Año II Zaragoza 15 Septiembre de 1892 Núm. 21

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

M. A. SCHIAPPA MONTEIRO

PROFESSEUR Á L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE LISBONNE

THÉORÈME.— p *désignant un nombre premier plus grand que 41, et* r *le nombre premier minimum, en faisant exception de l'unité, qui satisfait à la congruence*

$$p \equiv r \mp (mod.\ 40) \tag{1}$$

démontrer que la congruence

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (mod\ .\ p) \tag{2}$$

est vraie, quand

$$10^{\frac{r-1}{2}} \equiv 1\ (mod\ .\ r) \tag{3}$$

DÉMONSTRATION. — Comme on sait, m étant un nombre *positif* pris pour *module,* ou pour terme de comparaison, on peut exprimer un nombre quelconque p sous la forme

$$p = m\ .\ q + c \qquad (1)_c$$

où c, quel que soit son signe, représente le *résidu* de p pour le *module m.*

Si l'on fait, donc, $c = + r$, on a l'équation

$$p = m\ .\ q + r \qquad (1)_r$$

où r, étant inférieur à m, ou tombant entre 0 et m, représentera le *résidu minimum positif* de p pour le module m.

De même, en faisant $c = - r'$, on a l'équation

$$p = m\ .\ q' - r' \qquad (1)_{r'}$$

où r' tombe entre o et m, $-r'$ étant alors le ***résidu minimum négatif*** de p pour le module m.

Le résidu étant r, comme l'équation $(1)_r$ peut avoir la forme

$$p = m(q+1) - (m-r), \tag{$(1)'_r$}$$

le résidu minimum négatif sera

$$-r' = -(m-r), \tag{4}$$

d'où

$$r + r' = m; \tag{5}$$

ce qui donne le moyeu de passer immédiatement de l'un des résidus à l'autre, ou de calculer le module, les résidus minima étant connus.

Les équations $(1)_r$ et $(1)'_r$ donnant

$$q < \frac{p}{m} < q+1, \tag{6}$$

on a l'habitude de représenter q par $E\left(\frac{p}{m}\right)$, pour dire l'entier de $\frac{p}{m}$.

Quand p est multiple de m, on a $E\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{p}{m}$.

Gauss et les autres mathématiciens allemands emploient le signe $\left[\frac{p}{m}\right]$.

Ces notions étant données, voyons comment (selon nous) l'illustre mathématicien danois Mr. Birger Hansted, qui a proposé cette question, déterminerait le module de la congruence (1).

Soient donc, 3 et 37 les deux moindres nombres premiers, qui satisfont à la congruence (3), on aura

$$r = 3 \quad \text{et} \quad r' = 37$$

et par suite

$$r + r' = 40. \tag{7}$$

D'après cela, les formules $(1)_r$ et $(1)'_r$ deviendront

$$p \equiv +r \ (mod.\ 40) \tag{$(1)_1$}$$

et

$$p \equiv -r' \ (mod.\ 40), \tag{$(1)_2$}$$

ou

$$p - r \equiv 0 \ (mod.\ 40) \tag{$(1)'_1$}$$

et

$$p + r' \equiv 0 \ (mod.\ 40). \tag{$(1)'_2$}$$

Telles sont, par suite, les congruences qui répondent à la congruence donnée (1), quand on considère séparément les deux résidus minima.

En partant maintenant de ces relations entre les nombres p, r, r' et *10*, on va voir que la congruence (2) est vraie.

En effet, *si* a *représente un nombre premier non divisible par le nombre premier* p, on a, en vertu du théorème de Fermat:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod. p.), \tag{8}$$

et comme

$$a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right), \tag{9}$$

l'une des congruences

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \ (mod. p) \tag{10}$$

ou

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (mod. p) \tag{11}$$

sera vraie.

En supposant a positif et inférieur à *p, si parmi les restes des nombres*

$$a, 2a, 3a, ..., \frac{p-1}{2} a$$

divisés par p, *il y en a* n, *qui surpassent* $\frac{p-1}{2}$, *on aura* (*)

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n \ (mod. p). \tag*{$(1)_n$}$$

De plus, *si le nombre positif* $a < p$ *est égal à* $2\alpha + \rho$, ρ *étant* 0 *ou* 1, *selon que* a *est* PAIR *ou* IMPAIR, *la vraie valeur de* n *de la formule* $(1)_n$ *sera donnée par la formule* (**):

$$n = -\text{E}\left(\frac{p}{2a}\right) + \text{E}\left(\frac{2p}{2a}\right) - \text{E}\left(\frac{3p}{2a}\right) + \ldots\ldots + \text{E}\left(\frac{2\alpha p}{2a}\right) \tag{12}$$

Ainsi, pour démontrer que la congruence (2) est vraie, il suffit de prouver que, suivant les conditions établies, le nombre n est toujours *pair*.

Dans le cas considéré, soient $a=10$, ou $\alpha=5$, $\rho=0$, et 43 la moindre valeur du nombre premier p, donné par la congruence (1), et $(1)_2$, on a $a < p$ et la formule (12) donne

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \text{E}\left(\frac{p}{2}\right) + \text{E}\left(\frac{p}{5}\right) + \text{E}\left(\frac{2p}{5}\right) + \text{E}\left(\frac{p}{10}\right) + \text{E}\left(\frac{3p}{10}\right) \\ - \left[\text{E}\left(\frac{p}{4}\right) + \text{E}\left(\frac{p}{20}\right) + \text{E}\left(\frac{3p}{20}\right) + \text{E}\left(\frac{7p}{20}\right) + \text{E}\left(\frac{9p}{20}\right) \right] \end{array} \right\} \tag{13}$$

Soient d'abord

$$p=40\,q+3;\ 2p=80q+6;\ 3p=120q+9;\ 7p=280q+21;\ 9p=360q+27;$$

(*) Voy. *Cours d'Algèbre supérieure*, par J. A. Serret, t. II; *Essai sur la théorie des nombres* par A. M. Legendre, etc.

(**) Voy. Ces mêmes ouvrages.

il vient

$$E\left(\frac{p}{2}\right)=20q+1;\ E\left(\frac{p}{5}\right)=8q,\ E\left(\frac{2p}{5}\right)=16q+1;\ E\left(\frac{p}{10}\right)=4q;\ E\left(\frac{3p}{10}\right)=12q;$$

et

$$E\left(\frac{p}{4}\right)=10q;\ E\left(\frac{p}{20}\right)=2q;\ E\left(\frac{3p}{20}\right)=6q;\ E\left(\frac{7p}{20}\right)=14q+1;\ E\left(\frac{9p}{20}\right)=18q+1;$$

donc, en substituant dans la formule (13) ces valeurs des *quotients incomplets* relatifs au résidu minimum positif 3, il vient

$$n=60q+2-(50q+2)=10q; \tag{14}$$

Secondement, soient

$$p=40q'-37;\ 2p=80q-74;\ 3p=120q'-111;\ 7p=280q'-259;\ 9p=360q'-333;$$

on aura

$$E\left(\frac{p}{2}\right)=20q'-18;\ E\left(\frac{p}{5}\right)=8q'-7;\ E\left(\frac{2p}{5}\right)=16q'-14;$$

$$E\left(\frac{p}{10}\right)=4q'-3;\ E\left(\frac{3p}{10}\right)=12q'-11;$$

et

$$E\left(\frac{p}{4}\right)=10q'-9;\ E\left(\frac{p}{20}\right)=2q'-1;\ E\left(\frac{3p}{20}\right)=6q'-5;$$

$$E\left(\frac{7p}{20}\right)=14q'-12;\ E\left(\frac{9p}{20}\right)=18q'-16;$$

et en substituant ces valeurs des quotients incomplets relatifs au résidu minimum négatif 37, on obtient

$$n=60q'-53-(50q'-43)=10q'-10=10\,(q+1)-10=10q; \tag{15}$$

d'où il suit que n est toujours *pair*, quand les conditions établies auront lieu.

Donc, etc., etc.

Autrement.— Les congruences (2) et (3) ou les équations équivalentes

$$10^{\frac{p-1}{2}}=p.x+1 \tag{2'}$$

et

$$10^{\frac{r-1}{2}}=r.y+1 \tag{3'}$$

donnent

$$10^{\frac{p-r}{2}}=\frac{p.x+1}{r.y+1} \tag{16}$$

ou

$$(r \,.\, y+1)\, 10^{\frac{p-r}{2}} = p \,.\, x+1 \tag{17}$$

et eu égard à la congruence (1)'₁ , ou à l'équation équivalente

$$p - r = 40 \,.\, q, \tag*{(1)'$_1$}$$

il vient

$$\frac{p-r}{2} = 20 \,.\, q \tag{18}$$

et, par suite,

$$(r \,.\, y+1)\, 10^{20 \,.\, q} = p \,.\, x+1, \tag{19}$$

donc

$$10^{20 \,.\, q+1} = p \,.\, x+1 \tag{20}$$

ou

$$10^{20 \,.\, q+1} \equiv (mod.\, p). \tag{21}$$

En regardant à présent la congruence (2) et la congruence

$$10^{\frac{r'-1}{2}} \equiv 1\ (mod.\, r'), \tag*{(3)'}$$

ou les équations équivalentes

$$10^{\frac{r'-1}{2}} = p \,.\, x' + 1 \tag*{(2)'$_1$}$$

et

$$10^{\frac{r'-1}{2}-1} = r' \,.\, y' + 1 \tag{22}$$

on obtiendra

$$10^{\frac{p+r'}{2}} = (p \,.\, x' + 1)\,(r' \,.\, y' + 1), \tag{22}$$

et étant

$$r' \,.\, y' + 1 = 10^{18} \tag{23}$$

on trouvera

$$10^{\frac{p-1}{2}-19} = p \,.\, x' + 1; \tag{24}$$

mais la congruence $(1)'_2$, ou l'équation équivalente

$$p + r' = 40 \,.\, q' \tag*{(1)'$_2$}$$

donnant

$$\frac{p+r'}{2} = 20 \,.\, q' \tag{25}$$

on aura

$$10^{20\,.\,q'-19} = p\,.\,x' + 1 \qquad (26)$$

ou

$$10^{20\,.\,q'-19} = p\,.\,x + 1 \qquad (27)$$

et en mettant au lieu de q' sa valeur $q+1$, il vient encore

$$10^{20\,.\,q'+1} = p\,.\,x + 1, \qquad (9)$$

Ainsi $20^{\frac{p-1}{2}}$ sera un multiple de $10^{\frac{r-1}{2}}$, et la congruence (2) sera vraie, lorsqu'il en sera de même de la congruence (3), toutes les fois que les relations considérées entre les quantités p, r, r', et 10 auront lieu

$q\,.\,e\,.\,d\,.$

Obs.— Comme on sait, le nombre $p\,.\,x+1$, par rapport à la *base* 10, a pour logaritme entier $20\,.\,q+1$.

Nous pourrions encore donner à cette étude une autre forme plus générale et pousser ainsi plus loin nos humbles recherches, mais nous avons cru devoir être préférable de présenter à la suite une telle étude tant à fait indépendante du cas special que nous venons de considérer.

UN TEOREMA GEOMÉTRICO

POR D. ATANASIO LASALA

Catedrático del Instituto de Bilbao.

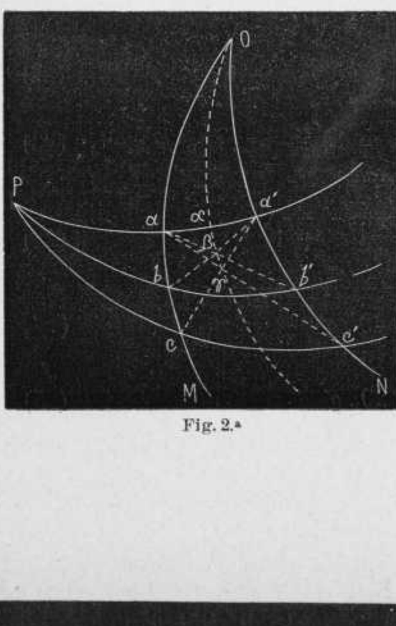


Fig. 2.ª

8. 5.ª—*Si dos arcos de círculo máximo concurrentes en* O *se cortan por otros dos arcos fijos* Paa' y Pbb', *todo arco* Pcc', *movil alrededor de* P, *determina en los primeros segmentos tales, que la razón*

$$\frac{sen\ ca}{sen\ cb} : \frac{sen\ c'a'}{sen\ c'b'}$$

es constante.

Toda vez que esta razón equivale á

$$\frac{sen\ \mathrm{P}a}{sen\ \mathrm{P}b} : \frac{sen\ \mathrm{P}a'}{sen\ \mathrm{P}b'}.$$

9. Observación.—Dados cuatro arcos de un haz de concurrentes en P, y considerando dos de ellos Paa' y Pbb' como fijos, y los otros Pcc' y Pdd' como dos posiciones de un arco móvil alrededor de P, tendremos

$$\operatorname{sen}(abcd) = \operatorname{sen}(a'b'c'd');$$

luego *un haz de arcos concurrentes en* P *determina en dos arcos transversales dos divisiones homográficas.*

Considerando como fijos los arcos Paa' y Pbb', y el Pcc' como móvil, puede hallarse una expresión sencilla de la razón constante

$$\frac{\operatorname{sen} ca}{\operatorname{sen} cb} : \frac{\operatorname{sen} c'a'}{\operatorname{sen} c'b'} = \lambda.$$

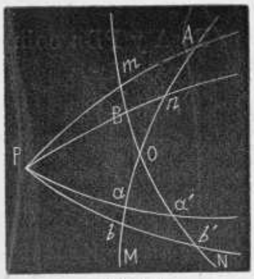


Fig 3.a

Sea PAm (*Fig. 3.a*) una posición del arco móvil determinada por un punto A situado á 90° del medio de ab (1); la razón λ será

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{A}a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}b} : \frac{\operatorname{sen} ma'}{\operatorname{sen} mb'},$$

pero

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{A}a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}b} = 1; \quad \text{luego} \quad \lambda = \frac{\operatorname{sen} mb'}{\operatorname{sen} ma'}.$$

Sea PBn otra posición del arco móvil determinada por un punto B situado á 90° del medio de $a'b'$; tendremos

$$\lambda = \frac{\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} nb} : \frac{\operatorname{sen} \mathrm{B}a'}{\operatorname{sen} \mathrm{B}b'},$$

pero

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{B}a'}{\operatorname{sen} \mathrm{B}b'} = 1; \quad \text{luego} \quad \lambda = \frac{\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} nb}.$$

Igualando los valores de λ, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} mb'}{\operatorname{sen} ma'} = \frac{\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} nb},$$

igualdad que está confirmada por esta otra

$$\operatorname{sen}(b'a'm\mathrm{C}) = \operatorname{sen}(ba\mathrm{A}n).$$

Si suponemos el punto P á 90° del medio de aa', la razón

$$\lambda = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{P}a}{\operatorname{sen} \mathrm{P}b} : \frac{\operatorname{sen} \mathrm{P}a'}{\operatorname{sen} \mathrm{P}b'}$$

(1) También pudiera ser A el punto medio de ab; λ que siempre es positiva, sería igual á $-\dfrac{\operatorname{sen} mb'}{\operatorname{sen} ma'}$.

se reduce á $$\lambda = \frac{\text{sen } Pb'}{\text{sen } Pb}.$$

Si P dista 90° del medio de aa' y del medio de bb', condiciones á las que siempre es preciso someter los arcos OM y ON, tendremos $\lambda=1$, por tanto

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'};$$

luego, en este caso, *los arcos que parten de* P *dividen á los arcos* ab *y* a'b' *en segmentos cuyos senos son proporcionales.*

Además $$\frac{\text{sen } mb'}{\text{sen } ma'} = \frac{\text{sen } na}{\text{sen } nb} = \lambda = 1;$$

luego los puntos m y n son homólogos, y los arcos PmA y PBn coinciden.

Si, en el mismo supuesto, el arco móvil pasa por O, será

$$\frac{\text{sen } Oa}{\text{sen } Ob} = \frac{\text{sen } Oa'}{\text{sen } Ob'}.$$

10. 6.ª *Si dos arcos de círculo máximo concurrentes en* O *se cortan por un arco fijo* Paa', *y por otro* Pcc', *móvil alrededor de un punto* P *del primero, la razón*

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cO} : \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'O}$$

es constante é igual á

$$\frac{\text{sen } Pa}{\text{sen } Pa'}$$

Si P está á 90° del medio de aa', la constante λ vale 1, los puntos m y n son homólogos, el arco PmA coincide con el PBn, y todo arco que parte de P divide á los arcos Oa y Oa' en segmentos cuyos senos son proporcionales.

Si P estuviese entre a y b, la constante sería negativa; si fuese el medio de ab, sería $\lambda = -1$. A y B, ó sea n y m podrían también ser los puntos medios de ab y $a'b'$.

11. 7.ª Recíprocamente: *Si dos arcos concurrentes en* O *se cortan por otros varios, uno de ellos* aa' *considerado como fijo, de tal modo que la razón*

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cO} : \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'O}$$

sea constante, todos los arcos concurren en un mismo punto tal, que la razón de los senos de sus distancias esféricas á a y a' *es igual á dicha constante.*

Llamando P al punto en que el arco cc' corta al aa', será

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cO} : \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'O} = \frac{\text{sen P}a}{\text{sen P}a'};$$

y como sólo el punto P divide á aa' en esta razón, todos los arcos tales como cc' pasarán por P.

Si la anterior razón vale 1 ó -1, el punto P estará á 90º del medio de aa', ó será el medio de aa'.

(Se continuará).

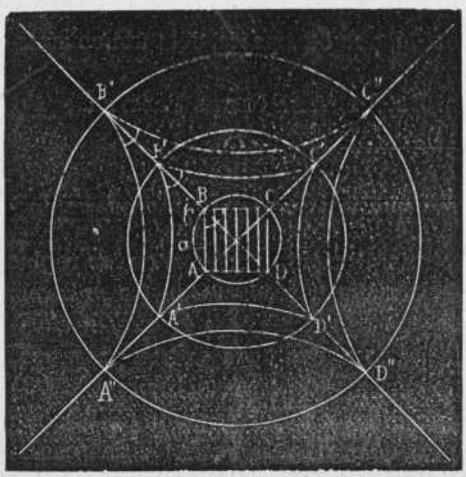
BIBLIOGRAFÍA

Dodgson.—CURIOSA MATHEMATICA.—Parte I. *A new theory of parallels.*—London, 1890. Tercera edición.

Hace más de un año cayó en mis manos este librito, y desde luego se me ocurrió hacer sobre él algunas observaciones que hoy formulo. Es, en efecto, sumamente curioso, y su principal mérito estriba en hacer ver la mútua dependencia existente entre el postulado euclídeo referente á las parelalas y ciertas proposiciones sobre áreas. Mas estas proposiciones ofrecen, como aquí me propongo mostrar, las mismas dificultades para ser admitidas. He aquí el porqué:

Supone el autor, como base de su trabajito, que

En todo círculo, el tetrágono regular inscripto tiene área mayor que la de cualquier segmento de los del círculo, que cae fuera de él. Es decir, que el cuadrado ABCD es mayor que el segmento Aα βB.



Esta proposición es comprobable *experimentalmente* y de un modo sencillísimo para los círculos que en la práctica se nos presentan. Pero prolonguemos indefinidamente el radio del círculo trazando siempre círculos concéntricos. Entonces, bajo el punto de vista No-Euclídeo, los ángulos de los tetrágonos regulares irían sucesivamente disminuyendo á medida que sus lados aumentasen, ofreciendo la figura una imagen de lo que entonces acontecería. La relación del área del tetrágono á la de su segmento iría disminuyendo indefinidamente también. Llegaría un momento en que el tetrágono sería menor que el segmento.

En la primera edición de su obrita tomaba el autor como base el axioma: *En todo círculo, el exágono regular inscripto es mayor que cualquiera de los segmentos que caen fuera de él.*

Pero este axioma ofrece idénticos inconvenientes que el adoptado actualmente. Ya Gauss se había servido, me parece, de una imagen análoga á la de mi figura, á propósito de otra demostración falsa del postulado.

En apéndices coloca el autor algunas consideraciones acerca del postulado euclídeo y de los infinitamente pequeños y grandes. Con respecto á este punto diré que, en primer lugar, las ideas sobre los infinitamente pequeños actuales son diferentes entre los matemáticos, siendo este un punto sumamente delicado y espinoso que, á ser posible, debe siempre evitarse. En segundo lugar, ya Gauss ha indicado considerar al infinito como una cantidad determinada (*vollendeten*), implica grandes riesgos, y esta idea ha sido puesta de relieve, desde Bolzano á Cantor, por muchos distinguidos matemáticos. A mi modo de ver, nada puede probarse de este apéndice. El mismo autor declara que su modo de ver es opinable.

Al final se añaden críticas justas de alguna de las demostraciones antes dadas del axioma euclideo.

Es, en resumen, la obra en cuestión, un hermoso librito que hace desear la segunda parte, ya anunciada, de *Curiosa mathematica*. Su autor es harto ventajosamente conocido, por otra parte, del público matemático.

PR. DR. VENTURA REYES PRÓSPER.

PREMIERS PRINCIPES D'ALGÈBRE *par C. A. Laisant et Elie Perrin, avec plus de 1200 exercices gradués,* 1892, Delagrave, París.

El Algebra es un lenguaje de una precisión perfecta, cuyas reglas están ligadas entre sí con admirable rigor; y *presentar los primeros elementos de la sintaxis de esta lengua del cálculo, con la mayor claridad y precisión,* es el objeto que en esta nueva obra se han propuesto principalmente sus autores, y en verdad que lo han conseguido de una manera que nada deja desear, pues en 336 páginas en 8.º, han hecho una síntesis rigurosa de esta colección de reglas y de principios del cálculo, que forman el hilo conductor del análisis en todas sus ramificaciones.

De tres partes destinadas respectivamente al *cálculo literal,* al *cálculo por ecuaciones,* á las *progresiones, logaritmos y aplicaciones,* seguidas de un *Apéndice,* consta la obra.

Los autores con una concisión que da cierta elegancia y sencillez á su obra, enuncian las definiciones, los teoremas y las reglas, seguidas de sus demostraciones hechas con una sobriedad que nada quita al rigor, sin digresiones, rodeos ni incidentes que distraigan en lo más mínimo la atención del encadenamiento que conduce á la inteligencia en *línea recta* hacia su objeto, presentando la *gramática* de esta lengua del análisis.

Pero si la sencillez es el caracter dominante de la obra que la hace muy adaptable para el principiante, no deja de ser también util á alumnos que se preparan para ciertas carreras especiales, pues se hallan también algunas discusiones llevadas hasta los menores detalles muy propias para ejercitar y educar á las inteligencias de estos alumnos en el arte de vencer las resistencias del análisis matemático.

Entre estos ejercicios citaremos los que tratan de *estudiar las variaciones del binomio* $ax + b$, y del trinomio de 2.° grado, muy notable esta última por el detalle como por la preparación que da para otras teorías superiores, las consecuencias que deduce sobre la sustitución por x de ciertos números α y β etc., la determinación de los límites entre los que ha de variar el *parámetro,* para que la ecuación de segundo grado con respecto á éste tenga raíces *imaginarias,* ó *iguales* ó *reales* y *distintas.*

La divisibilidad por $(x-a)\,(x-b)$, la continuidad de la función $ax^2 + bx + c$. La representación gráfica de las funciones y aplicación al 1.° y 2.° grado. Las potencias de $x+1$. El triángulo aritmético de Pascal, las potencias de $x+a$, permutaciones, coordinaciones y combinaciones son cuestiones que reservan los autores para el Apéndice.

Antes de terminar diremos, que los numerosos ejercicios graduados, muchos de ellos nuevos, otros elegidos entre los grandes talentos matemáticos y los *ejercicios diversos propuestos* con que termina la obra, con objeto de familiarizar al lector con ciertos artificios y desarrollar la sagacidad del espíritu para vencer dificultades, constituyen una riquísima colección que por sí sola haría recomendable la obra.

Gino Loria.—Nicola Fergola é la scuola di matematici che lo ebbe á duce, Génova, 1892.

Esta nueva obra del profesor de la Universidod de Génova, señor Gino Loria, tiene por objeto evocar el recuerdo entre los aficionados á los estudios matemáticos de la parte activa que Italia tomó en el renacimiento de los estudios geométricos á principios de este siglo, y cuyos resultados se deben á la escuela napolitana representada hasta el año 1822 por Nicolás Fergola y que se continuaron por sus discípulos Annibale Giordano, Vincenzo Flauti, Felice Giannattasio, Giuseppe Scorza, Francesco Bruno, etc., citando el autor en el Prefacio las siguientes frases de Chasles: «El fervor por esta geometría que tanto brillo ha dado á las ciencias matemáticas hasta hace cerca de un siglo, sobre todo en la patria de Newton, se había debilitado después, y habría casi desaparecido, si los geómetras italianos no le hubiesen quedado fieles. Se debe en nuestra época al célebre Fergola, y á sus discípulos Bruno, Flauti, Scorza, varios escritos importantes sobre el análisis geométrico de los antiguos, que en ellos se encuentra restablecido en su pureza original» (1).

La obra del Sr. Gino Loria tiene por objeto describir con interesantes desarrollos este brillante episodio de la historia de las matemáticas en Italia; y el lector puede compenetrarse de aquel estilo especial que acompañó á los más fundamentales descubrimientos geométricos y que hoy se recuerdan con los nombres de Newton, Cramer, Côtes, Moivre, etc., á que van unidos.

Se ocupa el Sr. Gino Loria; 1.º de la teoría geométrica de las secciones cónicas, formadas con los materiales en que basaba Fergola sus lecciones de Geometría superior, publicadas por Flauti é ilustrada por Ginnattasio con la historia de las secciones cónicas, de manera que puede considerarse esta obra como el fruto de los tres más ilustres partidarios de la idea fergoliana; 2.º *sobre la cuadratura de la hipérbola;* 3.º *una reivindicación* en que se atribuye el análisis geométrico á la escuela pitagórica; 4.º *Teoria analítica de las secciones cónicas;* 5.º *El tratado analítico de los lugares sólidos.*

El capítulo II tiene por objeto: *Aplicaciones del teorema de Tolomeo.*

El capítulo III trata de *los métodos recomendados por Fergola para resolver las cuestiones geométricas, de los problemas de las inclinaciones generalizadas,* problemas que tenían gran importancia en la antigüedad y del *método de conversión.*

Capítulo IV. *Problemas particulares resueltos por Fergola y sus discípulos,* que comprende: *cuadratura y cubatura de ciertas superficies, el problema de Cramer. Un problema sobre el hiperboloide de rotación de una hoja. Los contactos circulares y esféricos. Problemas sobre la pirámide triangular. Solución de problemas de Geometría debidos á*

(1) *Aperçu historique,* etc., pág. 46.

F. Bruno. Solución geométrica del problema de las tres ó de las cuatro rectas.

Capítulo V. Algunos puntos de análisis infinitesimal tratados por Fergola y Flauti.

Capítulo VI. Breves indicaciones de los resultados debidos á la escuela napolitana sobre el estudio matemático de los fenómenos naturales.

Capítulo VII. El curso de matemáticas proyectado y en parte llevado á la práctica por Flauti.

Termina la obra con el capítulo IX, destinado á designar el lugar que en la historia de las matemáticas en Italia corresponde á la escuela de Nicolás Fergola.

Z. G. de G.

NOTA MATEMÁTICA

Tenemos la satisfacción de publicar las siguientes observaciones con que se ha dignado favorecernos el sabio director del *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Dr. E. Lampe, concernientes al artículo de M. Marchand, publicado en este periódico, *Sur la rectification des arcs des courbes dites Limaçons de Pascal*, trabajo que dejó entre sus papeles inéditos el malogrado escritor y antiguo alumno de la Escuela Politécnica de Paris, acaso sin completar su pensamiento y sin intención de publicarlo.

«.....La propiedad indicada por M. Marchand pertenece á todas las curvas de la clase de epicicloides y forma uno de sus caracteres muy conocidos.

Sean r el radio del círculo base de la rotación, ρ el del círculo que rueda, $r:\rho=m$, δ la distancia del punto generador al centro de la circunferencia en movimiento, φ el ángulo comprendido en el centro del círculo fijo por los puntos de contacto. Se sabe que se tendrá entonces

$$x=\rho\,(m+1)\cos\varphi-\delta\cos(m+1)\varphi,$$
$$y=\rho\,(m+1)\,\mathrm{sen}\,\varphi-\delta\,\mathrm{sen}\,(m+1)\varphi,$$

de donde se obtiene fácilmente

$$ds=(m+1)(\rho+\delta)\,d\varphi\sqrt{1-\frac{4\rho\delta}{(\rho+\delta)^2}\cos^2\frac{m\varphi}{2}}$$

haciendo

$\frac{m\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$, se obtiene, integrando de $\varphi = o$ á $\varphi = \varphi$

$$s = \frac{2(m+1)}{m}(\rho + \delta) \int_x^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

donde se ha hecho $k^2 = \frac{4\rho\delta}{(\rho+\delta)^2}$.

Este módulo k^2 no cambia cuando se hace $\delta = n\rho$ ó bien $\delta = \frac{1}{n}$. La misma integral elíptica de segunda especie pertenece, pues, á dos epicicloides distintas, y es fácil ver que todas las reflexiones del señor Marchand conciernen también á este género, más general, de curbas que contienen á los caracoles de Pascal como un caso muy especial. (Véase con este motivo las colecciones de problemas publicados en Inglaterra).»

E. Lampe.

REVISTA BIBLIOGRAFICA

La necesidad imperiosa de que no sufrieran retraso importantes escritos con que han favorecido á El Progreso Matemático algunos de sus distinguidos colaboradores, han hecho aplazar indefinidamente el dar cuenta de las novedades que han aparecido, ya en publicaciones periódicas, ya en obras especiales; y en este número procuramos suplir en parte esta falta, haciendo indicaciones, aunque no tan amplias y detalladas con fuera nuestro propósito de algunos trabajos sobre que deseamos llamar la atención de los lectores de nuestro periódico.

Dejamos interrumpidas las noticias referentes al *Journal de mathém élém et spéciales* de M. de Longchamps en la página 184 del tomo I, y terminamos dicha reseña citando los artículos: *Transformation par inversion symétrique* de M. Bernés, *Sur la méthode de transformation de M. Schoute* por M. Vigarié y *Sur la perspective d'une figure plane* por M. E. Laisant, que se han continuado durante el año de 1891.

Le trifolium, *par M. H. Brocard*. Entre los notables trabajos publicados en el tomo de *Math. spéciales*, es digna de interés bajo muchos conceptos la citada memoria.

Muchos é importantes resultados sobre el trifolium recto y oblicuo se deben á M. de Longchamps, que los ha publicado, ya en *Journ de mathém spéciales*, ya en su *Géometrie analytique* y en su *Essai sur la Géométrie de la regle*, obras de que se ha dado noticia á los lectores de El Progreso Matemático (t. I pág. 60, t. II pág. 148).

M. de Longchamps ha estudiado el trifolium oblícuo definiéndolo como la podar (g) del hipocicloide de tres retrocesos con relación á un punto de la circunferencia tritangente. M. Brocard, en su notable memoria, además de numerosas propiedades nuevas que da á conocer, se propone estudiar el trifolium independientemente de la noción de podar. Construye el trifolium oblicuo de la manera siguiente:

Por un punto P *de una circunferencia* (v) *se traza una cuerda cualquiera* PR. *Desde el punto* R *como centro, con* RP *como radio, se describe un arco de círculo. Hallar el lugar de sus intersecciones* M,M' *con una paralela* MRM' *á una dirección fija* f.

El lugar (M) *es un trifolium oblicuo.*

Trata sucesivamente de:—Puntos notables del trifolium oblicuo—el trifolium regular—tangente y normal al trifolium oblicuo—el trifolium oblicuo y el hipocicloide triangular—una cuártica trinodal.

Al ocuparse de *triángulos asociados* al trifolium oblicuo, establece la siguiente propiedad, probablemente nueva, del triángulo equilátero:

Se da un triángulo equilátero A"B"C", *la circunferencia circunscripta* D *y un punto* P *de la circunferencia concéntrica* (K) *de radio tres veces menor; se trazan las rectas* DA", DB", DC" *que determinan en la circunferencia descrita sobre* PD *como diámetro los vértices* A, B, C, *de un triángulo equilátero. Las rectas que unen los puntos* A, B, C *á los medios* A,' B,' C' *de los segmentos* PA", PB", PC" *concurren en un mismo punto* Z.

Presenta M. Brocard varias modificaciones á las construcciones del trifolium recto y el folium doble que M. de Longchamps ha publicado en las obras arriba citadas y añade otras construcciones. Por ejemplo: *Supongamos en una circunferencia triángulos inscriptos* PAB, *en los que un vértice* P *es fijo, y un lado* AB *paralelo á una dirección dada* (f); *el lugar de las proyecciones de cada uno de los vértices* A *ó* B *sobre una paralela trazada por el punto* B *ó* A, *á una de las cuerdas* PA, PB, *es un* trifolium oblicuo.

Hace enseguida M. Brocard muy interesantes desarrollos sobre un *modo de transformación geométrica* que representa la construcción del trifolium, partiendo del círculo que de que tambien trató M. de Longchamps en su Geometría analítica, señalando finalmente la necesidad de que el hipocicloide triangular y el trifolium tengan un lugar en la enseñanza clásica con igual título que lo tienen ya las podares del círculo y de la parábola y en los programas de Geometría analítica.

El método de transformación continua *por M. Lemoine.* Este sabio creador y organizador de la Geometría del triángulo, que cada año contribuye á sus progresos con nuevos descubrimientos, presentó en el *Congreso de Marsella* celebrado en el mes de Septiembre del año pasado (véase t. I pág. 291) sus memorias: *Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle.—Transformation continue.—Divers résultats concernant á la Géométrie du triangle*, y también ha publicado en el J. N. S. y en *Mathesis* desarrollos sobre dicho método de transformación durante el transcurso de este año.

«En el Congreso de Limoges, dice M. Lemoine [1], hemos dado numerosas fórmulas relativas al triángulo de las que muchas eran nuevas, y hemos tratado de mostrar la ventaja de su empleo en la Geometría del triángulo; entre estas fórmulas, varias tenían entre sí íntimas analogías, y me había preguntado si existía una ley por medio de la cual, dada una fórmula se pudiesen deducir sus análogas.»

Ya había hallado dicha ley, pero mi demostración, invocando *el principio de Carnot* en la deformación del triángulo, dejaba alguna indecisión, respecto á múltiplos de π, en el valor de los ángulos, después del paso por el infinito de las rectas que los formaban, y buscaba otro medio, cuando M. Laisant, á quien había hablado de mis investigaciones, me dió la solución siguiente muy sencilla y rigurosa.»

Un triángulo ABC está determinado por un lado $BC=a$, siendo la dirección BC la elegida como positiva, y por los ángulos β y γ que forma la dirección BC con las direcciones BA y CA.

Si se designan con A, B, C los ángulos del triángulo, con su significación ordinaria, con b y c los lados, los elementos se hallan determinados por las relaciones:

$$A=\gamma-\beta \quad (1) \qquad B=\beta \quad (2) \qquad C=\pi-\gamma \quad (3)$$

$$b=\frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\gamma-\beta)} \quad (4) \qquad C=\frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\gamma-\beta)} \quad (5)$$

Los demás elementos del triángulo se expresan por medio de éstos; luego toda relación que expresa una propiedad general, tal como

---

(1) *Associacion française pour l'avancement des Sciences*, (1891).

$f(a, b, c, A, B, C) = o$, se convierte, reemplazando en ella b, c, A, B, C por sus valores en la identidad: $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = o$.

Esta identidad es cierta para todos los valores de α, β, γ; reemplacemos sin cambiar α, β por $\pi - \beta$, γ por $\pi - \gamma$, entonces, en virtud de las fórmulas (1), (2), (3), (4), (5), se tendrá:

$$A_1 = \pi - \gamma - \pi + \beta = \beta - \gamma = -A$$

$$B_1 = \pi - \beta = \pi - B$$

$$C_1 = \pi - \pi + \gamma = \gamma = \pi - C$$

$$b_1 = \frac{a \operatorname{sen}(\pi - \beta)}{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)} = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)} = -b$$

$$c_1 = \frac{a \operatorname{sen}(\pi - \gamma}{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)} = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)} = -c$$

por consiguiente, la identidad

$$\varphi(a, \pi - \beta, \pi - \gamma) = o \quad \text{ó} \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = o$$

que corresponde á $\quad f(a, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1) = o, \quad$ nos dará:

$$f(a, -b, -c, -A, \pi - B, \pi - C) = o.$$

Luego en una fórmula cualquiera relativa al triángulo y que contiene los elementos a, b, c, A, B, C, se pueden reemplazar estas cantidades, respectivamente, por $a, -b, -c, -A, \pi - B, \pi - c$, y la nueva fórmula es exacta.

Si en la fórmula dada entran nuevos elementos, como R_1 r_1 r_a, r_b... es preciso hacerles sufrir la transformación resultante de las precedentes; p, $(p-a)$, $(p-b)$ ..... se transforman en $-(p-a)$, $-(p-b)$, $-p$, $(p-c)$ .....»

Dicha transformación no origina siempre una nueva fórmula.

Así, de

$$a = b \cos C + c \cos B, \quad \text{resulta} \quad a = -b \cos(\pi - c) - c \cos(\pi - B)$$

Pero lo más frecuente es que las dé nuevas; así:

$$a(p-a) + b(p-b) + c(p-c) = 2 r \delta$$

da

$$ap + b(p-c) + c(p-b) = 2 r_a \delta_a$$

$$a(p-a) = r(\delta - r_a) \quad \text{da} \quad ap = r_a(\delta_a + 1).$$

A esta transformación la llama M. Lemoine la *transformación continua* en A, obteniendo análogamente la en B, etc.

Además de permitir esta transformación deducir de una fórmula establecida otra ú otras varias, un teorema origina frecuentemente otro ú otros nuevos teoremas, y numerosos ejemplos ofrece M. Lemoine como confirmación de su aserto, advirtiendo de paso que su principio de transformación continua se hallaba contenido implícitamente en un trabajo del malogrado matemático *E. Lucas* (véase P. M. t. I, pág. 291), y que no llamó la atención de los geómetras por ser un poco abstracto.

Entre los varios ejemplos de transformación que cita se hallan que:

La recta del infinito se transforma en ella misma.

Los puntos circulares en el infinito se transforman entre sí.

Si n puntos se hallan en línea recta L, sus transformados se hallan en L_a transformada de L, etc., y como aplicación de esta teoría M. Lemoine ha publicado en el número de Abril último de *Mathesis* (pág. 81-91) 142 fórmulas relativas al triángulo.

También debemos citar con este motivo que M. Aug. Poulain ha principiado á publicar nuevos desarrollos sobre la transformación de M. Lemoine (*Transformation des formules des triangles*. J. M. S. 1892, *Mai, Juin*), partiendo del *teorema fundamental. Dada una relación algébrica y racional entre los lados* a, b, c *de un triángulo cualquiera y las líneas trigonométricas de los ángulos* A, B, C *ó de sus múltiplos algébricos, la relación queda exacta si se sustituyen los ángulos* A, B, *y por otros ángulos, aun negativos, cuya suma sea todavía igual á* π, *y* a, b, c *por cantidades proporcionales á los senos de los nuevos ángulos*, y presentando con generalidad el nuevo método mediante el concepto del *conexo baricéntrico* de un punto M_1 cuyas cordenadas baricéntricas son:

$$\alpha : \beta : \gamma = f_1 (A, B, C) : f_2 (A, B, C) : f_3 (A, B, C),$$

con relación á los ángulos A', B', C' cuya suma es igual á π, es decir, el punto M' obtenido acentuando las letras α, β, γ, y haciendo la transformación conexa sobre sus valores f (A, B, C),... lo que da

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = f_1 (A', B', C') : f_2 (A', B' C') : f_3 (A', B', C')$$

y llega á definir la *línea conexa baricéntrica* de una línea $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$, y á deducir entre otros corolarios que:

La intersección de dos líneas tiene por conexa la intersección de las líneas conexas.

Si tres rectas son concurrentes también lo son sus conexas.

Dos figuras homológicas se transforman en líneas homológicas, etc.

Es digna también de especial mención la importante y extensa memoria de M. Bernés, titulada *Transformation par inversion symetrique*, que continúa publicándose en el periódico de M. Longchamps

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONÓMICAS. El periódico que publica en Oporto el Sr. Gomes Teixeira contiene en sus últimos cuadernos los artículos siguientes:

Remarque sur certaines équations differentielles, par M. A. Gutzmer.

Sobre o resto da formula de Taylor, por J. Bruno de Cabedo.

Sobre o teorema d'Euler-Lambert, por Duarte Leite.

Sobre o desenvolvimiento das funçoes em serie ordenada segundo as potencias dos senos e cosenos, por F. Gomes Teixeira.

Nouvelles remarques sur divers articles concernant la théorie des séries, par M. E. Cesáro.

Sur l'application d'un developpement des fonctions implicites a une extension du problème universel de Wronski, par M. A. Bassani.

Y otros interesantes trabajos de los señores Laisant, Lerch, Pirondini, juntamente con *Notas sobre las funciones elípticas,* del Sr. Gomes Teixeira, y numerosas reseñas bibliográficas.

RIVISTA DI MATEMATICA *diretta da G. Peano.* La Revista ha publicado en el corriente año, entre otros, los siguientes artículos:

Alcune applicazione cinematiche della teoria dei vettori, di F. Castellano.—*Construzioni baricentriche,* per E. Cesáro.—*Sopra la compatibilitá o incompatibilitá di più equacioni di primo grado fra più incognite,* per A. Capelli.—*Sopra un metodo generale di construzioni in geometria descrittiva,* per A. del Re.—*Sulla imposibile coesistenza della univocitá e della continuitá nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un número differente di dimensioni,* per Luigi Milesi.—*Sulla teoria della curvatura delle superficie,* nota di Gino Loria.

El Sr. Peano ha continuado trabajando en su empresa de hacer prosperar el empleo de las notaciones simbólicas, especialmente las del álgebra de la lógica, y aplica sus notaciones (de las que ya nos hemos ocupado, P. M., tít. II, págs. 26-23, 49-53), en su artículo *Sommario del libro X d'Euclide.* También emplea estas notaciones en su nota: *Dimostrazione dell imposibilitá di segmenti infinitesimi constanti.* Así

$$p \varepsilon \mathrm{P} \,.\, \supset . \, op \varepsilon \mathrm{S}$$

expresa que: Si p es un punto de la semirecta, op es un segmento limitado.

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset . \, u+v = \mathrm{o}\,(ou+ov)$$

significa que: Siendo u y v dos segmentos limitados (terminados), el segmento $u+v$ es el lugar de los términos de los varios segmentos que se obtienen sumando un segmento cualquiera terminado en un punto de u con un segmento cualquiera terminado en un punto de v.

Además, en su Revista la Redacción hace un llamamiento á los lectores y aficionados á estos estudios con objeto de llevar á la práctica la gran obra de coleccionar las fórmulas y teoremas de las ciencias matemáticas, al advertir cuán difícil es semejante colección, y cuánto se facilita mediante el empleo de las notaciones de la lógica matemática, y reconociendo que tan vasta empresa exige la colaboración de varios y es irrealizable para uno solo. Esta colección de fórmulas ha comenzado ya á publicarse (1).

CUESTIONES RESUELTAS

Nota sobre la cuestión 52 por M. H. Brocard.

La muy elegante solución del Sr. Schiappa Monteiro me parece que puede completarse por algunas indicaciones que acaso tengan interés.

Supongamos trazada la hipérbola equilátera (Σ) MM'NN' (pág. 234). La circunferencia AMBN que pasa por los puntos M, N diametral-

(1) Tan notable para los progresos en el estudio hemos creído el empleo de notaciones simbólicas, que en nuestro *Tratado de Aritmética* (1884, pág. 40) decíamos:

49. *Expresiones simbólicas en los razonamientos.*— Conviniendo, para la claridad y comprensión sintética de los razonamientos matemáticos el empleo del menor número posible de palabras, ó sustituir al lenguaje ordinario la forma esquemática, es decir, simbólica, que brevemente condensa ó reduce á lo esencial los razonamientos, emplearemos las siguientes notaciones abreviadas.

La expresión	*Léase*
$\frac{\dot{}}{m}\ \frac{\dot{}}{mn}\ \frac{\dot{}}{m \text{ y } n}$.	Múltiplo de m, de $m.n$, de m y n.
$\ddagger\ \dot{m}$	No es igual á múltiplo de m.
$\frac{:}{m}\ \frac{:}{mn}\ \frac{:}{m \text{ y } n}$.	Divisor de m, de $m.n$, de m y n.
$\ddagger\ \overset{:}{m}$	No es igual á divisor de m.

. . . .

50 Teorema.—*Si un número primo absoluto no divide á otro, los dos son primos relativos*

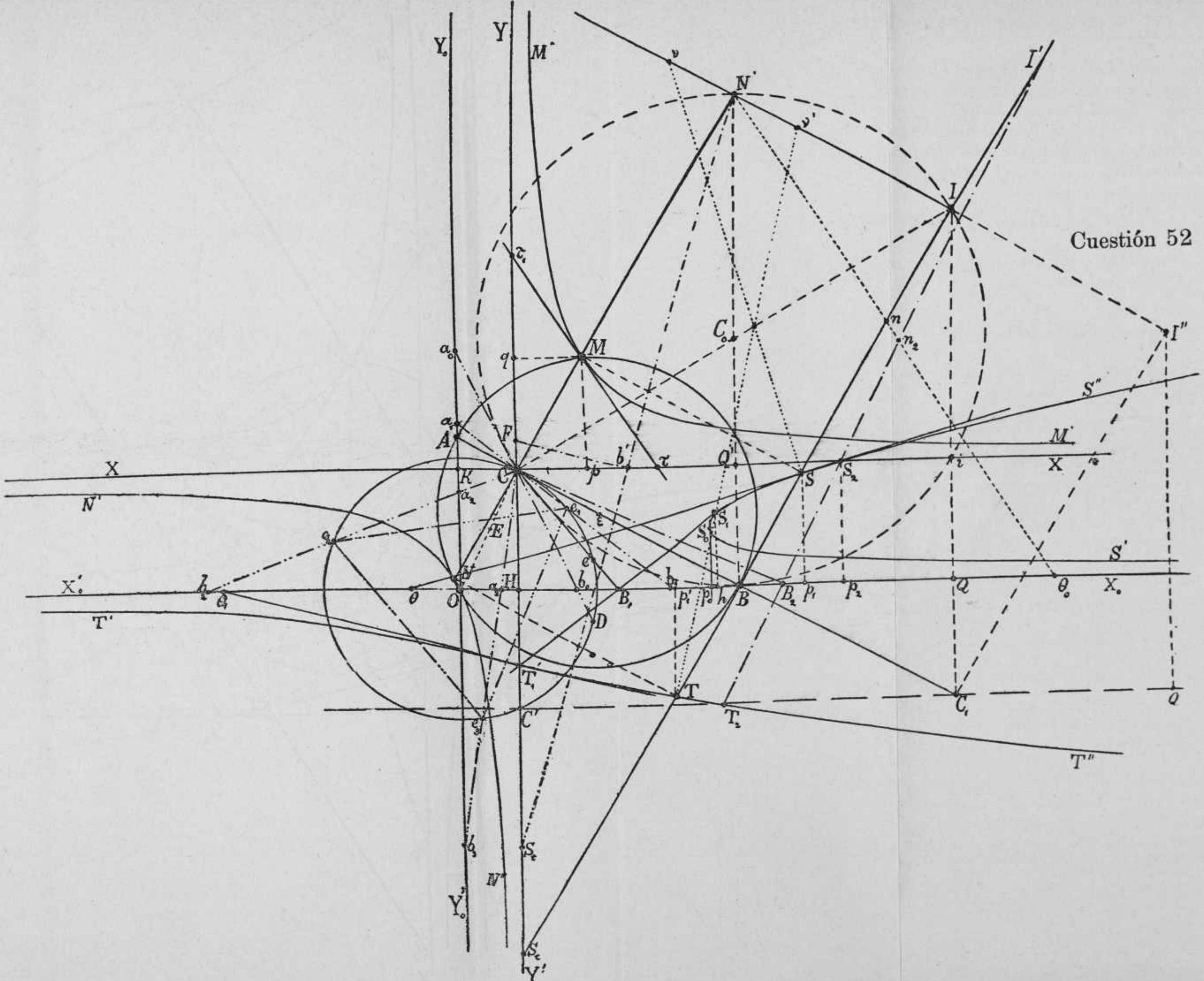
Demostración esquemática:

$$\textit{Hipótesis:}\begin{cases} p=\overset{:}{p} \\ 1=\overset{:}{p} \end{cases},\ p \ddagger \overset{:}{n};\ (\textit{tesis}):\left\{\ \mathrm{D}\,(n,p)=1\right.$$

En Geometría, el empleo de los signos $\angle$, $\parallel$, $\perp$, $\square$, y aun otros como $\therefore$ porqué, $\therefore$ luego, etc., empleados principalmente por los autores ingleses, y que adoptamos desde 1882 en nuestra *Geometría elemental*, permiten hacer *sinópticos* los razonamientos, ayudando de una manera eficacísima á la inteligencia.

Z. G. de G.

Cuestión 52



Y₀
Y
M'
N'
I'
I
I''
M
C₀
S''
M'
X
X
N'
S'
X'₀
X₀
T'
T
T₁
T₂
C'
C₁
T''
A
F
C
O
H
B
B₁
B₂
D
E
Q
Q
S
S₂
S₁
Y'₀
N''
Y'

mente opuestos en la hipérbola equilátera (Σ) corta á esta curva en otros dos puntos que designaremos por O, Δ. Permaneciendo fijos los puntos M, N, las cuerdas OΔ son paralelas á una dirección fija, simétrica de la de MN con respecto á las asíntotas, y los puntos medios Z de estas cuerdas se hallan en la mediatriz de MN, ó la perpendicular á MN en su medio C.

Á su vez, la recta CZ corta á la circunferencia en dos puntos V, V′ que con O, Δ determinan un rectángulo cuyos lados son paralelos á las asíntotas XCX, YCY′.

(Se halla, pues, aquí una aplicación muy curiosa de la noción de *rectángulo asintótico* empleada por vez primera por Bobillier (*Ann. de Gergonne*. XIX Juin, 1829. *Mem. sur l'hyp. eq.*, p. 358) y cuya importancia y utilidad para el estudio de la hipérbola equilátera ha hecho resaltar M. P. H. Schoute (*Ueber die Curv.* 4^e^ *Ordn. mit* 3 *infl.—Arch. de Grunnert Hoppe*. 1886 et *Bulletin des Sc. math*. 1884, pág. 278).

Este *rectángulo asintótico* se obtiene trazando por dos puntos cualesquiera OΔ de la hipérbola equilátera (Σ) paralelas á las asíntotas. La segunda diagonal VV′ pasa entonces por el centro C de la hipérbola.

De esto se deduce la proposición siguiente:

Se dan dos rectas rectangulares OA, OB *y un punto* C *por el que se trazan secantes* ACB. *Se traza la circunferencia* AOB *que tiene* AB *por diámetro. El lugar de los puntos* M, N *de intersección de esta circunferencia con la cuerda* MCN *perpendicular á* AB *es la hipérbola equilátera* (Σ) *que pasa por los puntos* M, N, O, Δ, *cuyo centro es* C *y cuyas asíntotas son paralelas á las rectas* OA, OB.

Así queda establecida la primera parte de la cuestión 52.

Es de igual modo interesante observar que OΔ es un diámetro y Z el centro de la circunferencia MNOΔ.

La segunda parte de la cuestión 52 se reduce á transformar la hipérbola equilátera (Σ) por la construcción siguiente:

Hallándose referida la hipérbola á uno de sus puntos O y á dos paralelas OA, OB á las asíntotas, por el centro C de la curva se traza la recta AB y el diámetro NCM, y se transporta éste paralelamente á sí mismo, de modo que sea en TBS, T_0AS_0.

Ahora, se obtienen para las coordenadas Op_1, Sp_1 del punto S los valores siguientes:

$$x=h+k\ \mathrm{tg}\ \omega+\rho\cos\omega, \qquad y=\rho\ \mathrm{sen}\ \omega, \qquad \rho=\sqrt{hk\ \mathrm{sen}\ \omega\cos\omega}.$$

Por consiguiente, falta eliminar tg ω entre las ecuaciones

$$x = h + k \operatorname{tg} \omega + \sqrt{\frac{hk}{\operatorname{tg} \omega}}, \qquad y + \sqrt{hk \operatorname{tg} \omega}$$

lo que da

$$x - h = \frac{y^2}{h} + \frac{hk}{y}.$$

El resultado de esta transformación es, pues, la cúbica unicursal (Ω) designada con el nombre de *tridente de Newton*.

Los puntos S_0, T_0 correspondientes al otro extremo A de la cuerda A, B tienen por lugar geométrico un segundo tridente (Ω) que admite por asíntota OA.

Según la discusión muy completa que se ha expuesto en este *Periódico,* nos bastará recordar que otras propiedades de estas curvas han sido consignadas por M. G. de Longchamps en su *Etude des courbes parallèles*, (J. S., 1885, 153-155), y también en la *Géométrie de la règle* (J. S., 1886, 222-226).

Sería, pues, de desear que se vuelva á insistir en la monografía de éstas cúbicas, con objeto de fusionarse los resultados obtenidos en diversas direcciones.

CUESTIONES PROPUESTAS

77. Teorema. Sea L una evolvente de un círculo cualquiera cuyo centro es O. Esto sentado, se tienen los teoremas siguientes:

1.º) Desde el centro O tracemos tres radios vectores; si el segundo es medio proporcional entre los otros dos, corta al arco comprendido entre el primero y el tercero en dos partes proporcionales á estos radios vectores.

2.º) Desde el centro O tracemos tres radios vectores cuyas longitudes sean proporcionales á los números 1, 5, 7; el segundo radio corta al arco comprendido entre los otros dos en dos partes iguales.

3.º) Desde el centro O tracemos dos radios vectores cuya diferencia sea igual al diámetro del círculo; el arco de L que cortan es igual á la suma de los radios vectores.

Desde el centro O tracemos dos radios vectores cualesquiera R, R_1 y los otros dos cuya longitud es respectivamente

$$\sqrt{R^2 - RR_1 + R_1^2}, \qquad \sqrt{R^2 + RR_1 + R_1^2};$$

sus extremidades forman un conjunto armónico de cuatro puntos.

G. Pirondini.

78. Sea AEB un arco de círculo que tiene por centro el punto O, por cuerda AB, por tangentes en sus extremos AT, BT. Prolónguese AB en una longitud BC $= \frac{1}{2}$ AB. Desde el punto C como centro, con un radio igual á CA, descríbase un arco de círculo AD que corta á BT en D. Tómese sobre el arco AEB un segmento AE igual á $\frac{1}{4}$ AEB. Trácese OF que corta á AT en F; únanse los puntos F, B por la recta FB. Esto sentado, si a es la longitud del arco, tomándose el radio por unidad:

1.º AD difiere de a en menos de un milésimo de la quinta potencia de a.

2.º AF + FB difiere de a, en menos de un cuarto de milésima de la quinta potencia de a.

3.º $\frac{1}{5}$ (AD + 4AF + 4FB) difiere de a en menos de una milésima de la séptima potencia de a.

Se supone $a < 1$.

(N. C. M.) *(Macqorn Ran Kine).*

79. Construír un triángulo dados los vértices A', B', C' de los triángulos equiláteros construídos exterior ó interiormente sobre sus lados.

(H. Van Aubel).

80. Construir un cuadrilátero dados los vértices A', B', C', D' de los triángulos equiláteros construídos exterior ó interiormente sobre sus cuatro lados.

(H. Van Aubel).

81. Suponiendo m y n enteros y positivos, demostrar que

$$\frac{1}{m+1}+\frac{n}{m+2}+\frac{n(n-1)}{1.2(m+3)}+\ldots=$$

$$=\frac{2^n}{m+1}-\frac{n.2^{n-1}}{(m+1)(m+2)}+\frac{n(n-1)2^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

(Juan J. Durán Loriga).

82. Sean A_1, B_1, C_1 y A_2, B_2, C_2 las proyecciones de dos puntos M_1, M_2 sobre los lados de un triángulo ABC. Si estos puntos se hallan en una misma cónica y el punto M permanece fijo, ¿cuál es el lugar descrito por M_2?

(J. Neuberg).

83. Sobre los lados de un triángulo $A_1A_2A_3$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_1$ é interiormente los triángulos equiláteros $A_2b_1A_1$, $A_3b_2A_2$, $A_1b_3A_3$. Sean I_1, I_2, I_3, i_1, i_2, i_3, los centros de estos triángulos:

1.º *a*) Si se prolonga B_3i_2 en una longitud $i_2N = B_3i_2$, el triángulo B_1Ni_2 es equilátero. *b*) Construir el triángulo $A_1A_2A_3$ dados los puntos B_1, I_2, B_3.

2.º *a*) El punto I_3 es el medio de las rectas A_1A_2 é I_3B_1 son los vértices de un triángulo equilátero. *b*) Construir el triángulo $A_1A_2A_3$, dados los puntos I_1, B_2, I_3.

(H. Van Aubel).

84. Sobre los cuatro lados de un cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_4$, $A_4B_4A_1$ é interiormente los triángulos equiláteros $A_2b_1A_1$, $A_3b_2A_2$, $A_4b_3A_3$, $A_1b_4A_4$. Sean I_1, I_2, I_3, I_4, i_1, i_2, i_3, i_4 los centros de estos triángulos:

1.º La recta I_2I_4 (ó i_2i_4) es perpendicular á B_1B_3 (ó b_1b_3) é igual al rádio del círculo circunscrito al triángulo equilátero construído sobre B_3B_1 (ó b_3b_1).

2.º *a*) Si sobre I_3I_1 se construye el triángulo equilátero I_3MI_1 y se prolonga I_3M en una longitud $MN = I_3M$, el cuadrilátero $I_1B_2B_4N$ es un paralelógramo. *b*). Construir el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$, dados los puntos I_1, I_2, I_3, B_4 ó los puntos I_1, B_2, B_3, B_4.

(*H. Van Aubel*).

85. Sean, A un punto luminoso, B un punto tomado, como el primero, en el plano de un círculo que tiene C por centro.

Se pide el lugar de los puntos M del círculo donde se refleja el rayo luminoso AM de manera que pase por el punto B, cuando el rádio del círculo toma valores cualesquiera.

¿Cuál es el problema de máximo ó de mínimo que se encuentra en el estudio de esta cuestión?

Determinar directamente ciertos puntos particulares del lugar buscado.

(Ph. Breton).

86. Una elipse variable cuyo eje mayor se da, permanece tangente á una elipse dada, y tiene con esta un foco común. Demostrar que toca constantemente á una cónica homofocal con la elipse dada.

(J. Neuberg).

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos