El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO
DE
GEOMETRÍA ANALÍTICA
en la
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TOMO II.-AÑO 1892

ZARAGOZA
Imprenta de C. ARIÑO, Coso, 100, bajos
1892

P. Denonito

Año II Zaragoza 15 de Enero de 1892 Núm. 13

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

A NUESTROS LECTORES

Hace un año nos propusimos fundar un periódico que, destinado exclusivamente á la ciencia matemática, fuera un eco fiel, un transmisor de los descubrimientos más recientes, de las teorías más notables, tanto de las que tienen su origen y desarrollo en la época actual, como de otras de antigüedad más ó menos remota, pero cuyas ideas ó principios generadores se enlazan con los modernos, ó bien por sí constituyen el núcleo sobre que se ha acrecentado el admirable organismo de esta ciencia, cuyos progresos hoy dan la medida del grado de cultura y poder de las naciones, siendo como el barómetro que señala el nivel intelectual de las mismas, la presión que cada una determina en la combinación de energías que producen las resultantes de la vida social contemporánea.

La realización de nuestro propósito ofrecía sérias dificultades. Por un fenómeno cuya explicación no es de este lugar, nos encontramos actualmente en España, que tuvo sus épocas de iniciativas y éxitos brillantes merced á sus preclaros ingénios, con un acentuado indiferentismo por cierto género de estudios é investigaciones que se imponen en la vida intelectual moderna; y uno de estos ha sido la Matemática, habiéndonos limitado á seguir, en medio de cierta pasividad, aquéllo más indispensable, de más inmediatas aplicaciones para nuestras necesidades del momento, sin comprender, que sobre lo inmediatamente útil se encuentra á una considerable altura, lo ideal que forma como un ambiente donde se desarrollan nuevas energías, fuentes de muchísimas otras aplicaciones, no siempre inmediatas, pero que encierran en estado potencial inmensidad de efectos útiles para el porvenir.

Apesar de este indiferentismo con que nos proponíamos luchar, y que sabíamos había de ser una rémora para la realización de nuestros propósitos, nuestra constancia y nuestra fé en lo elevado de la empresa que acometíamos han tenido un éxito que ha superado á nuestras esperanzas, pues nunca faltan almas nobles, espíritus generosos que se asocian á la realización de los grandes fines, y con este motivo tenemos ante todo que manifestar nuestra profunda gratitud hacia los distinguidos colaboradores nacionales y extranjeros, cuyos nombres han honrado nuestro modesto periódico y cuyos notables escritos han contribuido á darle interés y vida durante el primer año de su existencia.

No necesitamos exponer nombres propios ni los títulos de las cuestiones que se han tratado durante el año 1891, pues consignados se hallan en el índice de materias, y aún los hemos reproducido en las páginas 2 y 3 de la cubierta de este primer número. Unicamente vamos á ofrecer á la consideración del lector el resumen de lo que contiene, de la idea predominante que lleva impresa el primer tomo, y que será precedente para lo que ha de constituir nuestro programa para el año 1892.

Creimos lo más apropósito para nuestros fines de propaganda el ofrecer un cuadro general del desenvolvimiento matemático contemporáneo, sin olvidar las doctrinas fundamentales que establecieron los grandes maestros, los creadores de la ciencia en épocas anteriores; y si en esto último no hemos insistido lo que deseáramos, la causa de ello ha sido la atención que debíamos prestar á las múltiples direcciones seguidas por los investigadores actuales en los espaciosos horizontes que ofrece la Matemática á las inteligencias desde los más diversos puntos de vista.

Nuestro estudio histórico sobre la evolución de la Geometría proyectiva prepara para este año una reseña de los brillantes resultados que han seguido en esta rama geométrica á los trabajos de Monge y Poncelet. Los varios trabajos publicados sobre la Geometría del triángulo, en que insistiremos, despertarán en la juventud la afición á las investigaciones geométricas, constituyendo ese encadenamiento continuado de figuras un objeto agradable, un atractivo que ponga en ejercicio continuado la imaginación, y que despierta de una manera insensible la aptitud para resolver los más variados y difíciles problemas, cuando se procede por la graduación lenta que sigue esta Geometría, en cierto modo análoga por sus efectos á aquella geometría que adivinó Chasles en los porismas de Euclides, que debió formar el arsenal en que los geómetras griegos hallaran recursos para resolver problemas y para inventar nuevas proposiciones. El plano del triángulo está matizado por infinidad de puntos ó líneas notables por sus propiedades y por sus relaciones sencillas y simétricas que los refieren á aquel elemento fundamental y contienen en sí la clave que lleva á resolver innumerables problemas, dependientes de tales propiedades, siendo como centros luminosos que guian á la inteligencia directa y fácilmente al objeto de sus investigaciones en este arte que es complemento de la teoría.

