados axiomas. Gauss el príncipe de los matemáticos, sancionó la obra comenzada por el astrónomo ruso y por los dos Bolyai sus amigos.

Quizás el ilustre profesor alemán (el águila de Gottingen, como

Wolfgang Bolyai le llamaba) estuvo con anterioridad en posesión de alguna de estas verdades, aunque nunca publicó los resultados de sus estudios. La correspondencia de Gauss con Schumacher parece así indicarlo.

Muchos sabios eminentes de todos los países han proseguido después por este camino. Entre ellos se encuentran los Riemann, Klein, Cayley, Genocchi, Beltrami, Hoüel, De Tilly, Fly S^{te} Marie, Pasch, Schur, Killing, Poincaré, Bruce Halsted, Stringham y otros, pero la mayor gloria pertenece siempre de derecho al que primeramente abre el camino.

Las obras de Lobachefski han sido poco difundidas. Las principales, las más completas están en ruso, y nunca ha sido publicada su traducción. Una versión al francés, inédita, parece que poseía el difunto profesor de Bordeaux señor Hoüel. No sé lo que á su muerte habrá sido de ella, pero creo que en vida la comunicó á algunos sabios.

Una nueva edición de las obras geométricas apareció en Kasan el año 1883 por los cuidados del profesor Janichefsk. Sólo poseo el primer tomo, y creo que nunca se haya publicado más. El volumen publicado sólo contiene memorias en lengua rusa.

En alemán se publicaron en Berlín sus investigaciones sobre las paralelas, y en francés, en el *Journal Crelle*, algún artículo. Hoüel tradujo las *Geometrische Untersuchungen*, poniendo sabias notas á este trabajo (correspondencia de Gauss con Schumacher). En italiano se han traducido también, y además hay una edición de Nápoles de su Pangeometría.

De desear sería que se publicase una edición completa en francés, inglés ó alemán, lenguas más difundidas y fáciles que la rusa.

Las más importantes obras de Lobachefski son:

I Los principios de Geometría (en ruso, presentados el 12 de Febrero de 1826, Kasan).

II Geometría imaginaria (Kasan, en ruso, 1835).

III Geometrie imaginaire (Berlin, Journal de Crelle, 1837).

IV Nuevos principios de la Geometría con una teoría completa de las paralelas (Kasan, 1836-38. Obra importantísima).

V Geometrische Untersuchungen sur theorie der Parallellinien. Berlin, 1840).

VI Pangeometría (en ruso, Kasan, 1855). Esta fué su última obra.

Algunos filósofos (así se llaman), tan enemigos de todo estudio serio como amigos de charla fácil, han declarado guerra á la Pangeometría. A ellos se han agregado como auxiliares algunos matemáticos utilitarios, que no ven qué provecho reporte una ciencia que no sirve para hacer caminos ni edificios ni aun fortuna. Felizmente su número va siendo muy escaso. *Sic transit stultitia mundi.* A los filósofos es inútil tratar de convencerles, pues para esto habrían de estudiar. A los utilitarios se les puede contestar con estas palabras de la Eterna Sabiduría: *No sólo de pan vive el hombre.*

PROF. DR. VENTURA REYES PRÓSPER.

Cuenca, 16 Noviembre, 93.

UN TEOREMA GEOMÉTRICO

POR D. ATANASIO LASALA
Catedrático del Instituto de Bilbao.

CONTINUACION (Véase t. II, pág. 262)

12. 8.ª—Teorema de Menelao: *Si los lados de un triángulo esférico* ABC *se cortan por un arco de círculo máximo en tres puntos* a, b, c *se verifica la relación*

$$\frac{\operatorname{sen} bC}{\operatorname{sen} bA} : \frac{\operatorname{sen} cB}{\operatorname{sen} cA} = \frac{\operatorname{sen} aC}{\operatorname{sen} aB} \qquad [c].$$

Basta, para demostrarla, suponer unidos los puntos A y a por un arco de círculo máximo.

Es evidente que la relación se verifica en cuanto á los signos, ya corte el arco transversal á dos lados y la prolongación del tercero, ó bien á las prolongaciones de los tres.

13. 9.ª—Recíprocamente: *Si en los lados de un triángulo esférico se marcan tres puntos* a, b, c, *de modo que se verifique la relación* [c], *estos puntos se hallarán en una misma circunferencia máxima.*

Sea a' el punto en que el arco bc encuentra al lado BC.

De la hipótesis y del teorema directo se deduce

$$\frac{\operatorname{sen} a\,C}{\operatorname{sen} a\,B} = \frac{\operatorname{sen} a'\,C}{\operatorname{sen} a'\,B};$$

para que esta condición se verifique es necesario que a y a' coincidan ó que sean extremos de un diámetro del círculo BC, y en cualquiera de estos casos a, b y c pertenecen á una misma circunferencia.

14. 10.ª—*Marcando en un lado de un triángula un punto á 90° del medio, todo arco de círculo máximo que parta de dicho punto, dividirá á los otros dos lados en segmentos cuyos senos son proporcionales.*

Si a dista 90° del medio de BC, será $\dfrac{\text{sen } a \text{ C}}{\text{sen } a \text{ B}} = 1$, luego

$$\frac{\text{sen } b \text{ C}}{\text{sen } b \text{ A}} = \frac{\text{sen } c \text{ B}}{\text{sen } c \text{ A}}.$$

15. 11.ª—Recíprocamente: ***Si dos lados de un triángulo se dividen por medio de un arco de manera que los senos de los segmentos sean proporcionales, el arco pasará por un punto del tercer lado á 90° del punto medio.***

16. 12.ª—***Todo arco de círculo máximo que pasa por el medio de un lado de un triángulo, divide á los otros dos lados en segmentos tales, que la razón de los senos de los segmentos de un lado es igual y de signo contrario á la de los senos de los otros dos segmentos.***

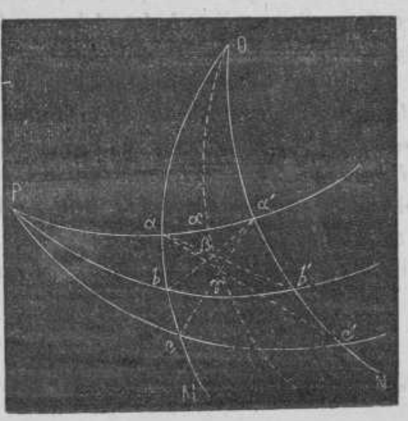
Siendo a el punto medio de BC, resulta que $\dfrac{\text{sen AC}}{\text{sen AB}} = -1$, luego

$$\frac{\text{sen } b \text{ C}}{\text{sen } b \text{ A}} = -\frac{\text{sen } c \text{ B}}{\text{sen } c \text{ A}}.$$

17. 13.ª—Recíprocamente: ***Si dos lados de un triángulo se dividen por medio de un arco en dos segmentos, de manera que la razón de los senos de los segmentos de un lado sea igual y de signo contrario á la razón de los senos de los segmentos del otro lado, aquel arco pasará por el punto medio del tercer lado.***

18. 14.ª—***Los puntos marcados en los tres lados de un triángulo esférico á 90° de los puntos medios, estarán en una misma circunferencia máxima.***

Puesto que se verifica la relación [c].



19. 15.ª—*Si los lados de un ángulo esférico* O (fig. 2.ª) *se cortan por un arco fijo* P a a′, *y por otro* P b b′, *móvil al rededor del punto* P, *la razón*

$$\frac{\text{sen } ba'a}{\text{sen } ba'\text{O}} : \frac{\text{sen } b'aa'}{\text{sen } b'a\text{O}}$$

es constante é igual á $\dfrac{\text{sen PO}a}{\text{sen PO}a'}$:

En efecto,

$$\frac{\text{sen } ba'a}{\text{sen } ba'\text{O}} = \frac{\text{sen } ba}{\text{sen } b\text{O}} : \frac{\text{sen } a'a}{\text{sen } a'\text{O}},$$

$$\frac{\operatorname{sen} b'aa'}{\operatorname{sen} b'a\mathrm{O}} = \frac{\operatorname{sen} b'a'}{\operatorname{sen} b'\mathrm{O}} : \frac{\operatorname{sen} aa'}{\operatorname{sen} a\mathrm{O}};$$

$$\text{luego } \frac{\operatorname{sen} ba'a}{\operatorname{sen} ba'\mathrm{O}} : \frac{\operatorname{sen} b'aa'}{\operatorname{sen} ba'\mathrm{O}} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{P}a}{\operatorname{sen} \mathrm{P}a'} : \frac{\operatorname{sen} \mathrm{O}a}{\operatorname{sen} \mathrm{O}a'} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{PO}a}{\operatorname{sen} \mathrm{PO}a'}.$$

20. 16.ª—*Si un triángulo esférico* ABC *se corta por un arco transversal* abc, *se verifica la relación*

$$\frac{\operatorname{sen} b\mathrm{BC}}{\operatorname{sen} b\mathrm{BA}} : \frac{\operatorname{sen} c\mathrm{CB}}{\operatorname{sen} c\mathrm{CA}} = \frac{\operatorname{sen} a\mathrm{AC}}{\operatorname{sen} a\mathrm{AB}} \qquad [c']$$

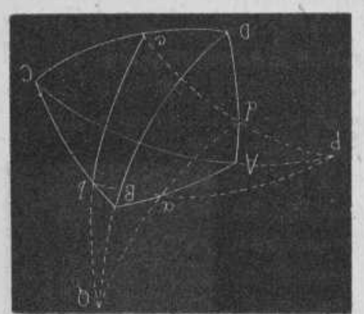
Es la proposición anterior bajo otra forma.

21. 17.ª—Recíprocamente: *Si en los lados de un triángulo esférico* ABC *se marcan tres puntos* a, b, c, *de modo que se verifique la relación* [c'], *los puntos* a, b, c *estarán en una misma circunferencia máxima.*

22. 18.ª—*Los puntos* b, c, a, *en que los arcos bisectores de dos ángulos* B *y* C *de un triángulo esférico* y *el del suplementario del* A *encuentran á los lados opuestos, están en una misma circunferencia máxima.*

Las dos primeras razones de la relación [c'] valen -1 y la tercera $+1$, luego la relación se verifica, y los puntos a, b, c están, por consiguiente en una circunferencia máxima.

23. 19.ª—*Los puntos en que los arcos bisectores de los tres ángulos externos de un triángulo esférico encuentran á los lados opuestos pertenecen á una misma circunferencia máxima.*



24. 20.ª—*Si desde un punto* P (fi-4.ª) *tomado en un arco diagonal* AC *de un cuadrilátero esférico* ABCD (*) *se trazan dos arcos de círculo máximo, y consideramos los segmentos que el primer arco determina en los lados del ángulo* B, *y los que el segundo arco determina en los lados del ángulo* D, *el producto de los senos de cuatro segmentos, sin ningún extremo común, es igual al producto de los senos de los otros cuatro segmentos.*

Sean a y b los puntos en que el primer arco corta á los lados AB y BC; c y d los en que el segundo arco corta á CD y DA.

El teorema de Menelao [12], aplicado sucesivamente á los triángulos ABC y ADC, nos da

(*) Empleamos la palabra cuadrilátero en su acepción más lata, de manera que las dos diagonales podrán ser interiores, las dos exteriores, ó una interior y otra exterior.

$$\text{sen } a\text{A. sen } b\text{B. sen PC} = \text{sen } a\text{B. sen } b\text{C. sen PA}$$
$$\text{sen } c\text{C. sen } d\text{D. sen PA} = \text{sen } c\text{D. sen } d\text{A. sen PC},$$

de donde

$$\text{sen } a\text{A. sen } b\text{B. sen } c\text{C. sen } d\text{D} = \text{sen } a\text{B. sen } b\text{C. sen } c\text{D. sen } d\text{A} \quad [d].$$

25. 21.ª—Recíprocamente: *Si en los lados de un cuadrilátero esférico se marcan cuatro puntos* a, b, c, d, *tales que se verifique la relación* [d], *los arcos que unen* a *con* b *y* c *con* d *se cortan en un punto del diagonal* AC; *y los que unen* a *con* d *y* b *con* c *se cortan en un punto del diagonal* BD.

