Año II Zaragoza 15 Julio de 1892 Núm. 19

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

GEOMETRÍA DEL TRIANGULO

Algunas propiedades de los triángulos podares y de los círculos de Schoute

POR M. EMILE VIGARIÉ

II

Circulos de Schoute.

1. DEFINICIÓN. — Se llaman *círculos de Schoute* del nombre del geómetra holandés que los ha estudiado primeramente, los círculos lugares de los puntos M tales, que sus triángulos podares tengan un ángulo de Brocard ω_1.

2. HISTÓRICO. — M. P. H. Schoute ha dado á conocer los círculos que llevan su nombre en un trabajo publicado en 1886 y titulado *Ovez een nauwez verband tusschen Hock en Cirkel van Brocard* (Bulletin de l'Académie d'Amsterdam pp. 39-40). M. Neuberg los ha hallado de nuevo y generalizado en su nota *Sur les triangles équibrocadiens* (Congrès d'Oran, 1888, pp. 135-144) y en su memoria *Sur les projections et les contre-projections d'un triangle fixe* (Memoires couronées de l'Académie royale de Belgique, t. XLIV, 1890). M. Boutin s'en est servi dans son étude *Sur les centres isodynamiques et sur les centres isogones* (Journal de Mathématiques elémentaires, 1889, pp. 101-102), y M. Gob ha señalado nuevas propiedades en su nota *Sur quelques transformation de figures,* Congrès de Limoges, 1890). En fin, M. W. W. Taylor, en una comunicación, *On some rings of circles connected with a triangle, and the circles which cut them at equal angles* (Proceedings of the London mathematical Society, vol. XX, 1889, pp. 397-416) ha mostrado las relaciones que existen entre los círculos de Schoute y un nuevo grupo de círculos que ha estudiado.

Vamos ahora á dar á conocer las principales propiedades de los círculos de Schoute.

3. Ecuaciones de los círculos de Schoute. — Busquemos el lugar de los puntos M, cuyos triángulos podares, $A_1 B_1 C_1$, tienen un ángulo de Brocard dado ω_1.

Se sabe que el valor del ángulo de Brocard ω de un triángulo está dado por la fórmula

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Busquemos el valor de $\cot \omega_1$ en un triángulo $A_1 B_1 C_1$ en función de los elementos del triángulo de referencia. Designemos por a_1, b_1, c_1, S_1 los lados y el área de $A_1 B_1 C_1$. Se tiene:

$$\begin{aligned} 2S_1 &= yz \operatorname{sen} A + zx \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} C \\ a_1^2 &= y^2 + z^2 + 2yz \cos A \\ b_1^2 &= z^2 + x^2 + 2zx \cos B \\ c_1^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \cos C \end{aligned}$$

luego (1)

$$\cot \omega_1 = \frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{4S_1} = \frac{x^2+y^2+z^2+yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C}{yz \operatorname{sen} A + zx \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} C}$$

Esta relación muestra que el lugar de los puntos M tiene por ecuación:

$$x^2+y^2+z^2+yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C -$$
$$- \cot \omega_1 (yz \operatorname{sen} A + zx \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} C) = o$$

ó

$$\Sigma x^2 + \Sigma yz \cos A - \lambda \Sigma yz \operatorname{sen} A = o \qquad (2)$$

Esta ecuación representa un haz de círculos. Es la ecuación general de los círculos de Schoute.

4. Centro y radio.—Las coordenadas (x, y, z) del centro de un círculo están dadas por las fórmulas

$$(3) \begin{cases} x = \dfrac{R(\operatorname{sen} A + \lambda \cos A)}{\lambda + \cot \omega} \\ y_1 = \dfrac{R(\operatorname{sen} B + \lambda \cos B)}{\lambda + \cot \omega} \\ z = \dfrac{R(\operatorname{sen} C + \lambda \cos C)}{\lambda + \cot \omega} \end{cases}$$

En cuanto al radio está dado por una de las fórmulas

$$\rho^2 = R^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \omega (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \omega_1)}{\operatorname{sen}^2 (\omega + \omega_1)} \tag{4}$$

$$\rho^2 = 4R^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen} (30 - \omega_1) \operatorname{sen} (30 + \omega_1)}{\operatorname{sen}^2 (\omega + \omega_1)} \tag{5}$$

$$\rho = \frac{R \sqrt{\lambda^2 - 3}}{\lambda + \cot \omega} \tag{6}$$

designando R el radio del círculo ABC.

5. Caso particular.— Observemos desde luego que dos valores iguales y de signo contrario de λ dan dos círculos de Schoute tales, que los triángulos podares de sus puntos tienen el mismo ángulo de Brocard, y son el uno directo y el otro retrógrado.

La ecuación (2) contiene como casos particulares:

1.º El círculo de Brocard ($\lambda = \cot \omega$);
2.º Un círculo imaginario ($\lambda = o$);
3.º El círculo circunscrito á ABC ($\lambda = \infty$);
4.º La recta de Lemoine ($\lambda = -\cot \omega$);
5.º y 6.º Los centros isodinámicos ($\lambda = \pm \sqrt{3}$).

De estos seis casos particulares, los tres primeros resultan inmediatamente de la comparación de las ecuaciones de estos círculos con la ecuación (2). Los otros tres pueden obtenerse buscando los círculos cuyo centro se encuentra sobre el lugar.

Para que esta condición se halle satisfecha, es necesario que se tenga:

$$\begin{vmatrix} 2 & \cos C - \lambda \operatorname{sen} C & \cos B - \lambda \operatorname{sen} B \\ \operatorname{Cos} C - \lambda \operatorname{sen} C & 2 & \cos A - \lambda \operatorname{sen} A \\ \operatorname{Cos} B - \lambda \operatorname{sen} B & \cos A - \lambda \operatorname{sen} A & 2 \end{vmatrix} = o.$$

ó bien

$$(\lambda^2 - 3)(\lambda \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + 1 + \cos A \cos B \cos C) = o \tag{7}$$

Esta ecuación se descompone en las dos siguientes:

1.º $$\lambda^3 - 3 = o$$

que da $$\lambda = \pm \sqrt{3}$$

Si llevamos estos valores de λ á las fórmulas (3), tendremos para las coordenadas del centro:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\text{R sen A} \pm \sqrt{3}\cos \text{A}}{\pm\sqrt{3} + \cot \omega} = \frac{2\,\text{R}\cos(\text{A}\pm 60)}{\sqrt{3} + \cot\omega} \\ y &= \frac{2\,\text{R}\cos(\text{B}\pm 60)}{\sqrt{3} + \cot\omega} \\ z &= \frac{2\,\text{R}\cos(\text{C}\pm 60)}{\sqrt{3} + \cot\omega} \end{aligned}\right.$$

estas son las coordenadas de los centros isodinámicos.

Luego: *los centros isodinámicos son los* PUNTOS LÍMITES *del haz de los círculos de Schoute.*

2.º λ sen A sen B sen C+1+cos A cos B cos C$=o$

da $$\lambda = -\cot\omega$$

El círculo correspondiente se reduce á la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \tag{9}$$

que es la ecuación de la recta de Lemoine, polar del punto de Lemoine con relación al círculo circunscrito. Luego:

La recta de Lemoine es el eje radical comun de los círculos de Schoute.

De los resultados precedentes se deduce que:

El lugar de los centros de los círculos de Schoute es una recta perpendicular á la recta de Lemoine que pasa por el punto de Lemoine, por el centro O *del círculo circunscrito y por los centros isodinámicos W, W': es el diámetro de Brocard.*

6. INTERPRETACIONES GEOMÉTRICAS. — Dos interpretaciones geométricas de los círculos de Schoute se han dado. La una debida á M. Neuberg (*loc., cit.,* p. 29), la otra á M. Gob (*loc., cit.,* p. 7 y siguientes). Estas dos interpretaciones se apoyan en la teoría de las figuras semejantes construídas sobre los lados de un triángulo, y en ello insistiremos cuando tratemos de esta importante teoría.

7. Las propiedades que hemos indicado para los triángulos podares nos permiten enunciar inmediatamente algunas otras que se refieren á los círculos de Schoute.

1.º El círculo de Brocard es el lugar de un punto P tal, que su triángulo podar es directo y de igual ángulo de Brocard que ABC ($\omega_1 = \omega$).

2.º La recta de Lemoine es el lugar de un punto P tal, que su triángulo es retrógrado y de igual ángulo Brocard que ABC ($\omega_1 = -\omega$).

3.º Los triángulos podares de los centros isodinámicos son equiláteros.

Llamamos *triángulos conjugados* á dos triángulos tales, que las medianas del uno son proporcionales á las medianas del otro, y *puntos conjugados* á dos puntos tales, que sus triángulos podares son conjugados, directos entre sí, y cuyos vértices homólogos se encuentran á un mismo lado de ABC.

1.º Dos triángulos conjugados tienen igual ángulo de Brocard.

2.º Dos puntos conjugados se hallan sobre un mismo círculo de Schoute.

3.º Dos puntos tripolarmente asociados se hallan en círculos diferentes.

4.º En la transformación por puntos tripolarmente asociados, los círculos de Schoute, con parámetros de valores absolutos iguales y de signo contrario, se corresponden entre sí. En particular al círculo de Brocard corresponde la recta de Lemoine.

Para completar el estudio de los círculos de Schoute señalaremos algunas proposiciones que nos contentaremos con enunciar y que se derivan del principio conocido siguiente:

8. Principio. — La figura formada por un sistema de círculos que tienen el mismo eje radical, se transforma por inversión en una figura formada por círculos concéntricos, si se toma por centro de inversión uno de los *puntos-límites* del sistema (Poncelet, *Traité des propriétés projectives*. Tome I, n.º 76).

Las trayectorias octogonales del sistema son, en efecto, círculos que pasan por los puntos límites y cuyas transformadas se convierten en rectas concurrentes.

Resulta inmediatamente de este principio, que si un círculo corta á dos círculos fijos bajo ángulos constantes, corta también, bajo ángulos constantes, á todos los círculos que tienen el mismo eje radical y envuelve á dos círculos del sistema.

9. Aplicaciones. — Los círculos de Schoute se transforman por inversión en círculos concéntricos, cuando se toma por centro de inversión uno de los centros isodinámicos.

Los círculos de Schoute se hallan cortados bajo un ángulo constante por los círculos de W. W Taylor (*loc. cit.*), círculos que tienen por ecuaciones:

$$A_1 = x^2 - yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C = 0$$
$$B_1 = y^2 + yz \cos A - zx \cos B + xy \cos C = 0$$
$$C_1 = z^2 + yz \cos A + zx \cos B - xy \cos C = 0$$

Estos círculos tienen respectivamente por centros los *puntos asociados* del punto de Lemoine K_a, K_b, K_c y son tangentes en los radios OB y OC, OC y OA, OA y OB.

Estos círculos de Taylor envuelven los dos círculos de Schoute que tienen por ecuación:

$$\Sigma x^2 + \Sigma yz \cos A \pm 2 \Sigma yz \operatorname{sen} A = 0$$

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS INTEGRALES EULERIANAS

POR D. LAURO CLARIANA Y RICART
Catedrático de la Universidad de Barcelona

(CONTINUACIÓN)

(Véase el tomo II, págs. 229, 247, 265 y 300).

14.—DETERMINACIÓN DE LA INTEGRAL $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$, SIENDO $p < 1$

El primer procedimiento que podemos dar para demostrar esta integral, como el más elemental, está indicado en la obra de Cálculos de M. Serret.

Tomemos la expresión $\frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}}$, siendo $m < n$. Al considerar $\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pueden expresarse las raíces de la ecuación binomia $1 + z^{2n} = 0$ por $e^{\pm\varphi_k \sqrt{-1}}$, dando á k los valores siguientes; 0, 1, 2, ... (n-1). Según la teoría de las fracciones simples, los coeficientes indeterminados de los numeradores, expresados por A, B, C ... vienen dados

por $$A = \frac{F(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \ldots$$

en el supuesto de que las funciones F y f representen respectivamente el numerador y el denominador de la fracción dada que se descompone en otras simples. Así, pues,

$$A' = \frac{F(a)}{f'(a)} = \frac{n\, e^{2m\varphi_k\sqrt{-1}}}{2n\, e^{(2n-1)\varphi_k\sqrt{-1}}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{e^{2n\varphi_k\sqrt{-1}}}$$

Ahora bien, $e^{2n\varphi_k\sqrt{-1}} = e^{(2k+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$

luego $$A = -\frac{1}{2}e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}$$

Las raíces de la ecuación binomia son todas imaginarias, y dos á dos conjugadas; podremos, pues, tomar el valor suma de las dos fracciones simples, que corresponde á dos raíces conjugadas, resultando:

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{z - e^{\varphi_k\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{z - e^{-\varphi_k\sqrt{-1}}}\right] =$$

$$\sqrt{e^{-(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2m+1)\varphi_k + \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}{z - \cos\varphi_k - \operatorname{sen}\varphi_k\sqrt{-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(2m+1)\varphi_k - \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}{z - \cos\varphi_k + \operatorname{sen}\varphi_k\sqrt{-1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{2(z-\cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k - 2\operatorname{sen}\varphi_k \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi_k} =$$

$$= \frac{-(z-\cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k + \operatorname{sen}\varphi_k\operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi_k}$$

Multiplicando ambos miembros por dz é integrando desde $-\mathrm{Z}$ hasta $+\mathrm{Z}$, se tiene:

$$\int_{-\mathrm{Z}}^{\mathrm{Z}} \mathrm{T}\, dz = -\frac{1}{2}\cos(2m+1)\varphi_k \log\frac{(z-\cos\varphi_k)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi_k}{(z+\cos\varphi_k)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi_k} +$$

$$+ \operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{z-\cos\varphi_k}{\operatorname{sen}\varphi_k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z+\cos\varphi_k}{\operatorname{sen}\varphi_k}\right],$$

de donde $$\operatorname{Lim}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}_k\, dz = \pi\operatorname{sen}(2m+1)\varphi_k$$

Si suponemos $\alpha = \dfrac{2m+1}{2n}\pi$, podemos escribir

$$(2m+1)\varphi_k = (2\,\mathrm{K}+1)\,\alpha\,; \qquad \text{luego}$$

$$\mathrm{Lim}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}_k\, dz = \pi \operatorname{sen}\,(2\,\mathrm{K}+1)\,\alpha\,.$$

Según los valores de T, se obtiene

$$\frac{u z^{2m}}{1+z^{2n}} = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 + \ldots + \mathrm{T}_{n-1} \qquad \text{ó sea}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u z^{2m}\, dz}{1+z^{2n}} = \pi \left[\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha + \ldots + \operatorname{sen}\,(2n-1)\,\alpha\right]$$

Si multiplicamos ambos miembros por $2 \operatorname{sen}\alpha$, atendiendo que:

$$2 \operatorname{sen} \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = \cos \mathrm{A} - \cos \mathrm{B} \text{ en el concepto de ser } \mathrm{A} < \mathrm{B}$$

resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen}\alpha\, n z^{2m}}{1+z^{2n}}\, dz = \pi \Big[(1-\cos 2\,\alpha) +$$

$$+ (\cos 2\,\alpha - \cos 4\,\alpha) + \ldots + [\cos\,(2\,n-2)\,\alpha - \cos 2\,n\,\alpha] \Big]$$

Ahora bien, el segundo miembro se reduce á $\pi\,(1-\cos 2\,n\,\alpha) = 2\pi$ y según el valor α, se halla

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}\, dz}{1+z^{2n}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2n}\pi},$$

Empero la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$ produce dos integrales iguales por ser cuadrados los valores de z; así, pues,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2\, n z^{2m}\, dz}{1+z^{2n}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Supongamos ahora $z = x^{\frac{1}{2n}}$ de donde

$$\int_0^\infty \frac{2nz^{2m}\,dz}{1+z^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m}{2n}} \times x^{\frac{1}{2n}-1}\,dx}{1+x},$$

ó sea

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi};$$

por fin, si aceptamos que $\frac{2m+1}{2n}=p$, resulta la fórmula definitiva:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\,\pi}$$

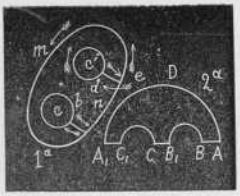
Otra demostración notable de M. Briot

La función $\frac{z^{n-1}}{1+z}$ en que n designa un número positivo menor que la unidad, admite un polo que corresponde á $z=-1$ y además un punto crítico en el origen. Desde dicho origen como centro y con un radio indefinidamente grande podemos imaginar una semicircunferencia por la parte superior del eje x, luego otra semicircunferencia indefinidamente pequeña, y por fin, desde el polo otra también indefinidamente pequeña. Los radios vendrán designados respectivamente por R, E y E'.

