Año II Zaragoza 15 Diciembre de 1892 Núm. 24

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

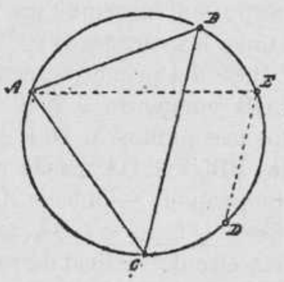
DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOPRA UN PROBLEMA DI GEOMETRIA

NOTA DI V. RETALI

Nel núm. 17 del periodico EL PROGRESO MATEMÁTICO (*) il *Sigr Reyes y Prósper* ha data una elegante soluzione del problema: *Dati una circonferenza e un triangolo inscritto in essa, determinare sulla circonferenza un punto tale, che i piedi delle perpeodicolari condotte sui tre lati del triangolo, cadano in una retta parallela ad un' altra retta data»;* nel sucessivo núm. 18 dello stesso giornale (pag. 177) il *Sigr E. Lemoine,* per dare un esempio del come possa misurarsi la semplicitá delle costruzioni geometriche confronta la soluzione sopra accennata con altra ch' egli stesso aveva dato, per lo stesso problema, fin dall' anno 1883 (**). Ora io voglio indicare altre tre soluzioni del problema accennato, fra le quali parmi che la prima sia notevole per la sua grande semplicitá.

Fig. 1.



Tutte e tre le mie soluzioni derivano semplicemente da due proprietá elementari della parabola, cioé dal teorema di *Lambert* (***) e dall' altro che dice essere la tangente nel vertice, pedale della curva rispetto al fuoco; nella prima soluzione interviene, oltre i due indicati, anche il teorema di *Poncelet* (****), nella 2.ª il teorema di

(*) T. II, pag. 147.

(**) *Journal de math. élem.* de M. de Longchamps, pag. 267.

(***) *Il cerchio circoscritto a ogni triangolo circoscrito ad una parabola passa per il fuoco.*

(****) *Le tangenti che arrivano a una conica da un punto sono isogonali con le rette che projettano dal punto stesso i due fuochi.*

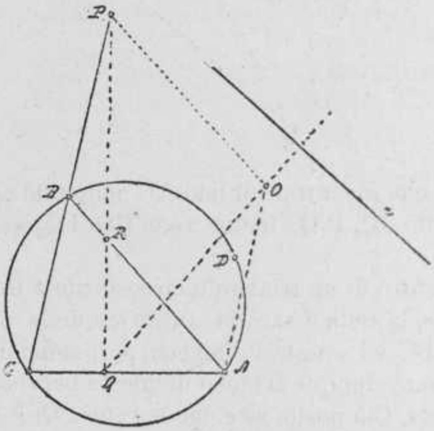
Brianchon e nella 3.ª, oltre questo, il tiorema di *Steiner* (*); ma questa terza soluzione, apparentemente più complicata delle altre due ha il vantaggio di non esigere che il cerchio circoscritto al triangolo sia tracciato.

1.ª soluzione.—Per un vertice qualunque A del triangolo ABC, (v. fig. 1) conduco alla retta data r las perpendicolare, che incontrerá ulteriormente la circonferenza in E: la parallela condotta pel punto E al lato BC sega la circonferenza nel punto D, che é il cercato.

Dim. Dalla eguaglianza degli angoli BAE, DAC, segue che il punto D é il fuoco (proprio) della parabola inscritta nel triangolo ABC e avente i diametri paralleli alla retta AE; dunque la retta di *Simpson* corrispondente a D, ossia la tangente al vertice di questa parabola, è perpendicolare alla retta AE.

2.ª soluzione.—Pel vertice (qualunque) A conduco la parallela AO al lato BC, e per un punto arbitrario Q del lato AC la perpendicolare QO alla retta data r: del punto O, comune a queste due rette, traccio un segmento OP equipollente (**) ad AB e finalmente unisco P e Q mediante una retta che segherà il lato AB nel punto R. I tre circoli circoscritti ai triangoli AQR, BRP, CPQ segano il cerchio dato nel punto cercato D. (v. fig. 2).

Fig. 2.



Dim. La retta PQ è tangente alla parabola inscritta nel triangolo ABC e avente i diametri perpendicolari alla retta data r (***); dunque il punto D comune ai quattro circoli ABC, AQR, BRP, CPQ è il fuoco di questa parabola: la retta di *Simpson* relativa a D, che è tangente al vertice della parabola è dunque parallela alla retta data.

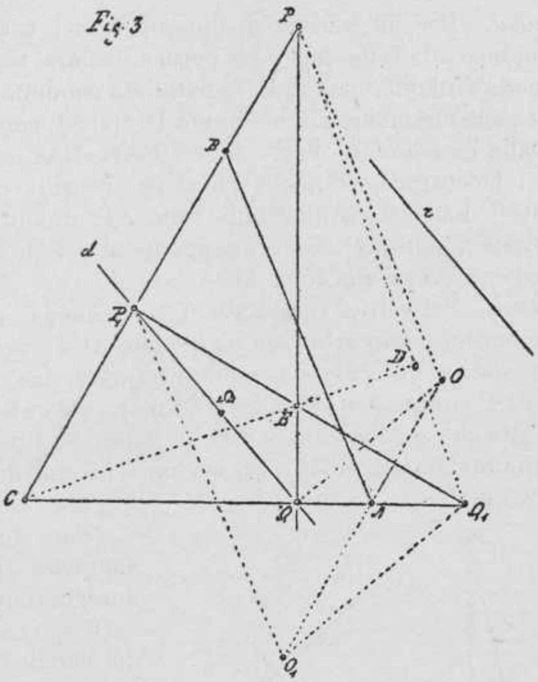
3.ª soluzione.—Sieno (v. fig. 3) P_1, Q i punti in cui i lati BC, AC

(*) *Le tre altezze del triangolo formato da tre tangenti di una parabola s'incontrano sulla direttrice.*—Una dimostrazione elementare di questo teorema può leggersi a pag. 124-25 delle *Vorlesungen* di *Steiner*. (Parte I, 2.ª ediz.)

(**) Parallelo, eguale e del medesimo senso.

(***) Questo, per un noto corollario del teorema di *Brianchon* (v. per. es. *Cremona*, *Géométrie Projective* § 141).

son segati dalla retta data *d*, parallela alla retta data *r* e passante per l'ortocentro Ω del triangolo ABC: costruisco la retta PQ come nella soluzione 2.ª, poscia prendo AO_1 equipollente a BP_1 e conduco da O_1



la perpendicolare alla *d*, che incontrerà il lato AC nel punto Q_1; sia E il punto comune alle rette PQ, P_1Q_1: le due rette CE, PQ_1 si segano nel punto cercato D.

Dim. Poichè l'ortocentro di un triangolo circoscritto a una parabola giace sulla direttrice, la retta *d* sarà la direttrice della parabola inscritta nel triangolo ABC ed avente i diametri perpendicolari alla retta *d;* il punto cercato sarà dunque il fuoco di questa parabola ossia il polo di *d* rispetto ad essa. Ciò posto, siccome le rette PQ, P_1Q_1 sono tangenti della parabola, il punto D sarà il polo della retta P_1Q. (*)

Milano 9 Novembre 1891.

(*) V. *Cremona*, loc. cit. § 191. a destra. Se invece del teorema di *Brianchon* si adopera il teorema di *Desargues*, si hanno due altri modi di risolvere il problema in discorso.

UNA DEMOSTRACIÓN

DEL TEOREMA DE ADICIÓN DE ARGUMENTOS DE LAS FUNCIONES ANGULARES

Sean α y β dos ángulos positivos y $\alpha+\beta<\pi$.

Tomando *ab* para origen de α y *ba* para origen de β, trácense estos ángulos (*). Siendo $\alpha+\beta<\pi$, los lados *ac* y *bc* se encuentran en un punto *c*, y forman un ángulo γ suplemento de $\alpha+\beta$.

Tomando *cb* por origen de γ, y trazando *ae* y *cd* perpendiculares á *cb* y á *ab*, tenemos

$$\operatorname{sen}\gamma=\frac{ae}{ac}=\frac{ae\times bc}{ac\times bc}=\frac{cd\times ab}{ac\times bc},$$

ó

$$\operatorname{sen}\gamma=\frac{cd}{ac}\cdot\frac{bd}{bc}+\frac{cd}{bc}+\frac{ad}{ac},$$

De lo que resulta

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Esta fórmula es evidente cuando $\alpha+\beta=\pi$.

Multiplicando ambos miembros por $(-1)^{m+n}$, se obtiene

$$(-1)^{m+n}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$
$$=(-1)^m\operatorname{sen}\alpha.\,(-1)^n\operatorname{sen}\beta+(-1)^n\operatorname{sen}\beta.\,(-1)^m\cos\alpha$$

ó, haciendo $a=n\pi+\alpha,\quad b=n\pi+\beta,$

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a,$$

que tiene lugar, cualesquiera que sean los ángulos *a* y *b*.

Las fórmulas de adición, relativas á las otras funciones son consecuencias de ésta.

J. Pedro Teixeira.

Porto, Desembro de 1892.

(*) La figura, que puede trazar fácilmente el lector, se reduce á un triángulo de base *ab* y vértice *c*, y además las perpendiculares *ae* y *cd* trazadas respectivamente por *a* y *c* á los lados *bc* y *ab*.

SOBRE UNA FÓRMULA GEOMÉTRICA

por D. RODOLPHO GUIMARAES, oficial de ingenieros.

Se sabe que desarrollando un cono recto de base elíptica, la curva de la base del cono se transforma en otra, llamada *transformada,* con el mismo perímetro que la primera.

A cada arco, pues, ds_1 de la elipse de la base, corresponde otro arco ds de la transformada tal, que

$$ds_1 = ds \qquad \text{ó} \qquad \rho_1 \, d\theta_1 = \rho \, . \, d\theta$$

siendo (ρ_1, θ_1) y (ρ, θ) respectivamente las coordenadas de cualquier punto de la curva de la base y de su transformada.

Como θ_1 y ρ_1 son conocidas, y ρ se puede expresar fácilmente en función de θ_1, resultando la expresión anterior con una incógnita θ, que vamos á determinar.

En efecto
$$d\theta = \frac{\rho_1}{\rho} \, d\theta_1$$

Pero el vector ρ_1 trazado desde el extremo del arco ds_1 de la curva de base, al centro de ésta tiene por expresión

$$\rho_1 = \frac{b}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta_1}},$$

en la que b y k representan el semi-eje y la excentricidad de la elipse; y el vector ρ, trazado desde el extremo del arco ds de la transformada al centro del sector y que es igual á la generatriz del cono correspondiente al extremo del arco ds_1, tiene por expresión

$$\rho = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{1 - k^2 \cos^2 \theta_1}},$$

en lo que h representa la altura del cono recto.

Tenemos enseguida por sustitución

$$d\theta = \frac{b \, . \, d\theta_1}{\sqrt{b^2 + h^2 (1 - k^2 \cos^2 \theta_1)}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \, . \, \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta_1}} \qquad (1)$$

Si hacemos

$$\theta_1 = \theta_2 - \frac{\pi}{2}$$

resulta $\qquad d\theta_1 = d\theta_2 \quad$ y $\quad \cos\theta_1 = +\operatorname{sen}\theta_2$,

y por consiguiente la expresión (1) se reduce á

$$d\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} \cdot \frac{d\theta_2}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta_2}} \tag{2}$$

Ahora, para $\theta_1 = 0$ ó $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, es $\theta=0$ y además $\theta_1 = 2\pi$ ó $\theta_2 = \frac{5}{2}\pi$, representado θ el ángulo formado por las generatrices extremas del sector en que se transforma el cono desarrollado, ángulo que designaremos por θ_p.

Integrando después el 2.º miembro de la fórmula (2) entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{2}$ resulta

$$\theta_p = \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \frac{d\theta_2}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta_2}},$$

y procediendo á su determinación, se ve que depende de una integral elíptica de 1.ª especie.

Desarrollando, se obtiene

$$\theta_p = \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}\left[2\pi + \frac{1}{2}k^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \operatorname{sen}^2\theta_2\, d\theta_2 + \frac{1.3}{2.4}k^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta_2 + \ldots\right.$$

Sustituyendo el paréntesis de la fórmula anterior por la integral completa F_1 de 1.ª especie de Legendre, resulta

$$\theta_p = \frac{4\,b\,F_1}{\sqrt{b^2+h^2}}.$$

La fórmula conocida

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \operatorname{sen}^m\theta_2\, d\theta_2 = 2\pi\,\frac{1.\ 3.\ 5.\ldots.\ (m-1)}{2.\ 4.\ 6.\ldots.m}$$

da, para $m=2$, $m=4$, $m=6$,..... respectivamente

$$\frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.4}, \frac{1.3.5}{2.4.6}, \ldots\ldots$$

de lo que resulta la fórmula buscada

$$\theta_p = \frac{2\pi b}{\sqrt{b^2+h^2}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right) k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} k^2 + \ldots \right]$$

Si el cono fuese de revolución, tendríamos $k=0$ y $b=R$, de donde

$$\theta_p = \frac{2\pi R}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

ó la fórmula conocida

$$l.\theta_p = 2\pi R,$$

siendo l la generatriz del cono.

Aplicando el mismo procedimiento de cálculo á un cono de 2.º grado en que la proyección del vértice no coincide con el centro de la elipse de la base, llégase á un resultado más complicado para el valor del ángulo θ_p.

Si hacemos un estudio idéntico sobre los conos de 2.º grado de base parabólica ó hiperbólica, se obtienen también fórmulas bastante complicadas, dejando por tanto de ser de gran aplicación. Por esto, pues, nos abstenemos de presentar este estudio, para no prolongar demasiado este artículo.

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

CONTINUACIÓN (Véase págs. 195-207)

Respecto al lema II, en las igualdades (b) y (c) los términos medios que se eliminan sucesivamente son $\frac{mP}{ma}$ y $\frac{aS}{ab}$, eliminación que conduce á la (e); otra eliminación del término medio $\frac{QP}{BA}$ entre (d) y la igualdad de la hipótesis conduce á la final (e) de la que se deduce inmediatamente la tésis.

El lema III de Pappus que hoy se ha transformado en un teorema fundamental de la Geometría proyectiva, reducido á establecer la propiedad de ser PERSPECTIVOS *los puntos correspondientes de dos series cuyas relaciones anarmónicas son iguales,* se expone y demuestra como sigue:

Si tres rectas AB, AC, AD *se hallan cortadas por otras dos,* HE, HD; *el rectángulo construído sobre* HE *y* GF *es al rectángulo construído sobre* HG *y* FE *como el rectángulo sobre* HB *y* DC *es al rectángulo sobre* HD *y* BC.

Fig. 11

DEMOSTRACIÓN. — Trazando LHK ‖ ª á CAF y LM ‖ ª á AK, se obtienen las proporciones

$$\frac{EF}{FA} = \frac{EH}{HL} \text{ y } \frac{AF}{FG} = \frac{HL}{HM}; \qquad [a]$$

luego
$$\frac{EF}{FG} = \frac{EH}{HM} \text{ ó } FG \,.\, EH = EF \,.\, HM.$$

Pero se tiene la identidad

$$\frac{GF \,.\, EH}{EF \,.\, GH} = \frac{EF \,.\, MH}{EF \,.\, GH} \text{ ó } \frac{GF \,.\, EH}{EF \,.\, GH} = \frac{MH}{GH}. \qquad [b]$$

Además

$$[c] \quad \frac{HM}{HG} = \frac{HL}{HK}; \qquad \text{luego } \frac{GF \,.\, EH}{EF \,.\, GH} = \frac{HL}{HK}. \qquad [1]$$

Trazándose la KN ‖ ª á AB y considerando ahora los Δ^s DAC y DKH, ACB y KHN, se tiene

$$\frac{DC}{CA} = \frac{DH}{HK} \text{ y } \frac{CA}{CB} = \frac{HK}{HN}; \text{ luego } DC \,.\, HN = CB \,.\, DH.$$

Pero se tiene la identidad

$$\frac{DC \,.\, BH}{BC \,.\, DH} = \frac{DC \,.\, HB}{DC \,.\, HN} = \frac{HB}{HN}.$$

Además, en los Δ^s HNK y HLB se tiene

$$\frac{HL}{HK} = \frac{HB}{HN}; \text{ luego } \frac{DC \,.\, HB}{CB \,.\, DH} = \frac{HL}{HK}; \qquad [2]$$

y de las relaciones [1] y [2] resulta la del enunciado.

Trazadas las paralelas LHK y LM á CAF y DA, la eliminación de los segmentos auxiliares AF y LH por medio de las igualdades [*a*] y la de HM y HG por la [*b*] y [*c*] conduce á la expresión [1] de $\frac{HL}{HK}$ lo mismo que, despues de trazarse KN paralela á AB, análogas eliminaciones de CA, HK, etc., conducen á la otra expresión [2] de $\frac{HL}{HK}$, y de la eliminación final de esta razón común resulta el enunciado del lema.

31. Hemos dicho (pág. 82) que los teoremas resultan de las construcciones auxiliares que enlazan una figura con otra, hasta el momento en que deban destacarse como las líneas principales de un dibujo aquellos elementos que constituyen el teorema constituído por la hipótesis y la tesis, resultado que se obtiene, según acabamos de observar en los ejemplos anteriores, por una eliminación de términos medios. Y como la red de relaciones intermedias puede tener una variación indefinida, y como además en el proceso inventivo se puede cambiar también el orden de los elementos enlazados y cambiar á voluntad de términos extremos, cabe alterar el caudal de teoremas en la expresión ó síntesis científica, puede darse formas distintas á este organismo, bajo la influencia subjetiva de cada autor, ó bajo el predominio del grado de progreso á que la generalización de las ideas en cada época ha llegado.

Así, por ejemplo, las diversas proposiciones que anunció Pappus con el nombre de lemas y que demostró empleando razonamientos particulares y distintos para cada uno, según hemos visto, y según damos á conocer detalladamente en nuestra *Geometría elemental* (páginas 190-195, 228-234, parte 2.ª), hoy se condensan ó incluyen en proposiciones más generales de las que resultan particularizando alguno de elementos que entran en su enunciado. Así es como los lemas X, XI, XIV XVI y XIX están incluídos en el III y los I, II, V, VI y VII en el IV, expresando éste, según el modo de ver actual, la relación general de involución de seis puntos y el III la propiedad fundamental de las figuras perspectivas. Y no solo hemos de notar esta diferencia en los enunciados, sino además en los procedimientos demostrativos; pues mientras el procedimiento de los geómetras griegos, como hemos visto por los ejemplos citados, consistía en la acumulación de proporciones dependientes del trazado de paralelas oportunamente elegidas, hoy sin dejar de emplear este procedimiento en un principio, el enunciado sucesivo de proposiciones cada vez más generales que sintetizan toda una teoría, hace mas fácil y breve la marcha de la inteligencia que pasa fácilmente de uno á otro de estos puntos culminantes que son en la región de las ideas lo que los vértices de primer orden de una triangulación geodésica, á los cuales quedan referidos luego todos los detalles secundarios.

En efecto. Primeramente hemos de observar que en la época moderna se considera la relación anarmónica, por lo cual se evita una repetición de enunciados y demostraciones, pues toda propiedad independiente del valor numérico es aplicable lo mismo á la una que á la otra. 2.º Establecida la propiedad proyectiva de dichas relaciones así como de las series homográficas de puntos y en involución, y también la posibilidad de formar con ellas sistemas perspectivos, hoy se pueden abarcar, desde puntos de vista comunes, multitud de lemas de Pappus y de porismas de Euclides, que según el estilo antiguo se enunciaban y demostraban separada é independientemente (*).

(Se continuará).

Z. G. de G.

REVISTA BIBLIOGRÁFICA

Vorlesunguen über die Algebra der Logik (exacte Logik) von Ernst Schröder.—Zweiter Band, erste Abteilung (1891).—Ya en el tomo I de esta Revista (págs. 139-142, 195-203), dimos cuenta detallada, si bien no tanto cual merecía, del primer tomo de esta obra magistral en que el sabio profesor de la Escuela Técnica superior de Karlsruhe in Baden ha sintetizado esta nueva rama científica, hoy objeto de insistente estudio en los Estados Unidos, Inglaterra, Alemania y también en Italia, que cuenta al Sr. Peano como uno de los más asíduos representantes de este linaje de conocimientos. Hoy vamos á insistir en nuestra tarea, con motivo de haber aparecido el primer cuaderno correspondiente al tomo II de la obra del Sr. Schröder; pero antes de entrar en materia haremos la siguiente

Aclaración.—Ya hace tiempo que el sabio autor de la obra en cuestion, nos dirigió algunas oportunas reflexiones con motivo de que en las páginas 140 y 141 del tomo I de este periódido, al ocuparnos de su excelente obra, tradujimos *Einordnung* por *coordinación* y *Subsumtionsurteile* por *juicio coordinatorio* "Coordinados entre sí se llaman los diferentes individuos que pertenecen á una misma especie, ó las especies que pertenecen á un mismo género; pero aquí, añade

(*) Ciertamente que ya en el texto de Pappus acerca de los porismas se manifiesta que los diez porismas colocados al principio de su primer libro pueden contenerse en un sólo enunciado: *Dadas cuatro rectas que se cortan dos á dos, si tres de los puntos de intersección situados en una de ellas, ó dos solamente en el caso del paralelismo, están dados* (es decir permanecen fijos) *y los otros dos se hallan sujetos á permanecer sobre una recta dada, el último estará también situado sobre una recta dada en posición*, enunciado que extiende á un número cualquiera de rectas, si bien reconoce dicho geómetra la dificultad de reunir varios porismas en un solo enunciado.

el Sr. Schröder, lo que se había de expresar era la relación de una especie á su género. El problema es difícil, siendo la palabra alemana *Einordnung* de fecha reciente; y á no ser posible traducirla por una palabra nueva, acaso *implicación* (*), correspondiente á la voz inglesa *implication* podría ser preferible...„

Al hacer esta rectificación importante, cuyo origen ha sido la dificultad de emplear nuevos vocablos, aprovechamos esta ocasión para manifestar que la introdución de las palabras *subsumpción* y *juicios subsumptivos* que sabemos emplea nuestro ilustrado amigo y colaborador de EL PROGRESO MATEMÁTICO D. Ventura Reyes Prósper en la traducción compendiada que prepara de *El Algebra de la Lógica*, resolvería satisfactoriamente esta dificultad y evitaría todo equívoco.

* * *

Principia el tomo II de la obra del Sr. Schröder considerando la variedad de una dimensión, que es el tiempo, ofreciendo la representación de la *subsumpcion* $a \subseteq b$ (**) por la recta, cuyos puntos son los elementos del tiempo, de manera que corresponde á cada punto un momento. El *uno* representa la totalidad del tiempo en sus dos sentidos el pasado y el futuro, el *cero* se expresa por el abverbio, *jamás*, distinguiéndolos el autor del 0 y 1 de los cálculos de las clases y de los dominios con un punto sobrepuesto.

Si a representa la proposición «2 × 2 es 4, y b que «2 × 2 es 5 las expresiones

$$a = \dot{1} \quad \text{y} \quad b = 0$$

indicarán su realidad respectivamente, la existencia ó no existencia de tales relaciones. O por ejemplo, si a representa que «la masa del mundo es constante» y d que «la materia es perecedera, tendremos $a = 1$ y $d = 0$.

Una subsumpción:

$$a \subseteq b$$

entre dos expresiones, significa: El tiempo durante el que la expresión a es cierta, se halla contenido en el tiempo durante el que b es cierta, es decir, siempre que *a subsiste, subsiste también b*, ó «cuando a subsiste ó es, también b es ó subsiste», «de a se sigue *(folgt) b*.» y dos expresiones serán entre sí equivalentes cuando tanto, como $a \subseteq b$, también

(*) En español *implicación* ó *implicancia* expresa oposición de términos entre sí.

(**) Por carecer de los signos tipográficos empleados en la obra del Sr. Schröder, se han tenido que suplir con otros distintos.

es $b \subseteq a$, es decir, cuando siempre que al realizarse la una, la otra también se realiza, y recíprocamente.

Siendo cierto que $2 \times 2 = 4$, $0 = 0$ y no siéndolo que $2 \times 2 = 5$ ó que $1 = 0$, se tendrá por ejemplo, que

$$(0 = 0) = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad (1 = 0) = 0$$

como expresión de la validez ó no validez de las proposiciones.

También citaremos entre otras las subsumpciones $a \subseteq \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \subseteq \mathbf{i}$ que a corresponden á proposiciones como estas: Mientras el sol brilla, es $2 \times 2 = 4$, mientras la masa del mundo es constante es $2 \times 2 = 4$, etc.

Después de razonar el Sr Schröder detenidamente estos puntos fundamentales, trata del producto y de la suma de las expresiones, que como ya se indicó al ocuparnos del tomo I de su obra, corresponden respectivamente á las conjunciones copulativa y disyuntiva: *y*, *o*. Así: no solo ($a =$) «la materia es imperecedera,» sino que además ($b =$) la fuerza no puede crearse ni aniquilarse «es una expresión producto *(Aussagenprodukt)* ab.

Respecto á los juicios ocasionales, cuando a y b representan expresiones ocasionales enlazadas por la subsumpción $a \subseteq b$, se entiende que la expresión a se halla contenida ó subordinada á la clase de las ocasiones en la que la expresión b es verdadera. Así por ejemplo si a significa: El cuadrilátero ABCD es un rombo, y b que «en el cuadrilátero ABCD las diagonales son perpendiculares, se tendrá que $a \subseteq b$, es decir; cuando un cuadrilátero es un rombo, sus diagonales son perpendiculares.

En el artículo 29 de la obra de que tratamos, dos nuevos signos se ofrecen á la consideración del lector, signos de producto y de suma *(Produktenzeichens, Summenzeichens)*: $\prod_x$, $\sum_x$, $\prod_{x,y}$, $\sum_{x,y}$, etc., que se refieren á uno ó á varios dominios x; x, y, etc. de la variedad *(Mannigfaltigkeit)* 1, que además de servirle para la exposición de 51 teoremas acompañados de corolarios y definiciones, le sirven en el artículo 30 para establecer algunas consideraaciones acerca de la teoría del *dualismo* à que corresponden dichos dos signos.

Citaremos de entre dichas proposiciones las siguientes:

I Principio de la identidad $(a \subseteq a) = \mathbf{i}$ ó más breve $a \subseteq a$.

II Principio del silogismo (Barbara).

$$(a \subseteq b)\,(b \subseteq c) \subseteq (a \subseteq c)$$

Definición de la igualdad $(a \subseteq b)\,(b \subseteq a) = (a = b)$

2) *Teorema* $(a \subseteq b)\,(b = c) \subseteq (a \subseteq c)$

Definición del nulo y del uno idénticos (*)

$$2_{\times}) \quad 0 \subseteq a \qquad | \qquad 2_{+}) \quad a \subseteq 1$$

DEFINICIÓN DE PRODUCTO Y DE SUMA

$$(c \subseteq a)\,(c \subseteq b) = (c \subseteq ab) \qquad | \qquad (a \subseteq c)\,(b \subseteq c) \subseteq (a + b \subseteq c)$$

En el § 31 expone y desenvuelve los principios del *cálculo de las expresiones* y trata de la *inconsistencia*, cuyos dos símbolos capitales son 0 y **i**.

Trata de las expresiones producto y suma, que como se ha dicho corresponden á las conjunciones copulativa y disyuntiva.

Así el principio expresado en la fórmula

$$(A + B = \mathbf{i}) = (A = \mathbf{i}) + (B = \mathbf{i})$$

significa. Si A es ó es B también es A ó B.

La expresión

$$(A+B)\,C \subseteq AC + BC$$

se lee: Es A ó B y además C; luego es A con C ó B con C.

Trata asimismo de la negación de la expresión A que se designa por A_1

Así las negaciones de

$$A=(a \subseteq b) \text{ y } A=(a=b) \qquad \text{son } (a \subseteq b)_1 = A_1 \text{ y } (a=b)_1 = A_1$$

empleando también para la negación de una expresión los signos de la subordinación supraordinación é igualdad combinados con una raya vertical, etc.

$$a \ddagger b = (a=b)_1$$

Los principios de contradicción, de exclusión y de la doble negación se expresan por

$$AA_1 = o, \quad A + A_1 = \mathbf{i}, \quad A \subseteq (A_1)_1 \text{ y } (A_1)_1 \subseteq A.$$

Esta última por ejemplo, expresa que cuando A es, la negación de A debe ser falsa.

La expresión

$$(A \subseteq B) = (B_1 \subseteq A_1)$$

expresa la conversión del juicio hipotético por contraposición.

En ella pueden sustituirse A con A_1 y B con B_1 resultando

$$(A_1 \subseteq B) = (B_1 \subseteq A), \qquad (A \subseteq B_1) = (B \subseteq A_1)$$

es decir, que: *Es* B *cuando* A *no es, así como es también* A *cuando* B *no*

(*) La expresión nula es una hipótesis admisible para toda conclusión, y una expresión i es una conclusión admisible para toda hipótesis.

es, de igual modo que *no es* B *cuando* A *es, así como no es* A *cuando es* B.

Además los juicios

$$A \mathrel{\underline{\subset}} B_1 \quad \text{y} \quad B \mathrel{\underline{\subset}} A_1$$

son equivalentes y pueden representarse por la igualdad $AB = o$ ó *inconsistencia* (de *inconsistency).* Y una *inconsistencia,* por ejemplo, $ABC = o$ equivale á cada una de las subsumpciones

$$AB \mathrel{\underline{\subset}} C_1, \qquad AC \mathrel{\underline{\subset}} B_1, \qquad BC \mathrel{\underline{\subset}} A_1,$$

correspondiendo la inconsistencia al juicio disyuntivo ó juicio alternativo que se representa por la forma $A + B = \mathbf{i}$ (A *es ó bien es* A ó *es* B). Y también citaremos la igualdad

$$(A = \mathbf{i}) + (A = o) = \mathbf{i}$$

Pasa el autor á tratar del *peso* de las expresiones, y á hacer numerosas verificaciones de los teoremas del cálculo de éstas.

Basta transcribir las siguientes expresiones:

$$(A = o) = (A_1 = \mathbf{i}) = A_1, \quad (A \neq o) = (A = o)_1 = (A_1)_1 = A, \quad (A \neq o) = (A = \mathbf{i}) \text{ etc.}$$

para comprender los diversos modos de expresarse la negación en este cálculo; de manera que *una desigualdad con su segundo miembro cero equivale á una igualdad con el segundo miembro* **i**, etc.

Además una subsumpción $A \mathrel{\underline{\subset}} B$ admite la forma de igualdad $A_1 + B$.

$$(A \mathrel{\underline{\subset}} B) = (AB_1 = o) = \{(AB_1)_1 = \mathbf{i}\} = (A_1 + B = \mathbf{i}) = A_1 + B$$

Con estos preliminares y la consideración del *peso* A_1B de la subsumpción $A \mathrel{\underline{\subset}} B$, observándose además que: *cuando el peso de una subsumpción es igual á* 0 *puede reducirse á una igualdad,* y recíprocamente puede el Sr. Schröder entrar de lleno en el cálculo de las expresiones de las que ofrece una larga serie de ejemplos correspondientes á teoremas de esta nueva rama de la ciencia.

El § 33 de la obra, tiene por objeto tratar del silogismo en sus formas conocidas universales y particulares, afirmativo y negativo que como se sabe, se representan por las letras *a, e, i, o.* Y solo diremos que la igualdad $wA = wB$ corresponde á los juicios particulares y aun las expresiones

$$AB \neq o, \quad AB_1 \neq o,$$

traducen los juicios *i, o,* es decir, que *algunos* A *son* B, *algunos* A *son no* B.

Las cinco relaciones elementales posibles de Gergonne y las catorce relaciones fundamentales, son el punto de partida de los ulteriores y amplios desarrollos con que el Sr. Schröder continúa dando á conocer el Algebra de la Lógica.

Distingue los dos casos a y a_1, el primero correspondiente á la exclusión (representado en las figuras geométricas que acompañan al texto con dos círculos exteriores), y el segundo á que corresponden los otros cuatro casos: el de la identidad $a = b$, los dos de la inclusión total de A en B ó de B en A y en fin, la parcial de uno en otro, ó sea $a_1^{00} = \delta$, $a_1^{01} = \gamma$, $a_1^{10} = \beta$, $a_1^{11} = \alpha$.

Las tres relaciones elementales α, β, γ, difieren de las

$$d = (A = B) \text{ (\textit{todo} A \textit{es todo} B)}, \quad f = A \,(\, B; \text{ (\textit{todo} A \textit{es sólo algún} B)}$$

$$e = A \,)\, B: \text{ (\textit{sólo algún} A \textit{es todo} B)}$$

porque en aquéllas A y B son siempre distintas de 0, mientras que en éstas, (d, f, e) se admiten los casos $A = o$, $B = o$.

En fin, la relación $\alpha = g$ correspondiente á *sólo algún* A *es sólo algún* B.

Estas relaciones con sus respectivas negaciones (por ejemplo $d_1 = \{A \neq B\} = \{A = B\}_1$ etc.) forman los siete pares de relaciones fundamentales en que estriban los ulteriores desarrollos, á saber: *la reducción mútua de las relaciones elementales y fundamentales*, objeto del § 35.

Así, cuando

$$\mathbf{i} = a + \alpha + \beta + \gamma + \delta, \qquad \text{será} \quad a_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta.$$

Será además

$$b = k + \beta + \delta \qquad \text{(se tiene } k = \{B = o\}\text{) etc.}$$

La *reducción de todas las relaciones á tipos de igualdades y sus negaciones* es objeto del § 36 en que se expresan estas reducciones mediante cuadros sinópticos, así como el *desarrollo de los productos y sumas de las relaciones fundamentales*.

El § 39 tiene por objeto la representación de las relaciones por medio de las series imaginables de relación por medio de las cuatro relaciones primitivas, según Morgan:

$$a = \{AB = o\}, \; c = \{AB_1 = o\}, \; b = \{A_1B = o\}, \; l = \{A_1B_1 = o\}$$

y sus negaciones $a_1 = \{AB \neq o\}$ etc. expuestas en varios cuadros sinópticos, terminando con la enumeración de Peano de las expresiones posibles con respecto á n clases.

Trata el § 40 del problema de Mitchel sobre las expresiones simultáneas, compuestas de sumas y productos; en el 41 de la eliminación resuelto para un par de casos especiales típicos, y el § 42 está destinado al silogismo, aplicando en el estudio de sus modos y sus figuras las modernas notaciones; el § 43 tiene por objeto los resultados obtenidos por Miss Ladd Franklin acerca de los quince modos admisibles en el cálculo, luego de los silogismos incompletos de los antiguos y de su representación en la *Lógica exacta*, estableciendo diferencia que existe entre esta lógica y la de los antiguos en el problema de la conversión silogística.

Detalladamente da á conocer enseguida el Sr. Schröder las particularidades del cálculo de las expresiones con relación al de los dominios del que difiere en el empleo de los valores 0 y 1, separándose de éste por la adición de la hipótesis $(a = \mathrm{i}) = a$.

No permitiéndonos nuestra reseña bibliográfica el extendernos tanto como fuera nuestro deseo, nos limitaremos á citar de entre las numerosas proposiciones las siguientes:

$$\delta_\times)\quad a \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} \{(a \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} b) \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} b \qquad | \qquad \delta_+)\quad b_1 \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} \{(a \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} b) \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} a_1$$

$$\varepsilon_\times)\quad (a \mathrel{\underline{\subset}} b)\, a \mathrel{\underline{\subset}} b \qquad | \qquad \varepsilon_+)\quad (a \mathrel{\underline{\subset}} b)\, b_1 \mathrel{\underline{\subset}} a_1$$

ó traducidas al lenguaje común: *Si* a *es, también debe ser* b, *cuando* b *resulta de* a. *Si* b *no es, también debe no ser* a, *cuando* b *resulta de* a.

Si a *es, también* b. *Pero* a *es, luego* b *es. Si* a *es, también* b. *Pero* b *no es; luego* a *no es.*

Citaremos también el dilema

$$(s \mathrel{\underline{\subset}} a + b + c + \ldots..)\,(a \mathrel{\underline{\subset}} p)\,(b \mathrel{\underline{\subset}} p)\ldots.. \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} (s \mathrel{\underline{\subset}} p)$$

Si s *es, y es también ó* a, *ó* b, *ó* c,..... *Si ahora es* a, *también* p, *cuando* b *es también* p......; *luego, cuando* s *es, también es* p.

Sólo diremos del § 46 que contiene una serie de teoremas y métodos de Hauber, Mitchell, McColl, Peirce, etc., concernientes á esta novísima teoría.

El § 47 trata de las definiciones de los indivíduos, puntos, y sus correspondencias, de los teoremas referentes á los indivíduos, así como de la dualidad.

El punto se toma como indivíduo de la variedad de puntos, representándose diversos indivíduos con las notaciones $i^1, i^2, i^3, \ldots..$

Si un dominio a entra parcialmente en un dominio x, se tiene la desigualdad $ax \mathrel{\underline{\perp}} o$; y si a representa un punto ó un indivíduo i, tendremos

$$(xy = o) \mathrel{\underline{\underline{\subset}}} \{(ix \mathrel{\underline{\perp}} o)\,(iy \mathrel{\underline{\perp}} o) = o\} \text{ (*)}$$

Esta fórmula nos basta para hacer notar como este cálculo referente al dominio de puntos, y que lleve al autor á la consideración de

(*) Por carencia del signo de la negación de la igualdad, se ha empleado otro parecido.

las formas geométricas, línea, superficie, volumen y aun al espacio en general, se efectúa según las reglas y transformaciones de que ya hemos ofrecido algunos ejemplos. Citaremos aún, para terminar, las siguientes:

$$(i \subseteq a)(i \subseteq a_1) = 0, \qquad (i \subseteq a) + (i \subseteq a_1) = i$$

y

$$(i \subseteq a + b) = (i \subseteq a) + i \subseteq b),$$

esto es: *cuando un individuo es* a *ó* b, *debe ó ser* a *ó ser* b.

Termina el cuaderno de que nos ocupamos con ampliaciones sobre el silogismo y sobre las cláusulas.

A sequel to the first six books of the Elements of Euclid by John Casey (1892). Esta notabilísima obrita es ya conocida por los aficionados á los estudios geométricos, la cual, como se sabe, constituye una colección de teoremas y cuestiones de las teorías más modernas, completada por el tratado *Recent elementary Geometry* (Geometría elemental reciente), de que se dió cuenta en el tomo 1.º de EL PROGRESO MATEMÁTICO.

Sólo vamos á indicar alguna de las adiciones que han hecho los editores en esta edición (que es la 6.ª), á la anterior, después de enunciar las materias contenidas en las ocho primeras secciones, que no difieren de las de la edición anterior.

En el 1.er libro se contienen, entre multitud de teoremas, los que conocemos en la teoría del centro de las *distancias proporcionales* y algunos relativos á *máximos* y *mínimos*. El libro 2.º teoremas relativos á relaciones métricas, los libros 3.º, 4.º y 5.º tratan de propiedades del círculo. El libro 6.º contiene proposiciones correspondientes á las teorías de transversales y de los triángulos perspectivos, los *centros de semejanza*, teoría de la *relación armónica*, teoría de la *inversión*, *círculos coaxiales*, teoría de la *razón anarmónica*, ídem de los *polos* y *polares*, acompañando á cada libro multitud de cuestiones interesantes.

En el capítulo suplementario que comprende la Geometría elemental reciente es donde se notan considerables adiciones.

La sección 1.ª se halla aumentada con una serie de problemas nuevos, algunos acerca del centroide (centro de gravedad del triángulo). Así, siendo M, N, P tres puntos de los lados BC, CA, AB tales que BM : MC : : CN : NA : : AP : PB; *demostrar que* ABC y MNP *tienen el mismo centroide* (Pappus).

Sobre los lados BC, CA, AB *se construyen los triángulos semejantes*

A'BC, B'CA, C'AB; *demostrar que los triángulos* ABC, A'B'C' *tienen el mismo centroide* (Laisant).

En fin, hay varios problemas nuevos de los señores Boutin, Martin, Brocard, Neuberg, Lemoine, etc.

También se nota en la sección 1.ª el aumento de las definiciones de los puntos *complementarios* y *anticomplementarios*, y de la *figura complementaria* de una figura dada.

Supuesto que se han trazado las rectas AM, BM, CM prolongadas hasta encontrar al lado opuesto del triángulo ABC en M_1, M_2, M_3 y los conjugados armónicos m_1, m_2, m_3 de éstos con relación á los lados respectivos del triángulo, se demuestra que m_1, m_2, m_3 son colineales, hallándose en la *polar* de M respecto al triángulo, ó *polar trilineal* de M, que es á su vez su *polo trilineal*. Se deduce además, entre otros resultados especiales, que *el polo trilineal del ortocentro es la línea* h_1 h_2 h_3, *ó eje órtico de* H_1 H_2 H_3 (siendo H_1, H_2, H_3 los pies de las tres alturas).

En la sección 2.ª se halla aumentado el artículo relativo á *dos figuras inversamente semejantes*, principiando por demostrar la *existencia* del punto y de la línea dobles.

Después de tratarse de los círculos de Lemoine, Tucker y Taylor, ya expuestos en las ediciones anteriores, y del sistema de tres figuras semejantes, además de algunos ejercicios nuevos, se da á conocer el *punto director* respecto á una triada de puntos P_1, P_2, P_3 de F_1, F_2, F_3.

Se encuentra en la edición de que se trata definido también el *círculo ortocentroidal*, es decir, cuyo diámetro es la recta que une el ortocentro H y el centroide G; y considerándose las proyecciones *a*, *b*, *c* de G sobre las alturas, así como las de H sobre las medianas, y supuestas sobre las alturas tres figuras semejantes, se demuestra que a_1 b_1 c_1 es el triángulo de semejanza de T_a, T_b, T_c, que *a*, *b*, *c* son puntos invariables, etc., y se deducen varias propiedades del punto simediano (de Lemoine) del círculo de Apolonio, etc.

A continuación de los *polígonos armónicos* y de la *teoría general de las figuras asociadas* se advierte, en fin, un considerable aumento, que constituye toda la sección 8.ª; y sin entrar en detalles, citaremos los epígrafes de las varias cuestiones tratadas, á saber: Metapolos de dos triángulos.—Triángulos pedales y antipedales.—Triángulos ortológicos.—Cuadrángulos metapolares.—Par tripolar.—Centros isogono é isodinámico de un triángulo.—Trasformación armónica de un triángulo.—Círculos adjuntos.—Triángulos quibrocardianos.—Inversión simétrica.—Círculos tritangentes, terminando la obra con una colección aumentada de ejercicios.

Leçons de Cinématique et de Dinamique suivies de la détermination des centres de gravité, par X. Antomare.—Librairie Nony, 1892. Consta esta obra de tres libros: I *Cinemática.*—II *Dinámica.*—III *Estática.*

El libro I se divide en cinco capítulos: 1.° Velocidad y aceleración consideradas como magnitudes numéricas.—2.° Velocidad y aceleración consideradas como vectores.—3.° Movimientos proyectados y empleo de las coordenadas rectilíneas para el estudio del movimiento de un punto.—4.° De los movimientos relativos y de la composición de los movimientos.—5.° Estudio de algunos movimientos y aplicaciones.—Ejercicios.

El libro II se divide en ocho capítulos á saber: 1.° Los principios generales de la dinámica.—2.° Movimiento de los proyectiles en el vacío.—3.° Proporcionalidad de las fuerzas y de las aceleraciones; masa.—4.° Valor de una fuerza; definición de una resultante; composición y descomposición de las fuerzas.—5.° Ecuaciones del movimiento de un punto material sometido á fuerzas conocidas; aplicaciones.—6.° Trabajo y fuerza viva.—7.° Fuerzas centrales y movimiento de los planetas.—8.° Movimiento de un punto sobre una curva ó sobre una superficie fijas.—Ejercicios.

El libro III cuyo objeto es la *determinación de los centros de gravedad* trata sucesivamente de: Nociones preliminares; teoremas generales; centros de gravedad de las líneas; centros de gravedad de superficies; centros de gravedad de volúmenes; aplicaciones de los centros de gravedad; teoremas de Guldin; ejercicios.

La obra consta de 320 páginas en 4.°, y si el autor ha expuesto con claridad y sencillez los principios fundamentales de la mecánica, no poco contribuye también lo esmerado de la parte tipográfica á hacer en extremo fácil la lectura y comprensión de la obra escrita con arreglo al programa de admisión de la Escuela Politécnica de París, y con excelente método.

Complemento elemental de Geometría y Trigonometría rectilínea, por D. Manuel Salavera, catedrático de Matemáticas.—Tarragona, 1892.

Ya en el tomo I de este periódico, al ocuparnos de *El complemento elemental de Aritmética y Algebra,* publicado también por el Sr. Salavera, manifestamos cuán grato es para todo el que se interesa por los adelantos de las ciencias en España el hecho de aparecer obras distintas de aquéllas que, al parecer fundidas en un mismo molde, nos agobian por su muchedumbre, y sólo difieren entre sí esencialmente por el nombre que llevan en la portada.

El Sr. Salavera ha hecho una recopilación en extremo útil de todas aquellas teorías y conceptos que, presentándose como difíciles y elevadas para el principiante, se hallan á su vez en los umbrales de nuevos dominios, cuya superioridad exigen cierto momento de reposo y de reconcentración con objeto de adquirir las fuerzas impulsivas suficientes para continuar la inteligencia su ascendente proceso. El espíritu que informa las dos obras del Sr. Salavera tiene algo de lo que caracteriza á la sección media, que en Francia se denomina *matemáticas especiales*, preparación muy conveniente para poder después dirigirse de modo expédito por cualquier región de dicha ciencia.

De cuatro partes consta la obra, desenvuelta en la extensión de 185 páginas en 4.º En la primera hallamos un capítulo destinado á los *métodos generales de resolución y demostración*, que comprenden los de *intersección*, por *simetría*, de *equivalencias*, *proporciones* y *analogías*. En seguida los métodos *clásicos*, que reduce á un corto número de procedimientos generales de que hace uso la Geometría moderna para demostrar y resolver muchas cuestiones, tratando de los de *relaciones métricas*, *de las medidas*, *analítico*, con la interpretación de las soluciones. El capítulo III, con que termina la primera parte, tiene por objeto los *lugares geométricos*.

La 2.ª parte comienza exponiendo la utilidad de la consideración de los signos, que justifica mediante algunos ejemplos. Siguen las primeras nociones de geometría infinitesimal con la exposición de los teoremas fundamentales relativos á la sustitución de variables en relaciones y sumas. En el capítulo 2.º que trata de la división segmentaria, se ocupa el autor de los primeros teoremas en que interviene la *relación armónica* y el *haz armónico*, así como á continuación lo hace del *polo* y la *polar*; luego de la *división anarmónica*. En el capítulo IV el objeto es las *antiparalelas* en el plano y en el espacio. En el capítulo V se trata del *eje* y *centro radical* y *circunferencias ortogonales*.

La 3.ª parte consta de cinco capítulos. En el 1.º, *teoría de las transversales* se demuestran los teoremas de Menelao, Ceva, de Gergonne y Chasles, tratándose del baricentro, el exágono de Pascal, el cuadrilátero completo. En fin, continuando la reseña del contenido de la obra tenemos: Capítulo II. Homología; Homotecia directa ó inversa.—Capítulo III. Proyecciones; Perspectiva; Punto y recta en el infinito; Construcción de las figuras perspectivas.—Cap. IV. Propiedades proyectivas; Propiedades proyectivas aplicables á las cónicas.— Capítulo V. Correlación; Dualidad de las figuras planas; Dualidad en el espacio.

La 4.ª parte trata de la *inversión* en el plano y en el espacio, concluyendo la obra con unas nociones de la *Geometría elemental reciente*.

INDICE

ARTÍCULOS BIBLIOGRÁFICOS

Páginas

ARTÍCULOS Y MEMORIAS

ANUNCIOS BIBLIOGRÁFICOS

FILOSOFÍA MATEMÁTICA

VARIEDADES

CUESTIONES PROPUESTAS

Desde la 44 hasta la 98.

CUESTIONES RESUELTAS

2, 3, 4, 5, 12, 27, 28, 33, 34, 36, 38, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 55, 57, 59, 61, 62, 69, 72, 77, 79, 393.

ERRATAS Y OMISIONES

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
119	7	$A = o$	$B = o$
121	11	áng.[los] diedros	ángulos planos y los remos de los ángulos esféricos por remos de ángulos diedros
137	24	$a = b$	$b - a$
137	24	$v - a$	$v = a$
138	6 y 8	ρ	x
138	25	ρ	x
140	23	límite inferior	límite superior y el que corresponde á la misma para el límite inferior
142	1	terminación	determinación
142	25 y 27	$+ \ldots\ldots$	$+$
143	13	$f(a)$ y $f(b)$	el mayor y menor valor de $f(x)$ toma en el intervalo $(b-a)$
144	1	$T(b)$	$T(d)$
146	7	de la	de las que corres ponden á la
146	9	integración	cálculo
146	16	$\psi(a)\, dx$	$\int \psi(x)\, dx$
146	17, 19, 20	x^3	x^2
160	3	suprímase	«El punto S es el punto doble etc.»
160	6	G	$C\gamma$
240	1	$A\beta CD\beta' C'$	$A\beta ED\beta' E'$
240	7	O	o
240	25	Rb'_0	Bb'_0
240	35	x	$\pm x$
242	20		quitar el radical entre paréntesis
243	26	$4By$	$4Ry$
247	16	$Bp'' -$	$Bp'' =$
247	8	$\mp$	$\pm$
261	11	$\equiv (\textit{mód. } p)$	$\equiv 1\ (\textit{mód. } p)$
261	15	$r' - 1$	$p - 1$
261	17	$10^{\frac{p+r'}{2}} =$	$10^{\frac{p+r'}{2}} - 1 =$
262	7	20	10
262	17	tant	tout
281	fór.[la] (1)	$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$	$\frac{\alpha_1}{\alpha_1}$
282	4	$(e_1\, e_2)$	$(e_1$ é $e_2)$
282	6	Q	Q_2
283	11	Pe_3	P_3
284	8	$\alpha_3'\, e_3 - \alpha_2'\, e_2$	$\alpha_3'\, e_3 - \alpha_2\, e_2$
285	11	$\alpha_2\, \beta_2\, (e_2\, e_2)$	$\alpha_2\, \beta_2\, (e_2\, e_1)$
287	15	$(e_2\, e_3)$	$(e_3\, e_3)$
288	9	$\alpha_{11},\ \alpha_{nn}$	$a_{11},\ a_{nn}$
288	17	$(e_3\, e_1) - \alpha_1\, \alpha_2$	$(e_3\, e_1 - \alpha_1\, \alpha_2)$
297	4	z^4	$\frac{a^2}{c^2}\, z^4$
298	ùltima	$A^0{}_0A$	$A_0{}^0A$

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
299	14	$H'm$	Hm
299	18	H y K_0	H' y K
299	20	K'	K'_0
301	1	α	x
301	3	$\mp\sqrt{\ldots}$	$\mp x\sqrt{\ldots}$
301	4	$(x+2a)x$	$(x+2a)$
302	20	S_x	S_n
311	28	$\frac{BB'}{BO}$	$\frac{BO}{BB'}$
312	11		*(H. Brocard).*
328	5	AT	AS
333	fór.la (27)	$x_2\,x_3$	$x_3\,x_3$
335			En las fórmulas (39) y (39a) el exponente 2 debe estar sublineado.
336	4	extérieur	intérieur
336	fór.la (43)	$e_1 = \mid(e_2\,e_3)$	$e_1 \mid = (e_2\,e_3)$.
340	17	$+xy$	$-xy$ (en la 2.a fórmula)
340	17	$x+y$	$x-y$
341	6	$v = AB\,(A+B)$	$v = AB\,(A-B)$

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DONATIVO
DE LA
BIBLIOTECA NACIONAL
DE MADRID
1940

DIRECTOR

Don Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

en la

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TOMO III.--AÑO 1893

ZARAGOZA

Imprenta de C. ARIÑO, Coso, núm. 100, bajos

1893