En efecto, la relación [*d*] puede escribirse así:

$$\frac{\text{sen } a\text{A}}{\text{sen } a\text{B}} : \frac{\text{sen } b\text{C}}{\text{sen } b\text{B}} = \frac{\text{sen } d\text{A}}{\text{sen } d\text{D}} : \frac{\text{sen } c\text{C}}{\text{sen } c\text{D}};$$

llamando P al punto en que el arco *ab* corta á la diagonal AC, será [12]

$$\frac{\text{sen } a\text{A}}{\text{sen } a\text{B}} : \frac{\text{sen } b\text{C}}{\text{sen } b\text{B}} = \frac{\text{sen PA}}{\text{sen PC}},$$

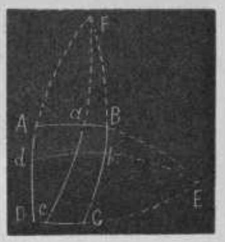
luego
$$\frac{\text{sen } d\text{A}}{\text{sen } d\text{D}} : \frac{\text{sen } c\text{C}}{\text{sen } c\text{D}} = \frac{\text{sen PA}}{\text{sen PC}},$$

lo que exige que el arco *cd* pase por P [13].

Lo mismo puede demostrarse la segunda parte.

26. 22.ª—*Si desde un punto tomado en el arco diagonal* AC *de un cuadrilátero esférico se trazan dos arcos, cortando el primero en* a *y* b *á los lados* AB *y* BC *y el segundo en* c *y* d *á los* CD *y* DA, *los arcos que unan* a *con* d *y* b *con* c *se cortan en un punto del otro arco diagonal* BD.

Es consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores.



27. 23.ª—*Si desde el punto de concurso* E (fig. 5.ª) *de dos lados opuestos* AB *y* CD *de un cuadrilátero esférico se traza un arco que corte á los otros dos lados, y se hace lo mismo desde el punto* F *en que concurren los* AD *y* BC, *los senos de los ocho segmentos que resultan satisfacen á la relación* [d].

Tenemos [4]

$$\frac{\text{sen } a\text{B}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen } c\text{C}}{\text{sen } c\text{D}} = \frac{\text{sen FB}}{\text{sen FA}} : \frac{\text{sen FC}}{\text{sen FD}}$$

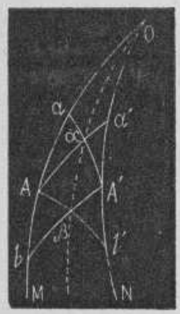
$$\frac{\text{sen } b\text{B}}{\text{sen } b\text{C}} : \frac{\text{sen } d\text{A}}{\text{sen } d\text{D}} = \frac{\text{sen EB}}{\text{sen EC}} : \frac{\text{sen EA}}{\text{sen ED}};$$

considerando los tres arcos concurrentes EA, ED y EF cortados por los transversales FC y FD, se ve que los segundos miembros de las anteriores igualdades son iguales, luego deberán serlo también los primeros: de la igualdad de éstos se deduce la relación [*d*].

28. 24.ª — En la misma hipótesis de la proposición anterior: *los arcos que unen* a *con* b *y* c *con* d *se cortan en un punto del diagonal* AC, *y los que unen* a *con* d *y* b *con* c *se cortan en el diagonal* BD.

29. 25.ª — *Cortando todos los lados de un polígono esférico por un arco de círculo máximo, éste determina en cada lado dos segmentos, y el producto de los senos de todos los segmentos sin extremidad común es igual al producto de los senos de todos los demás.*

Se demuestra como su análoga en los polígonos planos.



30. 26.ª — *Si en los lados de un ángulo esférico* O (fig. 6.ª) *marcamos los puntos* A y A', *y desde cada uno trazamos hasta el otro lado arcos* Aa' *y* A'a, Ab' *y* A'b.. *cortándose dos á dos en puntos* α, β... *de un arco que pase por* O, *y suponemos fijos los* Aa' *y* A'a, *tendremos*

$$\frac{\text{sen } ba}{\text{sen } bO} : \frac{\text{sen } b'a'}{\text{sen } b'O} = \textit{constante.}$$

En efecto, si atendemos al cuadrilátero O a α a' *y á los arcos* A'b *y* Ab', *trazados desde un punto* β *de la diagonal* Oα, *tendremos* [24]

$$\text{sen } ba . \text{ sen A}'\alpha . \text{ sen A}a' . \text{ sen } b'\text{O} . = \text{sen } b\text{O} . \text{ sen A}'a . \text{ sen A}\alpha . \text{ sen } b'a'$$

ó sea
$$\frac{\text{sen } ba}{\text{sen } b\text{O}} : \frac{\text{sen } b'a'}{\text{sen } b'\text{O}} = \frac{\text{sen A}'a}{\text{sen A}'\alpha} : \frac{\text{sen A}a'}{\text{sen A}\alpha} \qquad [e]$$

cuyo segundo miembro es contante.

31. 27.ª — *Si desde los puntos* A *y* A' *se trazan pares de arcos* Ab' *y* A'b, Ac' *y* A'c... *cuyas intersecciones* β, γ.. *estén en un arco que pase por* O, *la razón*

$$\frac{\text{sen } b\text{A}}{\text{sen } b\text{O}} : \frac{\text{sen } b'\text{A}'}{\text{sen } b'\text{O}}$$

es constante é igual á $-\dfrac{\text{sen } \alpha\text{A}}{\text{sen } \alpha\text{A}'}$, *llamando* α *al punto en que el arco* O$\beta\gamma$... *corta al que une los puntos* A *y* A'.

Toda vez que haciendo coincidir los arcos fijos Aa' y A'a de la proposición anterior, los numeradores A'a y Aa' del segundo miembre la relación [*e*] serán iguales y de signos contrarios.

32. 28.ª—Recíprocamente: *Si desde los puntos* A *y* A′ *se trazan pares de arcos, de manera que la razón*

$$\frac{\operatorname{sen} b\mathrm{A}}{\operatorname{sen} b\mathrm{O}} : \frac{\operatorname{sen} b'\mathrm{A}'}{\operatorname{sen} b'\mathrm{O}}$$

sea constante, las intersecciones β, γ... *de cada par de arcos están en otro arco que pasa por* O, *y que divide á* AA′ *en los segmentos tales que la razón de sus senos es igual y de signo contrario á dicha constante.*

33. 29.ª—*Si desde un punto* P (fig. 2.ª) *se trazan varios arcos, transversales* Paa′, Pbb′... *que corten á los lados del ángulo* O, *los arcos que unen los puntos de intersección* a *y* a′ *de cualquier arco transversal con los respectivamente opuestos* b′ *y* b, c′ *y* c... *de los demás, se cortan en puntos de una circunferencia máxima que pasa por* O.

Sabemos [10] que

$$\frac{\operatorname{sen} b\mathrm{A}}{\operatorname{sen} b\mathrm{O}} : \frac{\operatorname{sen} b'a'}{\operatorname{sen} b'\mathrm{O}} = \textit{constante},$$

luego [32] los puntos β, γ... están en una circunferencia máxima que pasa por O.

34. 3.ª—*Si desde dos puntos fijos* a *y* a′ (fig. 2.ª) *tomados en los lados del ángulo* O, *se trazan pares de arcos* ab′ *y* a′b, ac′ *y* a′c... *que se corten en otro pasando por* O, *los que unan* a *con* a′, b *con* b′... *concurrirán en un mismo punto* P. [31 y 11]

35. 31.ª—Teorema de Céva: *Dado un triángulo esférico* ABC, *si desde un punto de la superficie esférica se trazan arcos á los tres vértices, que encuentran á los lados opuestos en los puntos* a, b, c, *se verifica la relación*

$$\frac{\operatorname{sen} b\mathrm{C}}{\operatorname{sen} b\mathrm{C}} : \frac{\operatorname{sen} c\mathrm{B}}{\operatorname{sen} c\mathrm{A}} = -\frac{\operatorname{sen} a\mathrm{C}}{\operatorname{sen} a\mathrm{B}} \qquad [f]$$

Es la proposición del número 31, enunciada en otra forma.

36. 32.ª—Recíprocamente: *Si desde los vértices de un triángulo esférico se trazan arcos á los lados opuestos, de modo que se verifique la relación* [f], *los tres arcos concurrirán en un mismo punto* [32].

37. 33.ª—*Los arcos que partiendo de dos vértices de un triángulo esférico se cruzan en el arco que une el tercer vértice con el punto medio del lado opuesto, dividen á los otros dos lados en segmentos cuyos senos son proporcionales.*

Pues si a es el punto medio de BC, será $-\dfrac{\operatorname{sen} a\mathrm{C}}{\operatorname{sen} \mathrm{AB}} = 1$, luego

$$\frac{\text{sen } b\text{C}}{\text{sen } b\text{A}} = \frac{\text{sen } c\text{B}}{\text{sen } c\text{A}}.$$

Según esto, todos los arcos tales como el bc encontrarán al lado BC á 90° de su punto medio [15].

38. 34.ª—*Si desde un punto á 90° del medio de* BC *se trazan arcos que corten á los lados* BC *y* AC, *y se unen los puntos de intersección de cada arco transversal con los vértices opuestos, las intersecciones de cada par de arcos están en el que une el vértice* A *con el punto medio de* BC.

39. 35.ª—*Los arcos que unen los tres vértices de un triángulo esférico con los puntos medios de los lados opuestos concurren en un mismo punto.*

40. 36.ª—*Los arcos que unen dos vértices de un triángulo con los puntos marcados en los lados opuestos á 90° de sus medios, y el arco que une el tercer vértice con el medio del lado opuesto, concurren en un mismo punto.*

41. 37.ª—*Si desde dos puntos* A *y* A′, *tomados en los lados de un ángulo* O, *se trazan pares de arcos* Ab′ *y* A′b, Ac′ *y* A′c... *cuyas intersecciones* β, γ... *esten en otra arco que pase por* O, *la razón*

$$\frac{\text{sen } b\text{A}'\text{A}}{\text{sen } b\text{A}'\text{O}} : \frac{\text{sen } b'\text{AA}'}{\text{sen } b'\text{AO}}$$

es constante é igual á $-\dfrac{\text{sen } \alpha\text{OA}}{\text{sen } \alpha\text{OA}'}$, *siendo* α *el punto en que el arco* Oβγ... *encuentra al AA′.*

En efecto:

$$\frac{\text{sen } b\text{A}'\text{A}}{\text{sen } b\text{A}'\text{O}} = \frac{\text{sen } b\text{A}}{\text{sen } b\text{O}} : \frac{\text{sen A}'\text{A}}{\text{sen A}'\text{O}}$$

$$\frac{\text{sen } b'\text{AA}'}{\text{sen } b'\text{AO}} = \frac{\text{sen } b'\text{A}'}{\text{sen } b'\text{O}} : \frac{\text{sen AA}'}{\text{sen AO}},$$

de donde

$$\frac{\text{sen } b\text{A}'\text{A}}{\text{sen } b\text{A}'\text{O}} : \frac{\text{sen } b'\text{AA}'}{\text{sen } b'\text{AO}} = -\frac{\text{sen } \alpha\text{A}}{\text{sen } \alpha\text{A}'} : \frac{\text{sen OA}}{\text{sen OA}'} = -\frac{\text{sen } \alpha\text{OA}}{\text{sen } \alpha\text{OA}'}.$$

42. 38.ª — *Dado un triángulo esférico* ABC, *si desde un punto de la superficie esférica se trazan arcos á los tres vértices, que encuentran á los lados opuestos en los puntos* a, b, c, *se verifica la relación*

$$\frac{\text{sen } b\text{BC}}{\text{sen } b\text{BA}} : \frac{\text{sen } c\text{CB}}{\text{sen } c\text{CA}} = -\frac{\text{sen } a\text{AC}}{\text{sen } a\text{AB}} \qquad [f']$$

43. 39.ª — Recíprocamente: *Si la relación* [f′] *se verifica, los tres arcos* Aa, Bb, Cc, *concurren en un mismo punto.*

44. 40.ª — *Los arcos que partiendo de dos vértices de un triángulo esférico se cruzan en la bisectriz del tercero, dividen á los dos primeros arcos en segmentos cuyos senos son proporcionales.*

Pues si Aa es el arco bisector del ángulo A, será $-\dfrac{\operatorname{sen} a\mathrm{AC}}{\operatorname{sen} a\mathrm{AB}} = 1$,

luego $$\frac{\operatorname{sen} b\mathrm{BC}}{\operatorname{sen} b\mathrm{BA}} = \frac{\operatorname{sen} c\mathrm{CB}}{\operatorname{sen} c\mathrm{CA}}.$$

45. 41.ª — *Los tres arcos bisectores de los ángulos de un triángulo esférico concurren en un mismo punto.*

46. 42.ª — *Los arcos bisectores de dos ángulos externos de un triángulo interno, concurren en un mismo punto.*

NOTA CON MOTIVO DE LA CUESTIÓN 95

(Véase tomo II, página 344 y tomo III, página 109).

por **M. H. BROCARD**

Se ha dado un número de ocho cifras cuadrado, formado de dos números consecutivos p y $p+1$ de cuatro cifras.

Véanse dos ejemplos del sistema inverso, de dos números p y $p-1$, de cuatro cifras.

Véanse dos ejemplos del sistema inverso, de dos números p y $p-1$, de cuatro cifras:

8242 8241 cuadrado de 9079;
9802 9801 cuadrado de 9901

Por otra parte, se han indicado los dos cuadrados de diez cifras que forman dos grupos de cinco que representan dos números consecutivos:

13224 13225 cuadrado de 36365
40945 40946 cuadrado de 63636

BIBLIOGRAFÍA

American Journal of Mathematics, published under the Auspices of the Johns Hopkins University of Baltimore.—Se ha recibido en esta

Redacción el número 4 del tomo XV de esta notable publicación. Entre otros muy interesantes trabajos, se hallan contenidos en este tomo los siguientes:

Basset: On Toroidal Functions.—*Brown. E.:* The Elliptic Irregularities in the Lunar Teory, The elliptic Inequalities in the Lunar Theory.—*Cajori, Florian:* On the multiplication of semi-convergent Series. —*Cayley:* On Symmetric Functions and Siminvariants, Tables of Pure Reciprocants to the Weight 8, Note on the so-called Quotient G/H in the Theory of Groups.— *Cole, F. N.,* Simple Groups as far as Orden 660.— *Davis, Ellery:* Geometrical Illustration of Some Theorems in Number.—*Glover, J, W:* and *Cole* E. N, On Groups whose Orders are Products of Three prime factors.—*Holgate,* T. F. On Certain Ruled Surfaces of the Fourth Orders.—*Metzler,* W. H, On Certain Properties of Symmetric, Skew Symmetric and Orthogonal Matrices. —*Scott, Charlotte Angas.* The nature and Effect of Singularities of Plane Algebraic Curves.

Entre estos se hallan otros notables trabajos de los matemáticos Thompson, Young, etc.

Se han recibido, además:

Bulletin scientifique redigé, par M. Ernest Lebon. París.

Journal de Mathematiques élém. et spéciales publié sous la direction de M de Longchamps. Novembre 1893. París.

Mathesis publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. El último cuaderno publicado contiene una original memoria titulada *Essai de Géométrie Général,* par le colonel J. de Tilly,

Periodico di Matematica publicato per cura di Aurelio Lugli. Roma.

Bibliotheca mathematica, publié par Gustaf Eneström, Stockholm. El cuaderno 3.° contiene: Die Mathematik bei den Juden, von Moritz Steinschneider. —*Nota storica sulla variazione delle latitudini,* di Ottavio Zonotti Bianco. —*Un nouvo documento relativo alla logistica greco-egiziana di Gino Loria.—Recensionen.—Publications récentes.*

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. *F. Gomes Teixeira,* director de la Academia Politécnica de Oporto. El número 5 del tomo XI (1893) contiene: *Sur les séries de Fonctions,* par S. Pincherle.—*Sobre a addiçao e as differenciaes nas funçoes ellipticas,* por J. Pedro Teixeira.—*Sur les lignes géodésiques des paraboloides,* par R. Marcolongo.—*Bibliografia.*

LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

LOS CÍRCULOS DE TUCKER Y SUS CASOS PARTICULARES

POR M. EMILE VIGARIÉ

I. *Histórico y Bibliografía.*—Los círculos de Tucker han sido señalados por vez primera por M. Lemoine *(Asociation française* 1873) y hallados por M. Neuberg (*Mathesis* 1881). Han sido hallados de nuevo por Mr. R. Tucker (*Quaterly Journal* 1883) de los que ha presentado muchas propiedades, y por esta razón M. Neuberg ha propuesto (*Reprint Educational Times* 1885) llamarlos *círculos de Tucker*.

Estos círculos importantes han sido estudiados por muchos geómetras, y los trabajos á los que han dado origen son muy numerosos.

Véase la lista de las principales memorias que se han publicado referentes á los círculos de Tucker propiamente dichos, á sus casos particulares y á sus generalizaciones.

1 E. Lemoine.... Sur quelques propriétés d'un point remarquable du plan d'un triangle. (*Association française pour l'avancement des sciences*. Lyon. 1873, pp. 90-95).

2 Eutaris. .... Question proposée (*Journal de Vuibert*. 1877. p. 43).

3 E. Catalan....... Théorèmes et problèmes de Géométrie. 1 vol. 6me edition. París. 1879.

4 J. Neuberg..... Sur le Centre des Médianes antiparallèles. (*Mathesis*. 1881. pp. 153, 173, 185).

5 H. M. Taylor.. On a Six point circle connected with a triangle (*Messenger of Mathematics*. 1882. pp. 177-179).

6 R. C. Rowe..... Note on M. H. M. Taylor's Circle (*Messenger of Math*. 1883. p. 36).

7 R. Tucker....... Note on M. H. M. Taylor's six points Circle (*Messenger of Math*. 1883. pp. 181-182).

8 R. Tucker....... The triplicate-ratio-circle (*Proccedings of the London Mathematical Society*. 1883. pp. 316-321).

9 R. Tucker....... The triplicate ratio-circle. (*Quarterly Journal*. 1883 pp. 342-348).

10 H. M. Taylor... On the relations of the intersections of a circle with a triangle (*Proccedings Lond. Math. Society*. 1884. pp. 122).

11 R. Tucker....... On a group of circles. (*Quarterly Journal* 1884. pp. 57-59).

12 E. Lemoine.... Quelques proprietés des parallèles et des antiparallèles aux côtés d'un triangle (*Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1884. pp. 72-78).

13 R. Tucker....... Symmedian and T. R. circle (*Reprint of the Educationat Times*. 1884. pp. 26-28).

14 J. Neuberg..... Sur les cercles de Tucker. (*Reprint Educat. Times*. 1885. pp. 71-74).

15 J. Neuberg..... Sur les figures Semblablement variables. (*Proccedings of the London Math. Soc.* 1885. pp. 186-189).

16 E. Vigarié...... Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle d'après M. H. M. Taylor (*Journal de Longchamps*. 1886. pp. 106-109, 151-153).

17 E. Vigarié...... Propriètés générales des cercles de Tucker (*Journal de Longchamps*. 1885. pp. 195-198, 222-227).

18 E. Vigarié....... Sur la question 5 de M. Neuberg (*Journal de Longchamps*. 1886. pp. 180-181).

19 R. Tucker....... Geometrical Notes. Conjugate Tucker circles. (*Proceedings Lond. Math Soc.* 1886 p. 420-431).

20 E. Lemoine.... Quelques questions de rapportant à l'étude des antiparallèles aux côtés d'un triangle. (*Bulletin des Sciences Mathématiques*. 1886. pp. 107-128).

31 J. Neuberg..... Equation générale des cercles de Tucker. (*Journal de Math. Spéciales de Longchamps*. 1886. pp. 241-245).

22 T. C. Simmons An introduction of the recent geometry (Chapitre du *Companion of the weekly problems papers*. par M. J. J. Milne. 1 vol. 1888).

23 E. Lemoine.... Théorèmes divers sur les antiparallèles aux côtés d'un triangle (*Mathesis*. 1884. pp. 201-204).

24 E. Vigarié....... Sur le premier Cercle de Lemoine. (*Journal de Longchamps*. 1888. pp. 244-251).

25 R. F. Davis..... The recent geometry of triangle (*Association for the improvement of Geometrical Teaching*. 1888. pp. 35-46).

26 E. Vigarié...... Note sur la question 269. (*Journal de Longchamps*. 1888. pp. 115-116).

27 A. Emmerich. Die Brocardschen Gebilde. 1 vol. Berlin. 1891.

28 E. Lemoine..... Résultats et théorèmes divers concernant la Géométrie du triangle. (*Association française, Congrès de Pau*. 1892

I

Figuras semejantemente variables.

2. Dos figuras semejantes, semejantemente dispuestas y situadas en un mismo plano pueden hacerse homotéticas por una rotación alrededor de un punto S en su plano.

Supongamos conocido un punto S, y sean ABC....., A'B'C'..... las dos figuras semejantes tales, que:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=.....=k$$

Sobre los radios vectores SA, SB, SC,..... determinemos los puntos A″, B″, C″,..... tales que

$$\frac{A''C''}{AB}=\frac{B''C''}{BC}=.....=k$$

Las dos figuras ABC..., A″B″C″..., son homotéticas, y las rectas que unen dos puntos homólogos son paralelas, y están entre sí en la relación $1:k$.

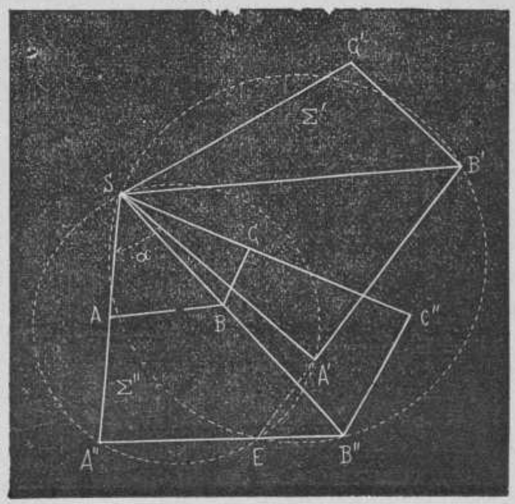


Fig. 1

Si se hace girar (fig. 1) el sistema A″B″C″... alrededor del punto S en un ángulo A'SA'$=\alpha$, llega á colocarse en A'B'C'... Los dos sistemas ABC..... y A'B'C'..... se corresponden punto por punto, los segmentos homólogos se hallan entre sí en la relación k y forman entre sí el ángulo α.

Recíprocamente: Si ABC....., A'B'C'..... gozan de esta propiedad, se puede hallar un punto S tal, que una rotación alrededor de este punto haga á los dos sistemas homotéticos. Este punto es la intersección de las dos circunferencias A'EA″ y B'EB″.

El punto S, que es su propio homólogo en las dos figuras, se llama *centro de semejanza ó punto doble.*

Podemos enunciar estos resultados bajo la forma siguiente:

1.° *Cuando una figura plana se mueve de una manera cualquiera en el plano permaneciendo semejante á sí misma, existe siempre en este plano un punto que, considerado como perteneciente á la figura móvil, queda fijo.*

2.° *Toda mutación de una figura semejantemente variable en su plano, es equivalente á una rotacion de la misma alrededor de un punto fijo del plano y á una deformación* (contracción ó dilatación) *simultánea de la figura, efectuada según la ley de semejanza.*

3. Acabamos de ver que, si por un punto A′ se traza una recta cualquiera A′B′, corta á su homóloga A″B″ en un punto E y forma con ella un ángulo igual al ángulo de rotación α. Luego:

Si se toman dos puntos homólogos cualesquiera en dos posiciones determinadas de una figura semejante variable en un plano, el lugar geométrico de los puntos de intersección respectivos de todas las rectas que pasan por uno de estos puntos, con las rectas homólogas que pasan por el segundo punto, será un círculo que pasa por los dos puntos dad s y por el centro de semejanza de las dos figuras.

4. Consideremos la recta A′A″ como una recta de la figura Σ'(A′B′C′...): Ella forma con A′C′ un ángulo igual á α (ángulo de rotación). Su homóloga en Σ''(A″B″C″...) debe, pues, formar tambien con A″C″ un ángulo igual á α. Es, pues, tangente en A″ á la circuferencia A″A′S. Luego:

El círculo A′A″S *del lugar geométrico precedente es tangente á la secta homóloga á la que une los dos puntos elejidos* A′ y A″

Este resultado puede enunciarse todavía como sigue:

Cuando una recta gira alrededor de un punto A′, su homólogo envuelve una circunferencia que pasa por el centro de semejanza, el punto A′ y el punto A″, homólogo de A′.

O todavía: *Dos rectas homólogas en dos posiciones diferentes de la figura móvil se cortan bajo un ángulo constante*

Se ve entonces inmediatamente que:

Las rectas que unen dos á dos los puntos homólogos tomados sobre dos rectas cualesquiera en dos posiciones de la figura variable, envuelven una parábola que es tangente á las dos rectas.

5. Supongamos que tres puntos de la figura móvil se hallan sujetos á describir rectas. Los tres puntos dados α, β, γ forman un triángulo $\alpha\beta\gamma$ inscripto en el triángulo ABC formado por las tres rectas trayectorias.

No hallamos, pues, en este caso, reducidos al estudio de un triángulo $\alpha\beta\gamma$ que se mueve en un triángulo fijo ABC permaneciendo semejante á sí mismo.

Las circunferencias $A\beta\gamma$, $B\alpha\gamma$ se cortan en un punto F tal, que

$$BF\gamma=\pi-A, \quad \alpha F\gamma=\pi-B$$

de donde $$\alpha F\beta=\pi-C$$

y la circunferencia $C\beta\alpha$ pasa igualmente por el punto F.

Como desde el punto F se ven siempre los lados de $\alpha\beta\gamma$ bajo ángulos constantes, este punto es siempre su propio homólogo con relación á $\alpha\beta\gamma$.

El punto F *es fijo con relación á* ABC. En efecto, porque en los cuadriláteros $B\alpha F\gamma$, $\alpha FC\beta$, se tiene:

$$FBC=F\gamma\alpha \quad FCB=F\beta\alpha$$

Es bueno observar que:

$$\angle BFC=\text{áng. }B\gamma\alpha+\text{áng. }CFA=\text{áng. }B\gamma\alpha+\text{áng. }C\beta\alpha$$
$$=2\pi-(B+C)-(\pi-a)=A+\alpha$$

Luego:

Desde el punto F se ven los lados de $\alpha\beta\gamma$ bajo los ángs. $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$
» » » F » » » » » ABC » » » $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma$

Se puede enunciar este resultado diciendo que:

Cuando un tríangulo móvil $\alpha\beta\gamma$ permanece semejante á sí mismo é inscrito en un triángulo fijo ABC, *existe un triángulo móvil que es fijo; este punto es aquél desde el cual se ven los lados de $\alpha\beta\gamma$ bajo ángulos suplementarios de los de* ABC, *y los lados de* ABC *bajo ángulos respectivamente iguales á las sumas de los ángulos correspondientes en los dos triángulos* (Neuberg) (*).

6. Observemos que:

$$\text{áng. }F\alpha C=\text{áng. }\alpha FB=\text{áng. }\alpha BF$$

ahora, en el cuadrilátero inscriptible $B\alpha F\gamma$.

$$\text{áng. }\alpha FB+\text{áng. }\alpha BF=\text{áng. }\alpha\gamma B+\text{áng. }\alpha\gamma F=\text{áng. }F\gamma B$$

luego $$\text{áng. }F\gamma B=\text{áng. }F\alpha C=\text{áng. }F\beta A$$

La generación del triángulo $\alpha\beta\gamma$ es ahora más fácil. Para tener una posición cualquiera de este triángulo, basta hacer girar el haz $F(\alpha\beta\gamma)$ que tiene por vértice el punto F y por rayos $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$, alrededor del punto F en un ángulo cualquiera, y tomar las intersecciones de los rayos con los lados de ABC.

(*) La notación (*Neuberg*. 15) indica que la proposición citada ha sido enunciada en la Memoria que figura con el número 15 en la lista precedentementedada, y que es debida á M. Neuberg. Emplearemos frecuentemente esta notación en lo sucesivo. E.V.

El triángulo podar $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ del punto F es, pues, una posición particular del triángulo $\alpha\beta\gamma$; corresponde al mínimum del área de $\alpha\beta\gamma$.

7. Sea ω_1 un punto de la figura $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ y ω su homólogo (fig. 2) en $\alpha\beta\gamma$. Los triángulos $F\alpha_1\alpha$, $F\omega_1\omega$ son semejantes, luego el punto ω describe una recta perpendicular á $F\omega_1$. Por consiguiente:

Un punto cualquiera de la figura móvil describe una recta perpendicular á la recta que une el punto doble al punto homólogo del punto dado M *el triángulo mínimum* (Neuberg, 15).

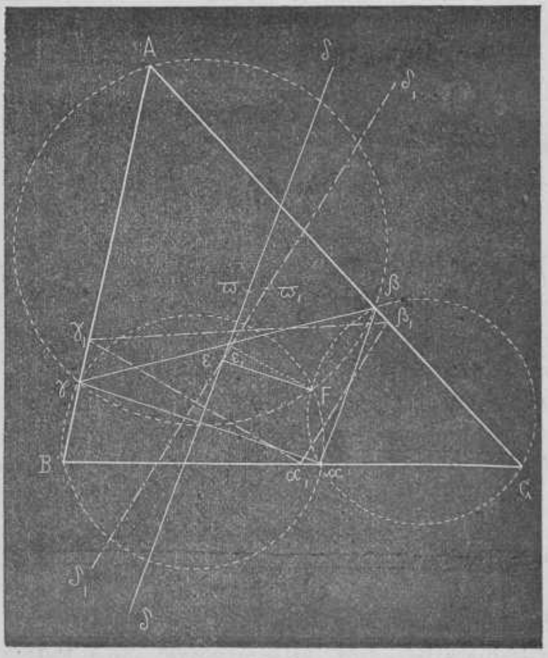


Fig. 2.

Sea δ (fig. 2) una recta cualquiera de la figura móvil y δ_1 su homóloga en el triángulo mínimum $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Desde F tracemos una recta $F\varepsilon_1$ perpendicular á δ_1. Según lo que precede ε_1 describe δ_1. Cuando ε_1 viens á ε, δ_1 viene á δ, y δ es perpendicular á FE; por consiguiente δ_1 es la tangente en el vértice de una parábola de foco F. Luego:

Una recta cualquiera de la figura móvil envuelve una parábola que tiene por foco el punto doble y cuya tangente en el vértice es la posición correspondiente de la recta dada en el triángulo mínimum. En particular; los lados $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ del triángulo móvil $\alpha\beta\gamma$ envuelven tres parábolas *que tocan á dos lados del triángulo* ABC *y tienen por foco común el punto* F. *Los vértices de estas curvas son las proyecciones del punto* F *sobre los lados del triángulo mínimum* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ (Neuberg. 15).

8. Consideremos (fig. 3) una circunferencia de la figura móvil; sea O su centro y AA′ su diámetro que pasa por F. Sean A_1, O_1, A'_1 los homólogos de estos puntos en el triángulo mínimum $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Cuando la circunferencia móvil se mueva, el punto O describirá la recta OO_1 perpendicular á O_1F; igualmente los puntos A, A′ describirán las rectas AA_1, $A'A'_1$ perpendiculares á O_1F. La investigación de la envolvente de la circunferencia O se reduce, pues, á la cuestión siguiente:

Sobre las rectas trazadas por un punto fijo F y comprendidas en-

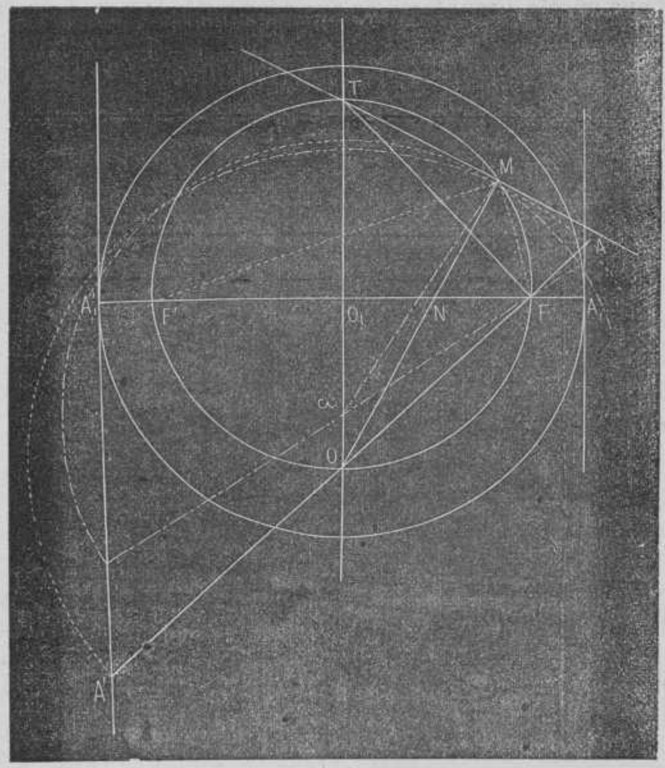


Fig. 3.

tre dos paralelas fijas AA_1, $A'A'_1$ como diámetros se describen circunferencias: ¿cuál es la envolvente de estas curvas?

Si se consideran dos posiciones infinitamenfe próximas de la circunferencia móvil, que O y ω sean sus centros y M uno de los puntos de intersección, los radios MO y Mω son proporcionales á FO y Fω; se tiene, pues:

$$\frac{MO}{M\omega} = \frac{FO}{F\omega}$$

es decir, que las bisectrices interiores y esteriores de los ángulos OMω y OFω encuentran á OO_1 en los dos mismos puntos. Pasando al límite, se ve que la tangente en M, punto en que la circunferencia móvil O toca á su envolvente y la perpendicular en F á FO, encuentran á OO en un mismo punto T; ó de otro modo, T, M, F, O se hallan en una misma circunferencia que pasa tamhién por el simético F′ de F con relación á O_1. Los ángulos OMF y OMF′ tienen, pues, la misma medida; por consiguiente la tangente á la envolvente forma ángulos iguales con las rectas MF y MF′. *La envolvente de la circunferencia móvil es, pues, una cónica* (Neuberg 15).

Sea N el punto en que M corta á O_1F, se tiene:

$$\frac{NF'}{MF'} = \frac{NF}{MF} = \frac{NF'+NF}{MF+MF'} \quad \frac{FF'}{MF+MF'}$$

pero los triángulos semejantes OMF y NF′M dan

$$\frac{NF'}{MF'} = \frac{OF}{OM} = \frac{OF}{OA} = \frac{O_1F}{O_1A_1} = \frac{FF'}{A_1A_1'}$$

de donde $$MF + MF' = A_1A_1'$$

Luego: *La envolvente de una circunferencia de la figura móvil es una elipse inscripta al triángulo formado por las tres rectas fijas y cuyo punto doble es un foco. El eje mayor de esta elipse es igual al diámetro de la circunferencia mínimum* (Neuberg. 15).

Observaciones.— 1.° El punto F′, segundo foco de la elipse, es el punto inverso (conjugado isogonal de F).

2.° El círculo α, β, γ encuentra á los lados de ABC en tres nuevos puntos α_1', β_1', γ_1' que son las proyecciones de F′ sobre los lados de ABC.

(Se continuará).

ÍNDICE DEL TOMO III

Articulos bibliográficos.

Articulos y Memorias.

Filosofia y Pedagogia matemática.

Notas matemáticas.

Anuncios bibliográficos.

Cuestiones propuestas.

De la 99 hasta la 155 inclusives.

Variedades.

Cuestiones resueltas.

Las 25, 32, 35, 37, 53, 58, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 73, 75, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 84, 86, 87, 91, 93, 94, 101, 104, 106, 109, 110, 111, 112, 118, 119, 121 y 125, á cuyas soluciones han contribuido los Sres Bozal, Brocard, Caro, Gillet, Jiménez Rueda, Lemoine, Luzón, Mackay Monteverde, Pirondini, Retali, Varela, Vivanti, Schiappa Monteiro y Sollertinsky.

ERRATAS

Págs.	Líneas	Dice	Debe decir
10	11	imperceptible	perceptible
31	1	tildado	atildado
40	4	U_n	Vn
»	6	U	V
»	12	300	3000
»	26	$0^m,1$ y $0,m^201$	$0^m,1$ y $0,01m^2$
63	30	*Litus*	*Situs*
66	8	B y Ba	β y β_a
70	26	$\sqrt{yz}$	$2\sqrt{yz}$
71	2	triángulo	triángulo rectángulo
»	16	a'To'C y a'T'oC'	T á C y T' á C'
72	7	la ecuación	e cuación alguna
112	31	rectángulo	equilátero
145	20	$i^2=1$	$i^2=-1$
»	26	$A\frac{\pi}{2}$	$A^{\frac{\pi}{2}}$
168	12	$-$	$+$
191	penúltima	$a<1$	$x<1$
265	20 y 23	$\sqrt{r^2x^4-x^2}$	$\sqrt{r^2x^4}-x^2$
272	14	PN	PM
»	18	exteriores	interiores
294	19	$(n-1)^{n-2}$	$(n-1)b^{n-2}$
»	21	B_2	A_2
295	6	*Vecchio*	(N. C. M.) (*Vecchio*)
297	18	en un	en un punto
299	10	lado	haz
302	34	*armónica*	*anarmónica*
»	última	*armónica*	*anarmónica*

Precio de cada tomo 10 pesetas.

El primer tomo está agotado.