Los más importantes resultados de esta Geometría, tanto en el orden lógico como en el orden histórico, serán objeto de algunos escritos y memorias que se publicarán durante el año entrante, en el Progreso Matemático.

Hay otras investigaciones de carácter filosófico que hoy atraen la atencion de los aficionados á la ciencia matemática y que van ocupando un lugar en las obras de enseñanza, como son las teorías del Algebra de la lógica, el simbolismo del cálculo moderno, y aun otras lucubraciones superiores que extienden las ramas de dicha ciencia y de las cuales es preciso dar algunas noticias, señalar siquiera las líneas generales, para que el lector de El Progreso Matematico pueda encaminarse á adquirir en las obras más adecuadas estos varios conocimientos; á este fin se atenderá en la sección bibliográfica.

No se omitirá el publicar algunos artículos que tengan por objeto fijar la atención del lector sobre algunos puntos concretos de la matemática, ni tampoco se dejará de tratar la ciencia desde el punto de vista pedagógico, porque es necesario destruir muchos errores, arraigadas preocupaciones respecto al profesorado en esta ciencia, que tiene más exigencias que otras muchas, por cuanto constituye una gimnasia intelectual, cuyos resultados deben atemperarse con los preceptos de la lógica y de la psicología.

Por último, siendo muy conveniente que al precepto lógico, que á la teoría pedagógica acompañe la realización en el dominio de la práctica, se estimulará el ejercicio intelectual de la juventud con colecciones graduales de problemas, se ofrecerán otros de superior dificultad con objeto de llamar la atención de los profesores, de demandar el concurso de su ilustración para que sus luminosas observaciones sobre la resolución y la discusión de tal ó cual problema contribuyan á fomentar la afición hácia estos ejercicios intelectuales que caben dentro de una extensa escala, tanto, que si en los primeros peldaños solo pueden servir para ejercitar los débiles esfuerzos del alumno de segunda enseñanza, del aspirante á ingresar en las Academias ó Escuelas especiales, en los superiores pueden ser digno estímulo para que los profesores, los sabios, los investigadores de alto renombre contribuyan á elevar nuestro nivel científico con sus enseñanzas y su ejemplo.

Es un hecho que se observa en todas las naciones donde se cultivan con éxito las ciencias matemáticas, que lo mismo los alumnos que los sabios de nombradía, que las celebridades universalmente reconocidas, intervienen según el grado de sus fuerzas en este palenque de la inteligencia; y al lado de la firma de un alumno que venció algunas dificultades adecuadas á sus aptitudes, aparece la solución dada por uno de los maestros de la ciencia á cuestiones más capitales ó sus acertadas observaciones á otras, y este es el fin que deseamos obtener durante el segundo año de publicación de El Progreso Matemático, pues no es suficiente que los profesores en los diferentes centros de enseñanza consuman todo su esfuerzo en disertaciones teóricas, en trasmitir preceptos, reglas generales, encadenamientos de teoremas, cuando se impone con necesidad imperiosa el despertar las fuerzas intelectuales de los alumnos de hoy, destinados á ser los maestros de mañana, con ejercicios prácticos, el excitar su actividad intelectual para habituarlos á saber vencer dificultades y caminar con iniciativa propia.

Estas consideraciones nos llevan á terminar con una *súplica que dirigimos á los ilustrados colaboradores que han honrado con su nombre y con sus escritos á* El Progreso Matematico *y han contribuido á que terminara felizmente el primer año de su existencia, á los profesores de todos los Centros de enseñanza matemática de España, á todos los amantes de esta ciencia*, con objeto de que nos favorezcan con cuantas cuestiones, problemas ó teoremas crean útiles para aumentar la colección qne durante el año 1892 se ofrecerá á los lectores. Así mismo les agradeceríamos que no sólo invitaran á sus discípulos más aventajados á resolver las cuestiones que juzgaran proporcionadas á sus fuerzas, sino que ellos mismos concurrieran á la realización de nuestros propósitos ofreciéndonos algunas soluciones que tuvieran á bien remitirnos por juzgarlas interesantes ú originales, ó ya porque desde algunos puntos de vista pudieran contribuir al progreso de lasciencias matemáticas ó al bien de la enseñanza, en la seguridad de que hallarán la recompensa á sus nobles esfuerzos en la satisfacción que les produzca el haber contribuido á elevar el nivel científico de su patria, obra á la cual debemos concurrir todos los que nos interesamos por su prosperidad en la medida de nuestras fuerzas y en la esfera de acción en la que cada uno se mueve.

Z. G. de Galdeano

NOTA ACERCA DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA SOBRE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

POR D. VENTURA REYES PRÓSPER

Catedrático en el Instituto de Teruel

Uno de los mayores progresos que los Monge, Poncelet, Steiner, Staudt y tantos otros ilustres geómetras, han hecho experimentar en este siglo á la Geometría, es no ya solo el descubrimiento de nuevas verdades, sino la simplificación de los métodos geométricos, que ha hecho asequibles á personas de escasa instrucción matemática, teorías antes difíciles y que exigían para aprenderse un extenso caudal de conocimientos. Así, que demostraciones á la vez rigurosas, elegantes y sencillas, han ido sustituyendo á otras menos directas y plagadas de larguísimas fórmulas, innecesarias muchas veces, dado lo trivial del asunto.

Dos métodos hay, dice un eminente geómetra francés, para el adelanto de la ciencia: consiste el uno en descubrir nuevas verdades, y el otro en facilitar cada vez más el acceso á las ya descubiertas: si algún medio hubiese de hacerla retroceder, este consistiría en suprimir verdades conocidas ó en embrollar y hacer dificultosa su enseñanza.

Quien lea las colecciones matemáticas de Pappus, las obras de Chasles, contemporáneo maestro, puede observar con facilidad, como á menudo, demostraciones largas, penosas y fundadas en relaciones métricas, pueden sustituirse con grandísima ventaja por otras que Cristian Von Staudt emplea en su áureo libro *Die Geometrie der Lage.*

Ciertamente, que al matemático de profesión, le es indispensable de todo punto el poseer á la vez los métodos algébricos y los sintéticos, más no lo es menos que también pertenece á la ciencia el deslindar unas teorías de otras, si hay determinada independencia entre ellas. De este modo la disciplina que menos postulados necesita, viene á tener prelación sobre las otras. Aparte de que, tratar doctrinas que son consecuencia inmediata y rigurosa de proposiciones elementales, mediante poderosos instrumentos analíticos, es asemejarse á aquel buen hombre que pedía prestada su maza á Hércules tebano y á Zeus olímpico sus rayos, para acabar con los insectos que le molestaban. Además, al que solo busca verdades para aplicarlas enseguida á una profesión determinada, lo que le importa es tener un camino breve y seguro de llegar á ellas, y los nuevos procedimientos son como Hankel dice *la vía real* que Ptolomeo pedía á Euclides.

La obra de separación y simplificación, ha sido recientemente continuada por un sabio profesor alemán, el Sr. Pasch de la Universidad de Giessen (1) quien siguiendo las trazas del esclarecido Félix Klein, ha puesto en claro de qué modo la geometría de posición ó proyectiva, no tan solo es por completo independiente de consideraciones métricas, según Staudt ya probó, sino que también puede en ella prescindirse absolutamente de toda hipótesis sobre paralelismo. No necesitamos pues saber cual es el lugar de los puntos en el infinito, sobre un plano ó en el espacio; ni aun siquiera ocuparnos de los puntos de dicho lugar. ¡Y que simplicidad y rigor tan admirables los de sus razonamientos! Una persona de escasa cultura científica, podría comprender la obra de Pasch. Quizás no habría inconveniente de introducirla en la enseñanza secundaria.

Como me he ocupado de este asunto en dos notas publicadas en los *Mathematische annalen* que dirige el eminente Klein, voy á exponer aquí algunas consideracionas adicionales referentes á la geometría proyectiva sobre la superficie esférica.

No conozco ninguna obra que se ocupe exclusivamente de esta parte de la Geometría (2). El ilustre Gudemann consagra parte de su bellísima obra *Lehrbuch der niederen Spärik* á la exposición de estas teorías, más como su desarrollo lo funda en fórmulas trigonométricas, es penoso y árido el camino seguido. Se puede poner de todos modos en evidencia, que los resultados obtenidos allí, son independientes de la teoría de las paralelas, dado que hoy sabemos la independencia establecida desde tiempos de Bolyai y Lobachefski (3) entre la Trigonometría esférica y el postulado Euclídeo.

Jacobo Steiner, uno de los mayores génios geométricos que hayan nunca existido, observa á propósito de nuestra cuestión (Jacobo Steiner's Werke I Band, p.ª 323, Zweite Anmerkung): «....... *Como se vé, no encierran nada nuevo las consideraciones sobre la superficie esférica, sino que son una limitación particular de las consideraciones refentes al manojo de rayos. Las investigaciones sobre la superficie esférica, tiene la importancia de permitir una vista de conjunto sobre una superficie.....*» Hallamos, pues, que como aquí se observa, para establecer las proposiciones referentes á la Geometría proyectiva sobre la esfera, basta fundar primero las correspondientes á las figuras radiadas ó céntricas

(1) Véase su hermosísima obra: «Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig».

(2) La Geometría proyectiva sobre el plano (prescindiendo de la Geometría del espacio) forma el objeto de una buena obra: *Die proyection in-der Ebene*, de Weissenborn.

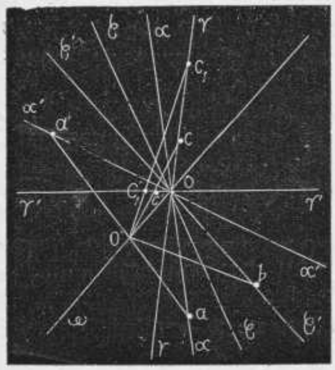
(3) Así debemos escribir y leer nosotros el nombre de esta geómetra, que los franceses escriben *Lobatchewsky*.

como Pasch las llama, y luego cortar la figura en cuestión por una esfera cuyo centro coincida con el del manojo (1).

Ahora bien, asi como toda la geometría proyectiva del plano se deduce de la proposición referente á diez rectas, conocida vulgarmente por Teorema de Desargues, del mismo modo la de las figuras radiadas es consecuencia del teorema correspondiente al anterior y relativo á diez planos que desde un punto común proyectan el mencionado sistema de rectas.

Queda reducida pues, la cuestión á demostrar este teorema. Yo lo demostré en 1887, independientemente de ideas métricas y de consideraciones referentes al infinito.

Mi demostración pareció al Sr. Pasch la más sencilla posible (...Auf denkbar einfachste Art..., Pasch in litt). Voy á reproducirla aquí:



Sean $o\alpha$, $o\alpha'$
$o\beta$, $o\beta'$
$o\gamma$, $o\gamma'$

tres pares de rectas, estando cada par situado en un mismo plano con la recta $o\omega$. Supongo que las rectas $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$, lo mismo que las $o\alpha'$, $o\beta'$, $o\gamma'$ no caen en un mismo plano. Probaremos que las rectas de intersección de los planos determinados por $o\alpha, o\beta$ y $o\alpha'$, $o\beta'$; $o\alpha, o\gamma$ y $a\alpha'$, $o\gamma'$, $o\beta, o\gamma$ y $o\beta, o\gamma'$, caen las tres sobre un mismo plano.

Tomemos en efecto
sobre $o\alpha$ el punto a,
sobre $o\alpha'$ el punto a'

de tal modo que la recta aa' corte á la $o\omega$ en o', de manera que los puntos o', a y a' estén dispuestos en el orden $ao'a'$ (lo que siempre es posible).

Por el punto o' tracemos una recta tal que cortando á $o\beta$ y $o\beta'$ en b y b', los puntos o', b y b' estén arreglados en el orden $o'bb'$ (lo que bien es siempre factible).

Finalmente, tracemos por o' una recta tal que cortando á $o\gamma$ y $o\gamma'$ en c y c', estén dispuestos los puntos o', c, c' en el orden $o'c'c$ (lo que podemos siempre hacer).

Observemos que siempre podemos suponer que las rectas $ao'a'$, $o'bb'$ y $o'cc'$ no estén sobre un mismo plano (porque si cayesen en uno

(1) *Strahlbüschel.*

determinado, podríamos trazar por el punto o' una recta nueva $o'c_1'c$ que sustituiríamos á la $o'c'c$, empleando las $ao'a'$, $o'bb'$ y $o'c'_1c$).

Entonces las rectas

ab y $a'b'$ se cortarán forzosamente en C,
bc y $b'c'$. . . . . en A,
ac y $a'c'$ . . . . en B,

y según la situación perspectiva de los triángulos abc y $a'b'c'$ (que no caen sobre un mismo plano) los puntos A, B y C estarán en una misma recta y las rectas oA, oB, oC caerán sobre un mismo plano, y como estas rectas son las intersecciones de que hablamos en el enunciado, esto demuestra el teorema.

Resumen de lo espuesto:

La esfera, superficie que tiene en campo finito sus puntos, no exige consideraciones de puntos en el infinito para establecer su geometría proyectiva, tampoco exige relaciones métricas y, por último, no hace falta para ello mas que echar mano de las más elementales proposiciones referentes á rectas y planos (1).

Madrid Diciembre 1891.

LE CALCUL DES SÉRIES CONVERGENTES

PAR M. G. DE LONGCHAMPS
professeur au Lycée Saint Louis

I. Lorqu' une série convergente

$$U = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots,$$

n'est pas sommatoire, le calcul de cette série conduit au problème suivant: *Combien faut-il prendre de termes pour avoir* U *avec une approximation determinée* $\frac{1}{\alpha}$?

Il faut, pour répondre à cette question, résoudre l'inégalité

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots < \frac{1}{\alpha}.$$

Si l'on pose

$$\varphi(n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

(1) Para no hacer confusa la figura, se han suprimido en ella algunas líneas y los puntos A, B, C.

et si l'on détermine une fonction de n, $\psi(n)$, telle que

$$\varphi(n) < \psi(n) < \frac{1}{\alpha},$$

la valeur de n qui résout l'inégalité

$$\psi(n) < \frac{1}{\alpha}, \text{ donnera } \varphi(n) < \frac{1}{\alpha};$$

par conséquent, pour cette valeur de n et *a fortiori* pour toutes les valeurs supérieures, la quantité

$$u = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$$

représente la valeur de U, avec l' approximation supposée.

En faisant pour $\psi(n)$ un choix qui permette une résolution simple et rapide de l' inégalité

$$\psi(n) < \frac{1}{\alpha},$$

le problême en question se trouvera donc résolu.

Dans certains cas (1), on se borne à remplacer les termes u_{n+1}, u_{n+2}..... par ceux d'une progression géométrique décroissante V_{n+1}, V_{n+2},..... tels que l'on ait:

$$V_{n+1} > u_{n+1}, \qquad V_{n+2} > u_{n+2}, \ldots\ldots$$

Alors, $\psi(n)$ s'obtient par la sommation de cette progression géométrique.

Dans d'autres circomstances, la détermination de $\psi(n)$ peut offrir un peu plus de difficulté. Nons allons en donner ici quelques exemples.

2. Considérons la série:

$$U = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots.$$

qui est convergente, en supposant $p > 1$.

Nous nous proposons d'abord le calcul de cette série avec l'approximation $\frac{1}{\alpha}$.

(1) Voyez notre Algèbre 2.ª édition, pp. 702 et 704.

Le tableau des inégalités:

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^{p-1}},\quad \frac{1}{4^p}+\ldots.+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{(2^{p-1})^2},$$

. . . .

$$\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\ldots.+\frac{1}{(2^n-1)^p}<\frac{1}{(2^{p-1})^{n-1}},$$

tableau classique, au moyen du quel on établit la convergence de la série U, prouve que, en s'arrétant au terme u_{2^n-1}, la partie négligée $\varphi(n)$ est inférieure à

$$\frac{1}{(2^{p-1})^n}+\frac{1}{(2^{p-1})^{n+1}}+\ldots..$$

Posons donc

$$\psi(n)=\frac{1}{(2^{p-1})^n}+\frac{1}{(2^{p-1})^{n+1}}+\ldots..$$

ou

$$\psi(n)=\frac{\dfrac{1}{(2^{p-1})^n}}{1-\dfrac{1}{2^{p-1}}},$$

ou encore,

$$\psi(n)=\frac{1}{(2^{p-1}-1)\,2^{(p-1)(n-1)}},$$

Alors, on peut énoncer la proposition suivante:

Pour calculer la série

$$U=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots.\qquad (p>1)$$

avec une approximation donnée $\frac{1}{\alpha}$, *il suffit de prendre, dans la série, un nombre* $2^{n'}-1$ *de termes; n' vérifiant l'inégalité.*

$$(2^{p-1}-1)\,2^{(p-1)(n'-1)}>\alpha \qquad (1)$$

3. Remarque. On observera que le premier terme négligé, dans U, a un indice égal à $2^{n'}$. Si l'on a pris, dans U, un nombre N de termes, N étant quelconque, pour avoir la valeur de l'approximation correspondante il suffira de chercher les deux nombres $2^{n'}$, $2^{n'+1}$ entre lesquels N est compris. Alors, l'erreur commise en s'arrétant à N est plus faible que celle qui correspond au terme de rang $2^{n'+1}$; or, celle-ci se calcule comme nous venons de le voir.

4. On peut appliquer le résultat précédent à de nombreuses séries. Nous montrerons par quelques exemples, comment on doit faire cette application.

1.° *Calculer*, à 0,1 *près, la série*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots.+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Dans cet exemple, on a $p=2$. L'inégalité (1) devient

$$2^{n'-1}>10.$$

Elle est vérifiée pour $n'=5$. Le dernier terme qu'il faudra prendre est donc

$$\frac{1}{(2^5-1)^2} \text{ ou } \frac{1}{31^2}.$$

Ainsi, il y a certitude, en prenant 31 termes, que la partie négligée est plus faible que $\frac{1}{10}$.

2.° *Calculer* à 0,01 *près la valeur de la série*

$$\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{2.3^2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)^2}+\ldots..$$

Soit $\frac{1}{n(n+1)^2}$ le dernier terme conservé.

La suite

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)^2}+\ldots.$$

sera plus faible que

$$\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots.$$

Résolvons donc l'inégalité (1), en supposant $p=3$, $\alpha=100$. Elle devient

$$3.4^{n'-1}>100,$$

qui est verifiée pour $n'=4$. Le nombre des termes correspondant est $2^4-1=15$.

3.º Proposons nous encore de calculer

$$\frac{1}{2.3^2.4^3}+\frac{2}{3.4^2.5^3}+\ldots\ldots+\frac{n}{(n+1)(n+2)^2(n+3)^3}+\ldots\ldots$$

à 0,001 près.

En prenant les n premiers termes, la partie négligée

$$\frac{n+1}{(n+2)(n+3)^2(n+4)^3}+\ldots.$$

est, manifestement, plus faible que

$$\frac{1}{(n+3)^5}+\ldots.$$

Reportons nous à l'inégalité (1) et supposons $p=5$, $\alpha=1000$; nous aurons

$$15.\,2^{4(n'-1)}>1000, \quad \text{ou} \quad 3.\,2^{4n'-7}>25;$$

inégalité vérifiée pour $n'=3$. Il faudra prendre $2^3-1=7$ termes.

4.º En prenant, comme dernier exemple, la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\ldots,$$

qu'on se propose de calculer à 0, 1 près, on devra faire $p=\frac{3}{2}$ dans l'inégalité (1).

Il reste à résoudre alors l'inégalité

$$(\sqrt{2}-1)\,2^{\frac{n'-1}{2}}>\alpha$$

Pour $\alpha=10$, on doit déterminer n' par la condition

$$2^{\frac{n'-1}{2}}>10\,(\sqrt{2}+1).$$

En remplaçant $\sqrt{2}$ par 1, 5, il suffira de vérifier l'inégalité

$$2^{\frac{n'-1}{2}}>25$$

Celle-ci a lieu pour $n'\geqq 11$. Ainsi, ou devra prendre $2^{11}-1=2047$ termes. La série est lentement convergente.

5. Revenant à la série U, considérée ci-dessus, en groupant les termes de la manière suivante

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}>\frac{1}{2^{2p-1}},\qquad \frac{1}{5^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{8^p}>\frac{1}{2^{3p-2}},$$

. . . .

$$\frac{1}{(2^{n'-1}+1)^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2^{n'})^p}>\frac{1}{2^{n'p-n'+1}};$$

on voit que l'erreur commise en prenant tous les termes, jusque et y compris le terme $(2^{n'})^{-p}$, est supérieure à

$$\frac{\dfrac{1}{2^{(n'+1)(p-1)+1}}}{1-\dfrac{1}{2^{p-1}}}=\frac{1}{(2^{p-1}-1)\,2^{n'(p-1)+1}}.$$

En rapprochant ce résultat de celui que nous avons obtenu plus haut, on voit, en résumé, que l'erreur ε, commise en prenant, dans U, tous les termes, jusque et y compris le terme $(2^{n'}-1)^{-p}$, est telle que

$$\frac{1}{(2^{p-1}-1)2^{(p-1)(n'-1)}}>\varepsilon>\frac{1}{(2^{p-1}-1)\,2^{n'(p-1)+1}}+\frac{1}{2^{n'p}}.$$

Lorqu'on connait deux limites entre lesquelles est comprise l'erreur commise sur une série convergente donnée, on peut, dans certaines cas, rattacher à cette connaissance une évaluation par excès et par défaut, de l' erreur commise sur une nouvelle série en s'arrètant à un certain terme de celle-ci. Il suffit, comme dans le cas que nous présentons dans le paragraphe suivant, que l' on puisse déterminer une relation entre les erreurs commises dans les deux séries considérées.

(Se concluirá).

PRINCIPES DE LA NOUVELLE GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

PAR M. A. POULAIN

Con este título ha hecho aparecer recientemente M. Poulain un interesantísimo folleto (1) sobre la Geometría del triángulo, que vamos á dar á conocer á nuestros lectores.

(1) En venta en la librería de Croville-Morant, éditeur, 20 rue de la Sorbonne. París 1892 precio: 2 f. 50.

La Geometría del triángulo, desconocida hace veinte años, constituye ahora una rama determinada de las ciencias matemáticas. Los numerosos desarrollos de que ha sido objeto la han conducido rápidamente á formar un todo completo. Las proposiciones que se ofrecieron en su origen y que parecían aisladas se han encadenado entre sí por sabios métodos, interesantes teorías é ingeniosos procedimientos de transformación ó de conjugación. La Geometría reciente constituye en la actualidad una cadena cuyos anillos se hallan firmemente unidos, y sería imposible el aspirar á conocer esta nueva conciencia sin poseer sus nociones preliminares y fundamentales. Era pues necesario que los matemáticos, conocedores á fondo de estas cuestiones se propusieran vulgarizar los elementos. Tal ha sido el fin á que se ha dirigido Mr Poulain.

El folleto de que tratamos no contiene más que el estudio de los puntos y de las rectas notables del plano del triángulo y algunas nociones sobre el círculo de Brocard. El autor se ha propuesto, en efecto, dar á conocer los *principios* que permitan á los lectores, poco al corriente de esta nueva ciencia, iniciarse rápidamente en su estudio, y su éxito ha sido completo.

Si la lectura del trabajo de M. Poulain se impone á los *principiantes*, no es por esto menos útil á los que se hallan ya familiarizados con el estudio de la Geometría del triángulo: los nuevos puntos de vista en los que el autor se ha colocado, la diversidad de los enunciados, las numerosas fórmulas dadas, les facilitarán el hacer una abundante recolección y aumentar sus conocimientos en grandes proporciones.

M. Poulain no se ha contentado con tratar las cuestiones que constituyen el fondo de su obra por el método puramente geométrico; se ha servido además de nociones elementales de la Geometría analítica que frecuentemente simplifica en alto grado las demostraciones y arrojan una viva luz sobre el conjunto de las propiedades del triángulo. Las coordenadas normales, baricéntricas, sobrelaterales y angulares desempeñan á su vez un papel importante, y M. Poulain ha mostrado claramente todas las ventajas que de ellas pueden obtenerse en pró de la elegancia de la demostración y de la sencillez de los cálculos, mediante el empleo de tal ó cual sistema de coordenadas.

El folleto de M. Poulain contiene numerosas fórmulas, y en este concepto tiene su lugar señalado en el estudio de un matemático, como la tabla de logaritmos en el de un calculador. El orden de los teoremas, detenidamente estudiado, se ha coordinado en forma de hacer las demostraciones tan sencillas como es posible. Aquí, como en su tra-