La función propuesta, siendo holomorfa dentro de la línea cerrada supuesta, cumplirá con la condición de que la integral $\int \frac{z^{n-1}}{1+z}\,dz$, según el contorno dado, sea nula. La parte de la integral relativa á la semicircunferencia de radio indefinidamente grande es nula; la del centro, indefinidamente pequeña, también lo es en virtud de las propiedades 7.ª y 8.ª del número precedente. Para la integral relativa á la semicircunferencia indefinidamente pequeña trazada desde el polo, puede suponerse $z=-1+\mathrm{E}'e^{\theta' i}$ lo que da

$$\int_\pi^0 \frac{z^{n-1}\,\mathrm{E}'e^{\theta' i}\,id\theta'}{\mathrm{E}'e^{\theta' i}} = i\int_\pi^0 z^{n-1}\,d\theta' = -i\int_0^\pi z^{n-1}\,d\theta'$$

Debe advertirse que el movimiento de la variable se realiza en sentido de la flecha, según indica la adjunta figura 2.ª y respecto á la primera integral.



Cuando E' sea indefinidamente pequeña, z^n tiene por valor $e^{n\pi i}$, puesto que $z = -1 = e^{\pi i}$.

Así, pues, la integral anterior se transforma en:

$$-i\int_0^\pi e^{n\pi i - \pi i}\, d\theta' = -i\int_0^\pi \frac{e^{n\pi i}}{e^{\pi i}}\, d\theta' =$$

$$= -i\int_0^\pi \frac{e^{n\pi i}}{-1}\, d\theta' = i\, e^{n\pi i}\int_0^\pi d\theta' = i\,\pi\, e^{n\pi i}$$

La recta BA da una integral que tiene un límite determinado, expresado por: $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx$; en cuanto á las rectas $A_1\,C_1$ y $C_1\,B_1$ se tiene $\theta = \pi$, $z^n = r^n e^{n\pi i}$ (1), $z = -r$; si tomamos la diferencial de (1) $nz^{n-1}\, dz = nr^{n-1} e^{n\pi i}\, dr$ y sustituimos valores en la integral primera, se obtiene:

$$e^{n\pi i}\int_R^{1+E'} \frac{r^{n-1}}{1-r}\, dr + \int_{1-E'}^{E} \frac{r^{n-1}}{1-r}\, dr =$$

$$= -\, e^{n\pi i}\left(\int_E^{1-E'} \frac{r^{n-1}}{1-r}\, dr + \int_{1+E'}^{R} \frac{r^{n-1}}{1-r}\, dr\right)$$

Advirtiendo ahora que la suma de las integrales relativas á las diversas partes del contorno cerrado debe ser nula, sabiendo además que las cuatro primeras partes tienden hácia límites determinados, resulta que la suma de las dos últimas integrales debe tener también su límite.

Este límite es lo que Cauchy llama el *valor principal* de la integral $\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{1-r}\, dr$, y que puede expresarse por K.

En totalidad pues, podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx + \pi i e^{n\pi i} - K\, e^{n\pi i} = 0,$$ de donde:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = (K - \pi i)\,(\cos n\pi + i \operatorname{sen} n\pi) =$$

$$= (K \cos n\pi + \pi \operatorname{sen} n\pi) + i\,(K \operatorname{sen} n\pi - \pi \cos n\pi)$$

Empero, atendiendo á que el primer miembro hace referencia á cantidades reales, se deduce:

$$K \operatorname{sen} n\pi - \pi \cos n\pi = 0 \quad \text{ó sea} \quad K = \pi \cos n\pi$$

De suerte que en definitiva se obtiene:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \pi \cos n\pi \cos n\pi + \pi \operatorname{sen} n\pi = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$$

fórmula exactamente igual á la anterior, según el método elemental de M. Serret.

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

(CONTINUACIÓN)

El teorema de Menelao que establece la situación de tres puntos en línea recta, por efecto de la relación que tienen con respecto á un triángulo, así como algunos siglos mas tarde el de Juan de Ceva determina la concurrencia de tres rectas en un punto; el célebre porisma de Pappus por el que, mediante la deformación de un polígono cuyos lados giran al rededor de ciertos puntos y cuyos vértices, excepto uno, recorren otras tantas rectas, el último vértice debe describir una recta; el *Hexagrammun mysticum* de Pascal, el teorema de Desargues, los de Newton y Carnot, fundamentales en la teoría de las cónicas, son como focos de luz que irradian á gran distancia por los horizontes científicos, como núcleos que contienen virtualmente multitud de verdades, y sobre los que se desenvuelven teorías completas, ó como instrumentos que multiplican las proposiciones de la ciencia.

El teorema de Pascal, por sí solo es la base sobre que se ha edificado la teoría de las cónicas; el teorema que establece la relación entre el polo y la polar es el gérmen de la dualidad, que hace surgir para cada propiedad descriptiva de las figuras su correlativa, duplicando así el campo de la Geometría. El concepto de la relación anarmónica ha servido á Chasles para establecer con sólido encadenamiento todas las proposiciones de la Geometría moderna en su *Traité* *de Géométrie supérieure,* el concepto de las formas armónicas ha permitido á Staudt desenvolver este organismo independientemente de toda relación numérica.

Hay teoremas fundamentales que parece penetran por todo el andamiaje de la edificación científica. El teorema de Pitágoras, de una manera uniforme lleva á la obtención de las ecuaciones que representan los lugares geométricos en la geometría cartesiana. El teorema de Stewart, que como dice Chasles «merecería tener cabida en los elementos ó al menos en los complementos de Geometría» es un precioso medio de deducir numerosísimas relaciones métricas [1], pues además de conducir á las expresiones de las medianas, las bisectrices, las simedianas, las distancias entre el centro de gravedad de un triángulo y del círculo incrito ó circunscrito ó el ortocentro, etc., etc., llega á ser un auxiliar eficacísimo para continuar estas determinaciones en la *Geometría reciente,* fijando con suma facilidad las relaciones entre los numerosos puntos y líneas con que los geómetras modernos han matizado el plano del triángulo, y que dispersas en diversas memorias, á partir desde el año 1874 en que M. Lemoine en una breve memoria enunció algunos principios fundamentales, hoy comienzan á ser expuestas en forma de Tratados [2].

Esta nueva *Geometría del triángulo* ha llegado, en efecto, á constituir una rama especial de la Geometría, por el inagotable conjunto de propiedades que ha hecho descubrir y que continúa agrupando en su reciente organismo; y aunque ciertamente en todas épocas los geómetras han llegado á encontrar alguno de sus elementos primordiales de una manera aislada, y hasta según se ha hecho ver, del porisma 176 de Euclides es fácil deducir toda la teoría del círculo, de los puntos y del ángulo Brocard [3]; sólo ha formado cuerpo de doctrina desde los numerosos trabajos que han suscitado las memorias de M. Lemoine sobre el *punto* al que los geómetras conocen con su nombre, desde que M. Neuberg lo propuso, punto, que después del centro de gravedad del triángulo es el que han encontrado con más frecuencia los geómetras aisladamente en diversas épocas y mediante alguna de sus propiedades, cabiendo á M. Lemoine la gloria de haber mostrado en sus numerosos escritos, que todas estas propiedades y otras muchas pertenecían á un mismo punto que tenía un lugar importante en el trián-

(1) Véase *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre* par C. Thiry.

(2) Véase Casey. *Géométrie élémentaire recente.* Poulain *Principes de la nouvelle Géométrie.* M. Clelland. *A treatise on the Geometry of the circle.*

(1) Vigarié, *Le 176me porisme d'Euclide et ses consequences* (Journ. de máth. élém. 1890).

gulo, mereciendo un estudio especial. Al punto y al círculo de Lemoine se agregaron en breve otros elementos aportados por M. Brocard, y que enlazándose con aquéllos han formado el núcleo de la nueva rama geométrica.

La perpendicular, la paralela, las bisectrices, las medianas, las alturas, estos primeros elementos de la Geometría, basados en el concepto de igualdad, fueron seguidos por el de la proporcionalidad que permite más numerosos y ámplios enlaces entre los puntos, las líneas las superficies; y de este concepto surgieron los de la relación *armónica* y *anarmónica* que forman la esencia de la doctrina de los porismas y por consiguiente de la rama superior de la Geometría, de cuya evolución hemos hecho ya algunas indicaciones. Pero no bastando enlazar puntos aislados con puntos, se enlazan figuras con figuras. La perspectiva unió primeramente las tres secciones cónicas entre sí y con el círculo. Los medios de transformación de las figuras se multiplicaron: las figuras homotéticas, homológicas, homográficas, correlativas, inversas, etc.; las figuras transformándose, no sólo en el plano sino que también en general en el espacio, y particularmente no sólo en la superficie esférica á la manera que en el plano, sino hasta en otras superficies dadas.

No solo se emplearon leyes especiales por las que una primera figura de las comprendidas en ellas sirviera de base para la formación de todas las demás, como por ejemplo, se observa en la homotecia y en la homología, en cuanto se dán el centro y el eje de homología y se establecen sistemas de dos puntos correspondientes; sino que además los varios sistemas de coordenadas han formado la base inmóvil sobre que se han construído toda suerte de figuras y se han enlazado entre sí, mediante el término medio que constituía la relación de cada una con el sistema fijo; y los sistemas polar, cartesiano, hamiltoniano y el cálculo baricéntrico han sido andamiajes distintos para la edificación geométrica.

En una palabra, el Análisis interviniendo en las relaciones geométricas, creando algoritmos nuevos que correspondieran á las transformaciones de las figuras, á sus múltiples propiedades, de manera que la inteligencia pudiera de las unas pasar inmediatamente á las otras, ó recorrer indistintamente ambos dominios enlazados de una manera permanente, ha contribuído á dar mayores proporciones al edificio geométrico; y el Análisis en su más elevada fase, sirviendo de base á la Geometría infinitesimal, ha llevado el estudio al grado supremo, en que además de estudiarse las curvas y superficies de grados superiores con sus inflexiones, sus multiplicidades, sus retrocesos, en una palabra, sus singularidades y más diversos accidentes, ha llegado al estudio sistemático de las variedades de géneros, órdenes, clases, familias y agrupaciones, hasta el punto de aspirar por último á clasificaciones que, conduciendo á la síntesis total, sirvan de coronamiento al grandioso edificio de la Geometría.

LIBRO PRIMERO

GENERALIDADES SOBRE LAS PROPOSICIONES Y LOS MÉTODOS

CAPITULO PRIMERO

Las proposiciones.

1. Clases de proposiciones.—Las proposiciones matemáticas se reducen en los tratados modernos á la *definición*, el *axioma*, el *teorema* y el *problema*, el *lema* y el *corolario*.

En la antigüedad se empleaban otras varias proposiciones como nos manifiestan los tratados de los *porismas* y de las *dadas* de Euclides, de los *lugares* de Apolonio, etc., que son variantes ó casos especiales del teorema y del problema.

El *axioma* es una verdad evidente ó que no necesita demostración. Los axiomas sirven de fundamento á las demás proposiciones de la ciencia.

El *teorema* es el enunciado de una verdad no evidente, ó que necesita demostración; indica una *relación de coexistencia* entre modos de ser de varias cosas, expresados por sus dos partes, *hipótesis* y *tesis*.

Hipótesis es lo que se supone en un teorema: constituye sus *datos*. *Tesis* es lo que se afirma y trata de establecer como coexistiendo con la hipótesis: constituye la consecuencia necesaria de ésta.

Ejemplos: *Si dos ángulos tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido*, serán iguales. *Si dos ángulos son opuestos por el vértice*, serán iguales.

Demostración es el razonamiento que hace evidente una verdad que no lo es por sí.

El problema es una proposición que tiene por objeto determinar una ó varias cosas de especies dadas ligadas por relaciones determinadas con otras dadas (Duhamel. *Des méthodes*, pág. 42).

En el problema hay que considerar los *datos* ó cantidades conocidas y las cantidades desconocidas ó *incógnitas* que se buscan. Los *datos* corresponden á la *hipótesis* de los teoremas y las *incógnitas* á las *tesis*.

2. Análisis de las proposiciones.—Generalmente en las cuestiones matemáticas hay que considerar cuatro cosas: 1.º Ciertas entidades cuya existencia es hipotética ó está dada (hipótesis ó datos). 2.º Otras unidas á las primeras por la condición de la coexistencia (tesis ó resultados que deben obtenerse). 3.º Ciertas construcciones con las que unimos nuevos elementos á los supuestos dados (construcciones ó líneas auxiliares). 4.º Teoremas que expresan las relaciones entre las cantidades auxiliares y las dadas; por las que se deducen las buscadas en el teorema ó en el problema propuesto.

En el teorema: *En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales* (fig. 1.ª).

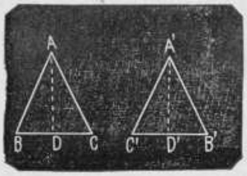


Fig. 1.ª

Lo hipotético es el triángulo y los lados iguales AB y AC, lo coexistente, la igualdad de $\angle$ B y $\angle$ C.

Las entidades auxiliares introducidas (construcciones) el nuevo triángulo A'C'B' obtenido por la inversión del dado ABC. El teorema: *Dos triángulos que tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido son iguales,* establece la relación entre los elementos de la hipótesis y los de la tesis.

En el teorema: *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales dos á dos, éste es un paralelógramo* (fig. 2.ª), lo hipotético es el cuadrilátero y las igualdades AB=CD, AD=BC de los lados opuestos. Lo coexistente es el paralelismo de AB con CD y de AD con BC. Las construcciones auxiliares se reducen á la de la diagonal BD. Los teoremas que relacionan las entidades de la hipótesis con las de la tesis son: *Dos triángulos* ABD *y* BCD *que tienen sus tres lados respectivamente iguales. Si los ángulos alternos internos que dos rectas* AB *y* CD *ó* AD *y* BC *forman con una secante son iguales, dichas rectas serán paralelas.*

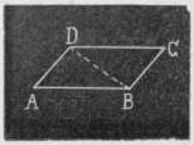


Fig. 2.ª

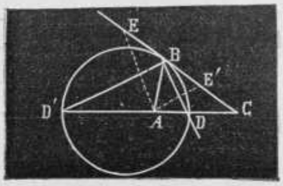


Fig. 3.ª

Sea el teorema: *La razón entre dos lados de un triángulo* ABC *es la misma que la de los segmentos aditivos ó sustractivos que la bisectriz del ángulo comprendido ó de su adyacente, forma con el tercer lado* (fig. 3.ª).

Lo hipotético es el triángulo y las dos bisectrices. Las entidades auxiliares son las paralelas AE y AE' á las bisectrices. Los teoremas que enlazan la hipótesis con la tesis son: *Los ángulos alternos y correspondientes que dos rectas paralelas forman con una secante, son iguales. En un triángulo á ángulos iguales se oponen lados iguales. Si una recta corta á dos lados paralelamente al tercero, dividirá á aquéllos en partes proporcionales.*

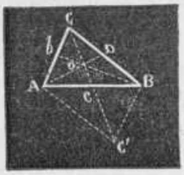


Fig. 4.ª

Sea el problema: *Construir un triángulo* ABC, *dados los lados* AC, BC *y la mediana* C*c*.

Las construcciones auxiliares son: la prolongación de C*c* en *c*C' = *c*C y el trazar la recta C'B. Los teoremas auxiliares son: *Si las rectas* CC' *y* AB *se cortan en partes iguales,* ACBC' *es un paralelógramo. Los lados opuestos* AC *y* BC' *de un paralelógramo son iguales,* que enlazan el problema propuesto con el nuevo problema: *Construir el triángulo* CBC' *en el que se dan los tres lados* BC'=AC, BC y CC'=2C*c*.

3. Ejemplos de proposiciones.—*Porisma.* El porisma que enuncia Pappus en sus *Colecciones matemáticas* libro VII, como comprensivo de diez porismas (1) análogos entre sí, pertenecientes á la especie de los *lugares,* y que se hallan, según manifiesta dicho geómetra, en el primer libro de los porismas, es el siguiente: *Dadas cuatro rectas que se cortan dos á dos, si se dan (es decir permanecen fijos) tres de los puntos de intersección situados en una de ellas, ó dos solamente en el caso del paralelismo, y de los otros tres, dos se hallan sujetos á quedar cada uno sobre una recta dada, el último permanecerá sobre una recta dada en posición* y la generalización de este porisma ó su extensión á un número cualquiera de rectas (2).

Además cita dicho geómetra este otro: *Si desde dos puntos dados se trazan dos rectas que se cortan en otra dada en posición, de las que la una intercepta sobre una recta dada en posición un segmento* A*m á partir de un punto dado* A, *la segunda formará también sobre otra recta un segmento* A*m, que estará con el primero en una razón dada* (3).

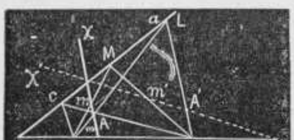


Fig. 5.ª

Además de estos porismas, se hallan demostrados y resueltos en nuestra *Geometría elemental* otros concernientes á la relación anarmónica **y** á las divisiones homográficas entresacadas de la colección que Chasles restableció en su obra *Les trois livres de porismes d'Euclide.*

(1) Véase nuestra *Geometría elemental* parte segunda pág. 235.

(2) Véase nuestra *Geometría elemental* pág. 241.

(3) *Chasles* Les trois livres des porismes, págs. 18 y 114.

4. DADAS.—Euclides llama *dadas* á lo que resulta inmediatamente, en virtud de las proposiciones comprendidas en los *Elementos,* de las condiciones de una cuestión.

Ejemplos: *Si por un punto dado se traza una recta que toca á un círculo dado en posición, la recta trazada está dada en posición.*

Si dos magnitudes a *y* b *tienen entre sí una razón dada* λ, *la magnitud compuesta de las dos tendrá con cada una de ellas una razón dada.*

Observa Chasles que si se hubiera querido hacer de esta proposición un *teorema* propiamente dicho, se habría indicado en el enunciado el valor de la razón de la suma $(a+b)$ á cada una de las magnitudes a y b, á saber:

$$\frac{\lambda+1}{\lambda} \text{ para } \frac{a+b}{a} \text{ y } (\lambda+1) \text{ para } \frac{a+b}{b}$$

De manera, añade, «que las proposiciones llamadas *dadas* por Euclides eran teoremas *no completos,* por cuanto faltaba la determinación, en magnitud y posición, de ciertas cosas enunciadas como consecuencia de la hipótesis».

Observa también que el objeto enunciado debe entenderse que *está dado virtualmente,* es decir, incluído implícitamente en la hipótesis, pudiéndose deducir de ella.

5. TEOREMA LOCAL.—El *teorema local* es una proposición que expresa una propiedad común á todos los puntos de una misma línea, recta ó curva, completamente definida.

Ejemplo: *Dados sobre un punto del diámetro* AB *de un círculo dos puntos* C, D *tales, que se tenga* $\frac{AC}{CB} = \frac{DA}{BD}$, *las distancias de cada punto* m *de la circunferencia á estos dos puntos se hallan entre sí en la razón constante* $\frac{CA}{DA}$.

6. LUGAR.—El *lugar* es una proposición en la que se dice que tales puntos sometidos á una misma ley conocida, se hallan en una línea (recta, circular ú otra) de la que se enuncia la naturaleza, faltando enunciar la magnitud y la posición.

Ejemplo: *Dados dos puntos, así como una razón, el lugar de un punto cuyas distancias á estos dos puntos están entre sí en esta razón, es una circunferencia de círculo dada en magnitud y en posición* (1).

7. PROBLEMA LOCAL.—En el *problema local* ó cuestión de *lugar,* se pide hallar la naturaleza, la magnitud y la posición de un *lugar,* es

(1) Chasles *Les trois livres* etc., págs. 42, 33.

decir, la curva lugar común de una infinidad de puntos sometidos á una ley común.

Ejemplo: *Dados los dos puntos, así como una razón* λ, *¿cuál es el lugar de un punto cuyas distancias á estos dos puntos están entre sí en la razón* λ?

8. Las conocidas geométricas. — Las matemáticas árabes nos ofrecen con este motivo un documento de gran interés, que prueba que, en efecto, en cierta época se han considerado las *Dadas*, los *Lugares* y los *Porismas* como constituyendo un mismo género de proporciones, que podrán reunirse bajo un título común. Al menos existe una obra árabe titulada: *Tratado de las conocidas geométricas,* que es una colección de proposiciones, todas con la misma forma de enunciado, y que son *Dadas* propiamente dichas, *Lugares* ó *Porismas*. Solamente el término *dado* empleado por los griegos en estos tres géneros de proposiciones se halla reemplazado en dicha obra por el de *conocido* (1).

Ejemplo: Proposición XVIII. *Cuando dos círculos conocidos en magnitud y en posición son tangentes, hallándose el uno en el interior del otro; si se traza una recta que corte á los dos círculos de una manera cualquiera, el producto de los segmentos formados por un punto del círculo menor sobre la parte de esta recta comprendida en el círculo mayor se halla con el cuadrado de la recta trazada desde el punto del círculo menor al punto de contacto de los dos círculos en una relación conocida.*

9. El lema.—Las proposiciones tienen un caracter variable en el organismo científico, según el plan que ha seguido tal ó cual autor. Así una proposición que es teorema en un tratado puede ser lema ó corolario en otro, y aún esto acontece con las definiciones, pues, por ejemplo, si se definen las cónicas por la relación de sus distancias al foco y á la directriz, resultarán como corolarios las definiciones de la elipse y de la hipérbola como lugares de los puntos tales, que la suma ó diferencia de sus distancias á los focos sea una cantidad constante, etc., etc.

Aquí nos limitaremos á citar los célebres *lemas* de Pappus que han servido para llevar á cabo la adivinación de los porismas de Euclides (2), pues para más detalles basta leer esta cuestión en nuestra *Geometría elemental,* parte segunda.

(1) *Les trois livres*, etc. (pág. 44).

(2) La mayor parte de estos lemas los citamos en nuesta *Geometría elemental* (págs. 130 y 128) que se refieren á la relación anarmónica, á las divisiones homográficas y á la involución. De éstos últimos damos una demostración general y uniforme que hace ver la conexión de unos con otros, pues estas proposiciones solo difieren en alguna circunstancia accidental de las figuras á que se refieren.

10. La definición.—Ya hemos tratado con alguna extensión en algunas de nuestras obras de la definición geométrica [1].

Las definiciones matemáticas tienen el caracter de *principios fundamentales,* los objetos definidos son tipos creados totalmente por la inteligencia, por esto es necesario establecer la *existencia* del objeto definido, es decir, que no implica contradicción ó absurdo, y que no son creaciones arbitrarias en oposición con la realidad, así pues son verdaderas *construcciones* del espíritu á las que se da una denominación. Por ejemplo, en Geometría se establece la *existencia* de la *paralela* á una recta, en cuanto se ha demostrado que: *dos perpendiculares á una recta son paralelas,* la *existencia* de la *perpendicular* á una recta trazada por un punto de ésta, se funda en la permanencia del valor angular á un lado de una recta y la variación contínua de los dos ángulos adyacentes de los que el uno aumenta mientras el otro disminuye; y otro tanto se dirá de la perpendicular al plano, del triedro, del prisma, etc. [2]

11. Teorema y problema; sus relaciones.—En varias ocasiones nos hemos ocupado de esta relación [3].

Definíamos el teorema *(Observ. útiles* etc. pág. 7) como: *Una proposición que expresa una relación de coexistencia entre modos de ser de varias cosas,* y considerábamos al teorema como una derivación y perfeccionamiento del problema, de manera que distinguiéndose tres fases en una cuestión que corresponden: 1.º al *problema primitivo* (dadas ciertas condiciones arbitrarias ¿qué relaciones hay entre los elementos que hemos puesto intencionadamente y los que aparecen íntimamente unidos á éstos sin que hayamos intervenido en su introducción?) 2.º á la expresión de la relación de coexistencia entre unos y otros elementos *(teorema).* 3.º al *problema perfeccionado en su expresión* (conocida la enunciación que se buscaba en el problema primitivo, hallar los medios de llegar á ella *(Observ.* pág. 8), *el teorema puede considerarse como el enunciado del resultado obtenido al resolver un problema)* de manera que, en el orden cronológico, el problema precede al teorema. Así, por ejemplo:

Suponiendo no descubierta la relación existente entre el lado del triángulo equilátero inscripto en la circunferencia y el radio, al problema siguiente:

---

(1) *Estudios críticos sobre la generación de los conceptos matemáticos* (cuaderno 2.º) 1890. *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan* etc. (1877). Puede verse también *Liard, Les définitions géométriques et empiriques* y la *Logique de Port Royal.*

(2) *Geom. elem.* (parte 1.ª, págs. 19, 21, 49, 51. 54, 61, etc).

(3) *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas* (1874) y *Complemento de Geometría* (1881).

Hallar la relación que existe entre el lado del triángulo equilátero inscripto en una circunferencia y el radio de ésta, seguirá el teorema:

El valor del triángulo regular inscripto en una circunferencia, es igual al del radio multiplicado por $\sqrt{3}$ (*Complemento de la Geometría elemental,* pág. 46).

De manera que, siendo en la matemática la definición una síntesis realizada *á priori,* el teorema es una síntesis fundada *á posteriori.*

El teorema constituye una síntesis, expresión del resultado de un problema que se propuso la inteligencia al examinar la realidad intelectual es decir, el conjunto de ideas abstractas que corresponden á las definiciones y son el fundamento de todas las relaciones matemáticas.)

12. La demostración.—M. Luis Liard que con sus obras *Les logiciens anglais contemporains* (1878) y *Des définitions géométriques et des définitions empiriques* ha contribuído á esclarecer y divulgar los conceptos filosóficos de estas ramas de la Matemática, explica entre otros puntos culminantes de esta ciencia, el *mecanismo de la demostración* (1): «Esta operación consiste en efectuar el enlace de las magnitudes dadas. Tan pronto esta síntesis se hace inmediatamente, es decir, sin término medio, y surge en cierto modo de la posición misma de los términos; tan pronto, y esto es lo más frecuente, requiere uno ó varios intermediarios. Estos intermediarios son siempre magnitudes iguales ó equivalentes á las magnitudes dadas, y que, en consecuencia, pueden ser sustituídas á éstas en las proposiciones ó ecuaciones matemáticas».

En este caso, la demostración es una série de *sustituciones*»; y sobre esta *igualdad* ó *equivalencia* de los términos medios que han de enlazar los términos extremos: *hipótesis* y *tesis,* es sobre lo que vamos á insistir ahora como ya lo hemos hecho en otras ocasiones.

Tanta importancia creemos que tiene esta equivalencia que, ya en nuestro *Complemento de la Geometría elemental* (1877), al tratar de las sustituciones geométricas, expusimos encadenamientos de problemas sobre triángulos y sobre la circunferencia con solo sustituir á cada enunciado una condición por otra equivalente, y en nuestra *Geometría elemental* (1.ª edición 1882, 2.ª 1888) procuramos hacer manifiesto este punto en los epígrafes: *Transformación ó sustituciones de las relaciones angulares por relaciones de paralelismo, transformación de las relaciones angulares y de posición en relaciones de magnitud lineal,* etc.

Es fácil explicar estas equivalencias.

(1) Logique, 1884, pág. 86.

En efecto. Al suponerse dos rectas paralelas, se supone *implícitamente* la existencia de ángulos alternos-internos ó externos, ó correspondientes iguales, en cuanto se supone también trazada una transversal.

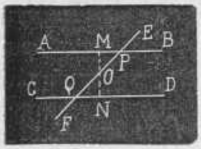


Fig. 1.ª

El razonamiento basado en la construcción de dos triángulos iguales, al trazarse la perpendicular á las dos rectas AB y CD por el punto medio O de la secante PQ (fig. 1.ª) estriba en el principio de la determinación del triángulo, que implica la igualdad de los ángulos oblicuos en P y Q cuando son iguales los rectos en M y N.

La suposición de los ángulos que tienen paralelos sus lados lleva consigo la igualdad del ángulo A'NC con cada uno de ellos, y por consiguiente, la igualdad de aquéllos (fig. 2.ª).

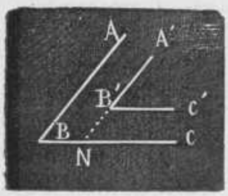


Fig. 2.ª

Lo mismo diríamos si se tratase del teorema: *Si dos triángulos tienen desigual un ángulo comprendido entre dos lados respectivamente iguales, el tercer lado será mayor en el que tiene mayor ángulo,* que equivale á concluir que *si se deforma un triángulo de manera que permanezcan constantes dos de sus lados, la longitud del tercero aumentará ó disminuirá al mismo tiempo que el ángulo comprendido.*

13. La reciprocidad de las proposiciones.—Se llama teorema *recíproco* de otro, aquél cuya hipótesis es la tesis de éste, y cuya tésis es la hipótesis del mismo.

Para que dos teoremas ó problemas sean recíprocos, basta que algunas de sus condiciones esté invertida en ambos (es decir, en la hipótesis del uno y en la tesis del otro.

Así, son teoremas recíprocos los casos fundamentales de la igualdad del triángulo, en los que alguna de las condiciones de la hipótesis ha sido llevada á la tesis.

Hay proposiciones recíprocas que no son ciertas á la vez, como por ejemplo:

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales, y, *si dos ángulos son iguales, son opuestos por el vértice.*

La segunda es falsa, y esto depende de que la tesis, *opuestos por el vértice,* es menos extensa que la hipótesis pues, en efecto, hay muchos ángulos *iguales que no son opuestos por el vértice,* como también hay muchos ángulos *suplementarios, que no son adyacentes,* no pudiéndose decir que: *los ángulos suplementarios son adyacentes,* como se dice que *los ángulos adyacentes son suplementarios.*

Serán ciertos los recíprocos en la forma siguiente: *Si dos ángulos son suplementarios y* TIENEN EL VÉRTICE Y UN LADO COMUN, tendrán sus otros lados en prolongación; *si dos ángulos son iguales* y TIENEN DOS LADOS EN PROLONGACIÓN Y LOS OTROS DOS EN DISTINTA REGIÓN DE LA RECTA FORMADA POR LOS PRIMEROS, serán opuestos por el vértice, que son los recíprocos de: *si dos ángulos son adyacentes,* serán suplementarios; y *si dos ángulos son opuestos por el vértice,* serán iguales.

Para que exista la reciprocidad, ha sido preciso añadir á uno y otro recíproco, respectivamente, las condiciones de TENER EL VÉRTICE Y UN LADO COMUN y de TENER DOS LADOS EN PROLONGACIÓN Y LOS OTROS DOS EN DISTINTA REGIÓN DE LA RECTA FORMADA POR LOS PRIMEROS.

La necesidad de restringir ó limitar las hipótesis de los teoremas, es debida á que éstas solas tienen mayor extensión que la tesis, por lo cual darían teoremas defectuosos, sin dichas limitaciones que, reduciendo á la igualdad la extensión de ambos términos, dan origen á la reciprocidad

La proposición: *Si la razón de las distancias de un punto á otro punto y una recta fijos no es mayor que 1, el lugar de dicho punto es una elipse* es falsa, porque la condición, *no es mayor,* comprende los casos menor é igual, correspondientes á la elipse y á la parábola, y será cierto que, *si una curva de segundo orden es elipse, la razón de sus distancias á un punto y á una recta no es mayor que* 1. Parahacer cierta la recíproca, bastará restringir la condición, *no es mayor*, diciendo, *es menor,* (en cuyo caso se ha excluído el *ser igual) y entonces la recíproca,* será cierta en la forma: *Si la razón de las distancias de un punto de una curva á un punto y á una recta* ES MENOR QUE LA UNIDAD, *la curva será una elipse.*

REGLA. *Para hacer recíprocas dos proposiciones relativas á una misma cuestión, se tiene que añadir á la condición más extensa alguna otra condición, que particularizándola, la haga idéntica á la que es menos extensa.*

Hay también proposiciones cuyos términos no son en totalidad recíprocos de los de otras. Sin embargo, no dejan de ser recíprocas, pues constan de una parte comun y de otra completamente recíproca.

Esta circunstancia se observa en el teorema: *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y por un punto de su comun intersección se traza una recta perpendicular al uno, estará contenida en el otro,* y recíprocamente: *Si por un punto de su comun intersección se traza en uno de los planos una perpendicular á ésta, será perpendicular al otro,* que aún puede modificarse para separar totalmente un término no recíproco que hay incluido en la doble condición de ser la recta perpendicular al plano, diciéndose: *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y por* *un punto de su comun intersección se traza una recta perpendicular á ésta y á otra de uno de los planos,* ESTARÁ CONTENIDA EN EL OTRO: *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y por un punto de su comun intersección se traza una perpendicular á ésta, contenida en uno de los planos,* SERÁ AL MISMO TIEMPO PERPENDICULAR Á OTRA DEL OTRO PLANO.

También puede citarse el teorema: *Si una recta y un plano son perpendiculares, toda recta perpendicular á la primera será paralela al segundo, ó estará contenida en él,* y *toda recta paralela al plano ó contenida en él, será perpendicular á la primera.*

Dos problemas son recíprocos, cuando los datos y resultados del uno en totalidad ó parcialmente, son los resultados y los datos del otro.

Así, por ejemplo:

Construir un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, es recíproco de construir un triángulo, cuando se dan un lado y los ángulos adyacentes, ó cuando se dan los tres lados.

(Se concluirá) Z. G. G.

SOBRE EL DESARROLLO DE p (u) EN SERIE DE FRACCIONES SIMPLES

POR EL SR. GOMES TEIXEIRA

Director de la Academia politécnica de Oporto.

La fórmula que da el desarrollo de la función de Weierstrass $p(u)$ en una serie de funciones simples puede obtenerse de una manera puramente elemental como hizo Halphen en su excelente *Traité des fonctions elliptiques* (pág. 364). Puede también obtenerse por medios menos elementales, pero más rápidamente, empleando algunos teoremas, hoy clásicos, de la teoría de las funciones analíticas, como vamos á ver.

Supongamos demostrando que $p(u)$ es una función análitica uniforme, que es par, doblemente periódica y cuyos infinitos son los puntos

$$w = 2n\omega_1 + 2m\omega_2$$

representando n y m dos números enteros positivos ó negativos cualesquiera y $2\omega_1$ y $2\omega_2$ los períodos de $p(u)$.

Demostremos en primer lugar la igualdad.

$$\lim_{u=w} (u-w)^2 p(u) = 1.$$

Consideremos para ello la integral que sirve de definición á $p(u)$

$$u=\int_{p(u)}^{\infty}\frac{dx}{\Delta x}=\int_{p(u)}^{\infty}\frac{du}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

de donde

$$\Delta x=\sqrt{4x^3-g_2\,x-g_3}$$

Tenemos

$$u=\frac{1}{2}\int_{p(u)}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{e_1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

$$u=\int_{p(u)}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{e_1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

ó, desarrollando en serie los binomios

$$u=\frac{1}{2}\int_{p(u)}^{\infty}\left(x^{-\frac{3}{2}}+\mathrm{A}\,x^{-\frac{5}{2}}+\mathrm{B}\,x^{-\frac{7}{2}}+\dots\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{p(u)}}\left[1+\frac{\mathrm{A}}{3}p(u)^{-1}+\frac{\mathrm{B}}{5}\left(p(u)\right)^{-2}+\dots\right]$$

Esta igualdad da

$$u^2\,p(u)=1+\frac{2\mathrm{A}}{3}\left(p(u)\right)^{-1}+\dots\;,$$

de la que resulta, por ser $p(o)=\infty$,

$$\lim_{u=o}\;u^2\,p(u)=1$$

Por ser w un período de $p(u)$, tenemos además

$$\lim_{u=w}(u-w)^2\,p(u)=\lim_{u=o}u^2\,p(u+w)=\lim_{u=o}u^2\,p(u)=1$$

Esto sentado, por ser $p(u)$ una función uniforme y w uno de sus infinitos, tenemos, en la proximidad del punto w (en virtud del teorema de Laurent),

$$p(u)=\dots+\frac{\mathrm{A}_3}{(u-w)^3}+\frac{\mathrm{A}_2}{(u-w)^2}+\frac{\mathrm{A}_1}{u-w}+a_0+a_1(u\text{-}w)+a_2(u\text{-}w)^2+\dots,$$

representando A_1, A_2, A_3, . . . cantidades constantes.

Pero, debiendo ser

$$\lim_{u=w}\;(u-w)^2\,p(u)=1,$$

tenemos

$$\lim_{u=w}\left[A_2 + \frac{A_3}{u-w} + \frac{A_4}{(u-w)^2} + \ldots\right] = 1,$$

lo que da

$$A_2 = 1, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \ldots$$

Por otra parte, por ser w un período de $p(u)$, tenemos, en la proximidad del punto $u=0$,

$$p(u) = p(u+w) = \frac{1}{u^2} + \frac{A_1}{u} + a_0 + a_1 u + \ldots$$

y esta igualdad muestra que (por ser $p(u)$ una función par),

$$A_1 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \ldots$$

Sustituyendo estos valores de A_1, A_2, ... en la representación anterior de $p(u)$, resulta la igualdad

$$p(u) = \frac{1}{(u-w)^2} + a_0 + a_2 u^2 + \ldots \quad ,$$

que tiene lugar en la proximidad del punto $u = w$, y que da

$$p'(u) = \frac{2}{(u-w)^2} + 2 a u_2 + \ldots$$

Basados en esta igualdad, vamos á resolver la cuestión propuesta.

Se sabe que la función $\varphi(u)$, definida por la serie

$$\varphi(u) = -\sum \frac{2}{(u-w)^3},$$

en la que la suma representada por Σ se refiere á todos los valores enteros de los números n y m que entran en

$$w = 2n\omega_1 + 2m\omega_2,$$

es uniformemente convergente en cualquier área que no contenga punto alguno de los que fueron designados por w. Es pues, natural comparar la función $p'(u)$ con la función $\varphi(u)$ definida por esta serie.

Para hacer esta comparación, notemos en primer lugar que $\varphi(u)$ admite derivadas de todos los órdenes, finitas en todos los puntos de w, y dadas por las relaciones

$$\varphi'(u) = \sum \frac{2.\ 3}{(u-w)^4}, \qquad \varphi''(u) = \sum \frac{2.\ 3.\ 4.}{(u-w)^5}, \ldots$$

visto que estas series son todas uniformemente convergentes en la misma área en que lo es el desarrollo que define á $\varphi(u)$.

En los puntos diferentes de w, como las dos funciones $\varphi(u)$ y $p'(u)$ admiten derivadas finitas, la función $p'(u) - \varphi(u)$ también admite derivadas finitas.

En la proximidad del punto w_1, representando por w_1 uno de los valores de w, tenemos

$$\varphi(u) + \sum \frac{2}{(u-w_1)^3} = -\sum{}' \frac{2}{(u-w)^1},$$

(debiendo en el segundo miembro de esta igualdad excluirse w_1 de los valores dados á w), y

$$p'(u) = -\frac{2}{(u-w)^2} + 2a_2(u-w_1) + \ldots,$$

por tanto

$$p'(u) - \varphi(u) = \sum{}' \frac{2}{(u-w)^3} + 2a_2(u-w_1) + \ldots,$$

en la que el segundo miembro admite derivadas de todos los órdenes, finitas en el punto w_0.

Luego la función $p'(u) - \varphi(u)$ admite derivadas de todos los órdenes finitas en todo el plano, y es por tanto una función *holomorfa* de u, que representaremos por $F(u)$.

Tenemos además

$$p'(u) = F(u) - \sum \frac{2}{(u-w)^3}$$

Queda por determinar la función $F(u)$.

Observemos para ello que la función $\varphi(u)$ es periódica y que sus períodos son los de $p'(u)$. En efecto, cambiando en $w = 2n\omega_1 + 2m\omega_1$, n en $m + n_1$ y m en $m + m_1$, resulta

$$\varphi(u) = -\sum \frac{2}{[u - 2(n+n_1)\omega_1 - 2(m+m_1)\omega_2]^3},$$

y cambiando después u en $u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2$,

$$\varphi(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2) = -\sum \frac{2}{u - 2n_1\omega_1 - 2m_1\omega_2)^3} = \varphi(u).$$

Luego la función holomorfa $F(u)$ es doblemente periódica y por tanto, en virtud de un teorema de la teoría de las funciones doblemente periódicas muy conocido, es igual á una constante c.

Tenemos pues,

$$p'(u) = c - \sum \frac{2}{(u-w)^3}$$

Para determinar c basta hacer en esta igualdad $u = \omega_1$, y en virtud de las igualdades

$$p'(\omega_1) = 0, \qquad \sum \frac{2}{[(2n-1)\,\omega_1 + 2m\,\omega_2]^3} = 0,$$

la segunda de las cuales resulta de hacer corresponder á cada término de la suma que representa otro igual y de signo contrario, que se obtiene cambiando $2n-1$ en $-(2n-1)$ y m en $-m$. Tenemos de este modo $c = 0$.

Tenemos además

$$p'(u) = -\sum \frac{2}{(u-w)^3},$$

de donde

$$w = 2n\,\omega_1 + 2m\,\omega_2, \qquad \left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De estas igualdades resulta el desarrollo de $p(u)$, integrando entre los límites 0 y u los dos miembros. Tenemos de este modo, separando el término correspondiente á $m = 0$, $n = 0$,

$$\int_0^u \left[p'(u) + \frac{2}{u^3}\right] du = \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

ó

$$p(u) - \frac{1}{u^2} - \lim_{u=0} \left[p(u) - \frac{1}{u^2}\right] = \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right].$$

Pero, por ser en la proximidad del punto $u = 0$,

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_0 + a_2 u^2 + \ldots$$

y

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2\,p(u) - g_3,$$

podemos sustituir en esta segunda igualdad $p(u)$ y $p'(u)$ por sus desarrollos dados para la primera é igualar después los coeficientes de las mismas potencias de u en los dos miembros del resultado. Hállase de este modo que es $a_0 = 0$. Luego

$$\lim_{u=0}\left[p(u)-\frac{1}{u^2}\right]=a_0=0.$$

Tenemos enseguida

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+\sum\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right],$$

que es la fórmula que nos proponíamos obtener.

SOBRE ALGUNAS NOTAS DE GEOMETRÍA INFINITESIMAL

POR EL SR. CESARO (E.).

Profesor de la Universidad de Nápoles.

Las curvas consideradas en un artículo (1) de M. Husquin de Rhéville no son otras que las *espirales sinusoides,* y la propiedad enunciada al fin del artículo se ha señalado ya por más de un autor (1). Las espirales sinusoides están caracterizadas por la ecuación intrínseca

$$s=k\int\frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^n-1}} \qquad (1)$$

para $n=1+k$. La misma ecuación representa, para $n=2k$, las *líneas de Ribaucour.* También representa, cualquiera que sea k, las *líneas cicloidales* para $n=-2$, los *alisoides*, para $n=1$ los *alisoides de igual resistencia,* para $x=2$, etc. Las evolutas de todas estas curvas tienen por ecuación intrínseca

$$\rho=\frac{s}{k}\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^n-1} \qquad (2)$$

Se las encuentra frecuentemente en las investigaciones de Geometría infinitesimal, pero rara vez se toma el cuidado de asegurarse, por decirlo así, de su identidad. Por ejemplo, las curvas estudiadas por MM. Nies y Müller en los *Programas* de los Gimnasios de Darmastadt y de Berlín (3) son las *evolutas de las líneas de Ribaucour,* que se hallan definidas en los trabajos ya citados por la siguiente propiedad:

$$s=ax^m \qquad (3)$$

(1) *Nouvelles Annales,* 1890, p. 143.

(2) *Nouvelles Annales,* 1888, p. 185.

(3) *Bulletin de Darboux,* 1890, p. 58 (1ère partie).

Ahora, se tiene, diferenciando esta igualdad con relación á s,

$$m \cos \varphi = a^{-\frac{1}{m}} s^{\frac{1}{m}-1}$$

siendo φ la inclinación de la tangente con el eje de las abscisas, después, por una nueva diferenciación,

$$\rho = \frac{ms}{m-1} tg\, \varphi.$$

La eliminación de φ entre las dos últimas ecuaciones da

$$\rho = \frac{ms}{m-1} \sqrt{m^2 a^{\frac{2}{m}} s^{2-\frac{2}{m}} - 1}$$

Para un valor conveniente de a, esta ecuación puede coincidir con (2), siempre que se suponga

$$k = 1 - \frac{1}{m}, \quad n = 2k.$$

No existen, pues, más que las evolutas de las líneas de Ribaucour, cuya longitud pueda expresarse por una potencia de la abscisa. Si se observa que

$$\frac{k+1}{k-1} = 1 - 2m,$$

se puede precisar más diciendo que la curva definida por la propiedad (3), para un valor dado de m, es la evoluta de una línea de Ribaucour cuyo índice es $1 - 2m$, es decir, de una línea que posee en su plano una recta (*directriz*) que intercepta sobre cada normal un segmento $(1 - m)\rho$. La curva (3) es, pues, una *cicloide* para $m = \frac{1}{2}$, una *hipocicloide con cuatro retrocesos* para $m = \frac{2}{3}$, una *evoluta de parábola* para $m = \frac{3}{2}$, una *evoluta de catenaria* para $m = 2$, etc. Es por otra parte facil el hallar una propiedad geométrica de las líneas (3), que pueda servir de definición. Con relación á la tangente y á la normal en un punto cualquiera de la línea de Ribaucour, cuyo índice es $1-2m$, la ecuación de la directriz es

$$(m-1)\rho_1 x + m\rho y + m(m-1)\rho^2 = 0,$$

siendo ρ_1 el radio de curvatura de la evoluta. La recta que encuentra ortogonalmente á la directriz sobre la normal á la curva intercepta, pues, sobre la normal á la evoluta un segmento igual á $(1 - m)\rho$. Por consiguiente las curvas (3) pueden definirse diciendo que *su radio de curvatura es proporcional al segmento que la perpendicular trazada á una recta fija, por el pié de la tangente, intercepta sobre la normal.* Si nuestros recuerdos son exactos, estas curvas han sido estudiadas hace mucho tiempo por M. Bassani [1]. Es cierto que la última propiedad no pertenece exclusivamente á las curvas (3). Para mostrarlo, tomemos la recta fija por eje de ordenadas, y designemos por φ la inclinación de la tangente sobre el eje de abscisas, de manera que

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

Se pone el problema en ecuación escribiendo

$$\frac{tg\,\varphi}{\rho} = (m-1)\frac{\cos\varphi}{x},$$

de la que se deduce por integración

$$\cos\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^{1-m}, \quad \text{además} \quad s = \int\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} dx$$

Mientras que m no es nulo, se reproducen las curvas (3); pero para $m = o$ se obtiene

$$s = a \log\frac{a}{x}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{x} = e^{-\frac{s}{a}}$$

y después

$$\rho = a\,tg\,\varphi = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$$

que es la ecuación de una *tractriz.* Más generalmente, toda línea cuyo centro de curvatura se proyecta sobre una recta fija, ortogonalmente ú oblicuamente, en el piè de la tangente, es una *evolvente de catenaria.*

CUESTIONES PROPUESTAS

64. Una elipse, cuyo centro es C gira en su plano al rededor de su foco F, y corta en P á una recta fija FX. Sobre la normal en P se

(1) Giornale de Battaglini.

toma una longitud PN igual al semi-diámetro conjugado á CP. El lugar del punto N es una circunferencia.

(N. C. M.)

65. En toda cónica un punto cualquiera M, el centro de curvatura correspondiente y los puntos de intersección de la normal en M con las perpendiculares FG, *fg* trazadas desde los focos F, *f* á los radios vectores FM, *f*M son conjugados armónicos.

(N. C. M.)

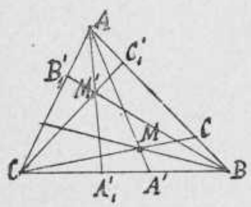
66. En todo cuadrilátero inscrito, los centros de los dieciseis círculos inscritos ó ex-inscritos á los triángulos formados por una diagonal y dos lados consecutivos, son las intersecciones de cuatro rectas paralelas á la bisectriz del ángulo agudo de las diagonales del cuadrilátero y de cuatro rectas paralelas á la bisectriz del ángulo suplementario.

(N. C. M.) *(E. Lemoine).*

67. Si por el punto recíproco del centro del círculo inscrito á un triángulo se trazan paralelas á los tres lados, la diferencia entre un lado y la longitud de la paralela á este lado, comprendida entre los otros dos lados del triángulo, es la misma para los tres lados.

¿Cuál es la propiedad análoga para los puntos recíprocos de los centros de los círculos ex-inscritos?

(N. C. M.) *(E. Lemoine).*



El punto recíproco está definido por la construcción siguiente: AM corta á CB en A'. Sea A'_1 simétrico de A' con relación al medio de BC. AA'_1 contiene á M'

(E. Lemoine).

68. Los diversos círculos menores de sección de una esfera por planos paralelos se transportan en su plano de manera que su centro llegue á ocupar el punto en que una recta dada en el espacio corta á este plano. Se trata de determinar los planos cíclicos de la superficie lugar de estos círculos.

(Ph. Breton).

69. Dados los dos valores $u_0 = o$, $u_1 = 1$, se pide la forma más sencilla de los números.

$$u_{n+1} = 1 + u_n + 2u_{n-1}$$

(H. Brocard).

70. Se da un círculo O de radio a y una recta fija FP á una distancia b del centro O. Se traza una tangente AB que corta á FP en B. Se proyecta el punto de contacto A en P sobre FP, y desde el punto A como centro, con AP como radio, se describe un arco de círculo que encuentra á AB en M, M'. Hallar el lugar de los puntos M, M'. Indicar las singularidades de la curva y los puntos particulares que resultan inmediatamente de los datos de la cuestión.

(H. Brocard).

71. Se dan una hipérbola equilátera y una circunferencia tangente á las dos asíntotas. Hallar el lugar del punto de intersección de las tangentes al círculo trazadas por las proyecciones de un punto A de la hipérbola sobre sus asíntotas.

(H. Brocard).

72. Sean A', B' los vértices de los triángulos equiláteros construídos exterior ó interiormente sobre los lados AB, BC de un triángulo ABC. Si sobre B'A se construye el triángulo equilátero B'KA, el cuadrilátero A'CKA será un paralelógramo.

(H. Van Aubel).

73. Si sobre tres lados AB, BC, CD de un cuadrilátero ABCD se construyen exterior ó interiormente los triángulos equiláteros AA'B, BB'C, CC'D, y sobre C'A' se construye el triángulo equilátero C'KA' ó A'KC', la figura KAB'D será un paralelógramo [1].

(H. Van Aubel).

74. Suponiendo que m y n sean enteros y positivos, demostrar que se verifica la igualdad

$$(m+n+1)! = \frac{m!\,n!}{\frac{1}{m+1} - \frac{n}{m+2} + \frac{n(n-1)}{1.2\,(m+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3\,(m+4)} + \dots}$$

(Juan J. Durán Loriga).

75. Se dan dos segmentos situados en una recta. Hallar el lugar de los puntos en que los ángulos según los que se ven los dos segmentos forman una suma constante.

(N. C. M.) *(H. Brocard).*

(1) Para evitar todo equívoco, rogamos al lector que se fije en la convención siguiente: Cuando decimos que sobre una recta MN se ha construido un triángulo MPN, entenderemos que, si se hace girar la figura de modo que la línea MN esté dirigida de *izquierda á derecha*, el vértice P se halla *sobre* el lado MN.

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos