

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

LIGNE D'INTERSECTION

d'une surface de révolution avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe.

PAR

M. GEMINIANO PIRONDINI, à Parme

(CONCLUSIÓN)

5. On veut que le cylindre coupant la surface soit déterminé de façon, que la transformée Λ de l'intersection, lorsqu'on déroule le cylindre sur un plan, soit égale à la ligne méridienne L .

Cette condition équivaut à l'autre que l'équation de la transformée plane en coordonnées ζ, σ puisse se dériver de l'équation (11) par une substitution de la forme:

$$(16) \quad z = p + \zeta \cos \varepsilon - \sigma \sin \varepsilon, \quad R = q + \zeta \sin \varepsilon + \sigma \cos \varepsilon,$$

p, q, ε étant des constantes, dont la signification géométrique est évidente.

L'équation de la transformée plane est donc:

$$(17) \quad p + \zeta \cos \varepsilon - \sigma \sin \varepsilon = f(q + \zeta \sin \varepsilon + \sigma \cos \varepsilon)$$

Si l'on remarque que, dans les points correspondants des lignes L, Λ on a $z = \zeta$, les deux équations (11), (17) donnent naissance à l'autre:

$$(18) \quad p + f(R) \cos \varepsilon - \sigma \sin \varepsilon = f[q + f(R) \sin \varepsilon + \sigma \cos \varepsilon]$$

Celle-ci est l'équation de la section droite du cylindre.

Lorsque cette section est donnée *a priori* et (13) en est l'équation, l'élimination de R entre cette équation et l'autre (18) donne:

$$(19) \quad p + f[\psi(\sigma)] \cos \varepsilon - \sigma \sin \varepsilon = f \left\{ q + f[\psi(\sigma)] \sin \varepsilon + \sigma \cos \varepsilon \right\}$$

Telle est la condition que la fonction $f(\sigma)$ doit vérifier pour que la

surface de révolution, dont la ligne méridienne est la courbe $z=f(R)$, soit coupée par le cylindre susdit de manière, que la transformée plane de l'intersection soit égale à la ligne méridienne.

EXEMPLE.—Lorsque la surface est une sphère, on a:

$$f(R) = \sqrt{a^2 - R^2};$$

en appliquant l'équation générale (18), on trouve que la section droite du cylindre coupant la surface est représentée par l'équation:

$$R^4 - 2 \left\{ (p - \sigma \sin \varepsilon)^2 + (q + \sigma \cos \varepsilon)^2 - 2 (p \cos \varepsilon + q \sin \varepsilon)^2 \right\} R^2 + \\ + \left\{ (p - \sigma \sin \varepsilon)^2 + (q + \sigma \cos \varepsilon)^2 \right\}^2 - 4 a^2 (p \cos \varepsilon + q \sin \varepsilon)^2 = 0$$

Le problème est donc résolu dans toute sa généralité.

CAS PARTICULIER DE L'EQUATION (18).—Supposons que l'on obtienne la transformée plane Λ dans sa position, en faisant tourner la ligne méridienne L d'un angle droit autour de l'origine des axes coordonnés. On aura:

$$p = q = 0 \quad , \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

et l'équation (18) se réduit à l'autre:

$$f[f(R)] = -\sigma$$

Si donc la surface de révolution a pour ligne méridienne la courbe représentée par l'équation:

$$z = f(R) = \frac{R^m}{a^{m-1}},$$

on obtient pour équation de la section droite du cylindre:

$$R^{m^2} = -a^{m^2-1} \sigma$$

Pour $m=2$, la surface est un parabolôide et la section droite est la courbe représentée par l'équation:

$$R^4 = -a^3 \sigma.$$

Pour $m = \frac{1}{2}$ on obtient la surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de la tangente au sommêt. La section droite du cylindre est représentée par l'équation:

$$R = \frac{\sigma^4}{a^3}$$

CAS PARTICULIER DE L'ÉQUATION (19).—Supposons que la transformée plane Λ , considérée dans sa position, coïncide avec la ligne méridienne L . On aura:

$$p = q = z = 0$$

et l'équation (19) se réduit à la suivante:

$$f[\psi(\sigma)] = f(\sigma)$$

La section droite du cylindre soit, par exemple, l'épicycloïde représentée par l'équation (§. 1.)

$$\psi(\sigma) = \sqrt{a^2 - \sigma^2}$$

La condition précédente devient:

$$f(\sqrt{a^2 - \sigma^2}) = f(\sigma),$$

ce qui donne:

$$f(\sigma) = k(\sigma^4 - a^2\sigma^2),$$

k étant une constante. La surface de révolution a donc pour ligne méridienne la courbe de quatrième ordre représentée par l'équation:

$$z = k R^2 (R^2 - a^2)$$

6. On dit que deux surfaces de révolution S, S_1 du même axe sont *conjuguées*, lorsqu'on peut les couper par un cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe de façon, que la ligne méridienne d'une des surfaces soit égale à la transformée plane de l'intersection de l'autre, quand on déroule le cylindre sur un plan.

Si les équations (11), (12) sont celles de la ligne méridienne L et de la transformée plane Λ de l'intersection de la surface S , l'équation de la section droite du cylindre est (§. 3.)

$$(20) \quad f(R) = \varphi(\sigma)$$

Que l'on remplace les coordonnées ζ, σ , dans l'équation (12), par les quantités:

$$h + \zeta \cos \theta - \sigma \sin \theta \quad ; \quad k + \zeta \sin \theta + \sigma \cos \theta$$

(h, k, θ étant des constantes) ce qui correspond à un changement quelconque des axes coordonnés. On obtient:

$$h + \zeta \cos \theta - \sigma \sin \theta = \varphi(k + \zeta \sin \theta + \sigma \cos \theta)$$

Soit S_1 la surface de révolution ayant pour ligne méridienne L_1 la courbe dont l'équation est:

$$(21) \quad h + z \cos \theta - R \sin \theta = \varphi(k + z \sin \theta + R \cos \theta)$$

et supposons que la transformée plane Λ , de l'intersection soit représentée par l'équation:

$$m + \zeta \cos \omega - \sigma \sin \omega = f(n + \zeta \sin \omega + \sigma \cos \omega)$$

que l'on déduit de l'équation (11), en remplaçant les coordonnées z, R par les autres ζ, σ , à l'aide d'une transformation analogue à celle indiquée par les équations (16).

La section droite du cylindre coupant la surface S_1 est alors représentée par l'équation qu'on obtient en éliminant ζ entre les deux équations suivantes:

$$(22) \quad \begin{cases} h + \zeta \cos \theta - R \sin \theta = \varphi(k + \zeta \sin \theta + R \cos \theta) \\ m + \zeta \cos \omega - \sigma \sin \omega = f(n + \zeta \sin \omega + \sigma \cos \omega) \end{cases}$$

On peut donc énoncer le théorème: *Pour que les surfaces de révolution S, S_1 , dont les lignes méridiennes sont représentées par les équations (11) et (21) soient conjuguées, il faut et suffit que les fonctions f et φ jouissent de la propriété que l'équation (20) et celle que l'on obtient en éliminant ζ entre les équations (22) reviennent l'une à l'autre.*

CAS PARTICULIERS.—On peut effectuer l'élimination de ζ entre les équations (22) lorsqu'on a $\theta = 0$, ou bien $\omega = 0$.

Si à la fois $h = k = m = n = \theta = \omega = 0$, on obtient:

$$(23) \quad \varphi(R) = f(\sigma)$$

Cette équation doit coïncider avec l'équation (20).

7. La coïncidence des équations (20), (23) a lieu, par exemple, lorsqu'on prend

$$f(R) = (h + a_1 R + a_2 R^2 + \dots + a_{m-1} R^{m-1} + a_m R^m)^n$$

$$\varphi(\sigma) = (k - a_1 \sigma - a_2 \sigma^2 - \dots - a_{m-1} \sigma^{m-1} - a_m \sigma^m)^n$$

$h, k, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, n$ étant des constantes quelconques.

Donc «*Les surfaces de révolution, ayant pour lignes méridiennes les courbes représentées par les équations:*

$$z = f(R) = (h + a_1 R + a_2 R^2 + \dots + a_{m-1} R^{m-1} + a_m R^m)^n$$

$$z = \varphi(R) = (k - a_1 R - a_2 R^2 - \dots - a_{m-1} R^{m-1} - a_m R^m),$$

sont conjuguées entre elles: le cylindre coupant ces deux surfaces a pour section droite la courbe représentée par l'équation:

$$h + a_1 R + a_2 R^2 + \dots + a_{m-1} R^{m-1} + a_m R^m = k - a_1 \sigma - a_2 \sigma^2 - \dots - a_{m-1} \sigma^{m-1} - a_m \sigma^m$$

EXEMPLE.—La surface de révolution donnée soit de deuxième ordre ayant le centre à distance finie; si l'équation de la ligne méridienne est:

$$\frac{z^2}{m} + \frac{R^2}{n} = 1,$$

on a:

$$z = f(R) = \sqrt{m - \frac{m}{n} R^2}$$

et conséquemment:

$$\varphi(R) = \sqrt{p + \frac{m}{n} R^2},$$

p étant une constante.

La ligne méridienne de la surface conjuguée est donc représentée par l'équation:

$$\frac{z^2}{p} - \frac{R^2}{\left(\frac{np}{m}\right)} = 1$$

Une surface de révolution de deuxième ordre ayant le centre à distance finie a donc pour surface conjuguée une autre surface de la même nature. Pour équation de la section droite du cylindre nous avons:

$$\sqrt{m - \frac{m}{n} R^2} = \sqrt{p + \frac{m}{n} \sigma^2},$$

c'est-à-dire:

$$R = \sqrt{\frac{n(m-p)}{m} - \sigma^2}$$

Cette courbe est donc une épicycloïde (§. 1).

Si $m = n = a^2$; $p = b^2$, on a:

$$f(R) = \sqrt{a^2 - R^2} \quad , \quad \varphi(R) = \sqrt{b^2 + R^2}$$

Une sphère a donc pour surface conjuguée un hyperboloïde à deux nappes dont la ligne méridienne est une hyperbole équilatère.

Lorsque le théorème, que l'on vient de démontrer dans ce numéro, n'offre pas d'utilité pour la détermination de la surface conjuguée à une surface de révolution donnée, on peut appliquer les considérations développées au §. 7.

EXEMPLES.—1^o) Si la surface donnée est un cône de rotation, on a:

$$z = f(R) = k R$$

Soit

$$\zeta = \varphi(\sigma)$$

l'équation *inconnue* de la transformée plane Λ ; les équations (20), (23) deviennent:

$$k R = \varphi(\sigma) \quad , \quad k \sigma = \varphi(R) \quad ,$$

d'où, en éliminant R :

$$\varphi \left[\frac{\varphi(\sigma)}{k} \right] = k \sigma$$

Cette relation donne:

$$\varphi(\sigma) = k \sigma \quad , \quad \text{ou bien} \quad \varphi(\sigma) = \frac{a^2}{\sigma} \quad ,$$

a étant une constante.

La première solution donne $R = \sigma$, équation d'une droite passant par le pôle; le cylindre se réduit à un plan passant par l'axe de rotation de la surface. Ce résultat n'a évidemment aucune importance. La deuxième solution donne:

$$(24) \quad R = \frac{a^2}{k \sigma} \quad , \quad z = \sigma(R) = \frac{a^2}{R} \quad ;$$

la surface de révolution conjuguée au cône est donc engendrée par la rotation d'une hyperbole équilatère autour d'une de ses asymptotes.

L'analyse précédente démontre que: *Le cylindre, dont de la section droite est la courbe représentée par l'équation (24), coupe la surface, engendrée par la rotation d'une hyperbole équilatère tournant autour d'une de ses asymptotes, suivant une hélice.*

2º) Si la surface donnée est une parabololoïde, on a:

$$z = f(R) = \frac{R^2}{a}$$

Un procédé analogue au précédent nous conduit à la équation:

$$\varphi \left[\sqrt{a \varphi(\sigma)} \right] = \frac{\sigma^2}{a}$$

ayant pour solution:

$$\sigma(\sigma) = \frac{\sigma^2}{a}, \quad \text{ou bien} \quad \varphi(\sigma) = \frac{\left(b^{\frac{3}{2}} - \sigma^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{4}{3}}}{a},$$

b étant une constante.

La première solution, donnant $R = \sigma$, n'a pas d'importance; la deuxième donne pour équation de la ligne méridienne de la surface inconnue:

$$z = \varphi(R) = \frac{\left(b^{\frac{3}{2}} - R^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{4}{3}}}{a},$$

c'est-à-dire:

$$\left[(R^3 - b^3)^2 - a^3 z^3 \right]^2 = 16 a^3 b^3 R^3 z^3$$

La ligne méridienne est donc une courbe algébrique de 12^{ème} ordre. La section droite du cylindre coupant les surfaces conjuguées est représentée par l'équation:

$$R = \sqrt{a \varphi(\sigma)} = \left(b^{\frac{3}{2}} - \sigma^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

8. Je vais indiquer le procédé à suivre pour déterminer des couples de surfaces de révolution conjuguées, lorsqu'on donne le cylindre coupant.

Soient (11) et (13) les équations de la ligne méridienne L d'une surface de révolution *inconnue* S et de la section droite *donnée* Γ du cylindre. La transformée plane Λ de l'intersection de S avec le cylindre est représentée par l'équation (§. 3).

$$\zeta = f[\psi(\sigma)],$$

qui, par un changement d'axes coordonnés, devient:

$$h + \zeta \cos \theta - \sin \theta = f[\psi(k + \zeta \sin \theta + \sigma \cos \theta)]$$

Que l'on prenne pour ligne méridienne de une surface de révolution S_1 la courbe Λ représentée par l'équation:

$$(25) \quad h + z \cos \theta - R \sin \theta = f[\psi(k + z \sin \theta + R \cos \theta)]$$

On conclut alors que l'équation de la transformée plane Λ , de l'intersection de S_1 avec le même cylindre est:

$$(26) \quad h + \zeta \cos \theta - \psi(\sigma) \sin \theta = f \left\{ \psi \left[k + \zeta \sin \theta + \psi(\sigma) \cos \theta \right] \right\}$$

Les lignes représentées par les équations (11), (26) doivent être égales entre elles. Or si dans l'équation (11) on fait la substitution déterminée par les équations (16) (ce qui correspond à un changement quelconque d'axes coordonnés), l'équation (11) se réduit à l'autre (17).

La fonction f doit donc vérifier la condition exprimée par l'équation que l'on obtient en éliminant ζ entre les équations (17), (26).

Les deux surfaces de révolution conjuguées ont pour lignes méridiennes les courbes représentées par les équations (11) et (25).

9. CAS PARTICULIERS.—L'élimination de ζ entre les équations (17), (26) peut être effectuée lorsqu'on a $\theta = 0$, ou bien $\varepsilon = 0$. Si à la fois on a $h = k = 0 = 0$, l'élimination de ζ entre les équations (17), (26) donne:

(27)

$$p + f \left\{ \psi[\psi(\sigma)] \right\} \cos \varepsilon - \sigma \sin \varepsilon = f \left[q + f \left\{ \psi[\psi(\sigma)] \right\} \sin \varepsilon + \sigma \cos \varepsilon \right]$$

EXEMPLE.—La section droite du cylindre soit la spirale logarithmique;

$$R = \psi(\sigma) = \sigma \cdot \cos i$$

Puisque

$$\psi[\psi(\sigma)] = \sigma \cdot \cos^2 i,$$

la condition (27) devient:

$$(28) \quad p + f(\sigma \cos^2 i) \cos \varepsilon - \sigma \sin \varepsilon = f[q + f(\sigma \cos^2 i) \sin \varepsilon + \sigma \cos \varepsilon]$$

La surface de révolution soit un cône; puisque, dans ce cas, on a:

$$z = f(R) = aR,$$

si l'on applique l'équation (28), on obtient:

$$p - aq = [(1 + a^2 \cos^2 i) \sin \varepsilon + a \sin^2 i \cdot \cos \varepsilon] \sigma$$

Cette condition est vérifiée par identité, si l'on prend les quantités p, q, ε de façon, qu'il résulte:

$$\frac{p}{q} = a, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{a \sin^2 i}{1 + a^2 \cos^2 i}$$

L'équation (25), dans ce cas, se réduit à l'autre

$$z = a \cos i \cdot R$$

Conséquentment un cône de révolution, coupé par un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique, ayant le pôle sur l'axe de rotation, a pour surface conjuguée un autre cône de révolution. Ceci est un résultat connu.

AUTRE CAS PARTICULIER.—Que l'on suppose:

$$h = k = p = q = 0 = \varepsilon = 0$$

En éliminant ζ entre les équations (17), (26), on conclut que la fonction f doit vérifier la condition suivante.

$$(29) \quad f \{ \Psi [\Psi (\sigma)] \} = f (\sigma)$$

Les lignes méridiennes des surfaces de révolution conjuguées sont représentées par les équations.

$$z = f (R) \quad , \quad z = f [\Psi (R)]$$

EXEMPLES.—1.° Lorsque la section droite du cylindre est une spirale logarithmique ayant le pôle sur l'axe, on a:

$$R = \Psi (\sigma) = \sigma \cdot \cos i$$

et l'équation (29) devient:

$$f (\sigma \cos^2 i) = f (\sigma)$$

Cette équation, si $\cos i$ n'est pas égal à l'unité, n'est jamais vérifiée.

On conclut qu'il n'y a aucune couple de surfaces conjuguées par rapport à un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique, ayant le pôle sur l'axe.

2.° Si l'on suppose:

$$(30) \quad R = \Psi (\sigma) = \frac{a^2}{\sigma},$$

ou bien

$$(31) \quad R = \Psi (\sigma) = (a^m - \sigma^m)^{\frac{1}{m}},$$

a et m étant des constantes, on trouve

$$\Psi [\Psi (\sigma)] = \sigma$$

et l'équation (29) se réduit à une identité, quelle que soit la fonction f .

Donc «Lorsque le cylindre a pour section droite une ligne représentée par une des équations (30), (31), à chaque surface de révolution correspond toujours une surface conjuguée».

Si, par exemple, on prend le cône de rotation, on a:

$$z = f(R) = k R$$

La surface conjuguée est donc engendrée par la rotation de l'hyperbole équilatère:

$$z = \frac{a^2 k}{R}$$

ou bien de l'ellipse d'ordre m

$$\frac{z^m}{k^m} + R^m = a^m,$$

suivant que le cylindre coupant la surface a pour section droite l'une, ou bien l'autre, des lignes (30), (31).

Le premier de ces résultats coïncide avec ce que l'on a obtenu dans un exemple du §. 8.



CHARLES SANTIAGO ⁽¹⁾ PEIRCE

y

OSCAR HONWARD MITCHELL

Voy á presentar una ligera reseña de los trabajos lógico-matemáticos de tan distinguidos sabios norte-americanos, ocupándome á la vez de ambos, porque han ejercido el uno sobre el otro una acción recíproca. El gran lógico Santiago Peirce ha sido el maestro de Mitchell y á su vez los trabajos de éste han tenido influencia sobre los últimos de su insigne profesor.

Charles Santiago Peirce es el hijo de uno de los más distinguidos matemáticos americanos, el profesor Benjamin Peirce, de la Universidad de Harvard.

Padre é hijo han enriquecido á la ciencia con numerosas notas y trabajos insertos en diferentes publicaciones científicas y con especialidad en las memorias y actas de las sociedades y academias de América, habiendo contribuído ambos á la tarea de crear y dar carácter á la ciencia americana, librándola de ser tributaria de la europea.

(1) Aunque parezca extraño, el primer nombre está en inglés y el segundo en español, ignoró porqué.

Prescindiendo de los trabajos del padre, de los cuales uno solo, á lo que yo sepa, puede tener relación con la Lógica de los relativos (me refiero á su admirable libro *The lineal associative Algebra*), voy á indicar ligeramente los méritos del hijo ante la Lógica, objeto preferente de sus estudios, aunque ciertamente no le son estrañas otras muchas ciencias.

Santiago Peirce ha sacado á lo que supongo su instrucción lógica principalmente de los escritos del egregio matemático y lógico Augustus De Morgan, por quien profesa tal admiración que declara en uno de sus escritos parecerle ser (como lo es en efecto) uno de los mayores lógicos que hayan nunca existido. Peirce es el heredero científico de De Morgan, y su mayor título de gloria son sin duda sus trabajos sobre la Lógica de los relativos, de la que el lógico inglés fué padre.

Limítase Peirce en sus más antiguos trabajos titulados:

On an improvement in Boole calculus of Logic.

On the natural classification of arguments.

On a new list of categories.

á introducir algunas notables modificaciones en la Lógica ecuacional ó cálculo Booliano, modificaciones de las cuales alguna había sido indicada por Stanley Jevons, y á ilustrar la lógica aristotélica.

Donde verdaderamente aparece su eminente personalidad científica es, á mi modo de ver, en su hermosa memoria *The Logic of relatives* llena de interesantísima doctrina lógica y de la que me parece que quizás no se han ocupado los sabios tanto como merece. En esta memoria, publicada en las de la Academia Nacional de Ciencias de Washington en el año 1870, se introduce la cópula implicativa que después había de ser ya casi exclusivamente adoptada por nuestro autor con preferencia á la cópula *igual* que es de más compleja naturaleza.

Como el título indica, el autor se ocupa principalmente de la Lógica de los relativos, tratando muy poco de la Lógica de lo absoluto. Dificil es dar una idea del rico contenido de este trabajo y de los originales y profundos conceptos en él expuestos. Peirce sabe hallar curiosísimas conexiones entre cosas que á primera vista parecen no existir.

La publicación más capital de Peirce es su memoria *On the Algebra of Logic* inserta en el *American Journal of Mathematics* vol. III, 1880. En ella cifra en símbolos toda la antigua Lógica, y establece después el cálculo de Boole, valiéndose con grandísima sagacidad de las fórmulas implicativas, en vez de seguir la marcha inversa, esto es, fun-

dar mediante postulados el cálculo, y de él deducir como casos particulares los silogismos.

El eminente lógico alemán Schröder opina que los procedimientos de Peirce se asemejan quizás al de escribir una gramática en el idioma mismo que se pretende enseñar, pues la base de su edificio científico es precisamente el cálculo de proposiciones.

El trabajo de Peirce ocasionó una correspondencia científica con Schröder á propósito de la segunda ley distributiva de la multiplicación lógica, según queda ya relatado al ocuparme de este último lógico (*Progreso Matemático* núm. 14).

Está unánimemente reconocido por todos que la memoria de que nos ocupamos ha tenido el privilegio de marcar un nuevo camino dentro de la Lógica simbólica y que forma época en la historia de esta ciencia.

Entre tanto, Peirce, lector de Lógica en la Universidad de Johns Hopkins, de Baltimore (por muchos títulos ilustre) había reunido á su alrededor algunos notables discípulos, Gilman, Allan Marquand, Christine Ladd y Oscar Howard Mitchell, publicándose en el año 1883, en Boston por Litle, Brown and. C.º, el hermoso librito *Studies in Logic* by members of the Johns Hopkins University, en el que se colecciona la obra común de maestro y discípulos. Peirce contribuyó á este libro con las siguientes notas.

A theory of probable inference (hermosa exposición de la lógica inductiva).

On a limited Universe of marks.

The logic of relatives (donde en parte se expone lo ya dicho en su otra memoria de igual título, y además se comentan los descubrimientos de Mitchell).

Mitchell por su parte contribuyó con su memoria: *On a new Algebra of logic*, que en extracto había sido ya publicada en las *Johns Hopkins University Circulars*. Las ideas de Mitchell, que al crear la teoría de las múltiples dimensiones en Lógica, llegaba á lo que hasta él había sido un imposible, esto es, á enlazar en un cuerpo común de doctrina la lógica de lo absoluto y la de lo relativo, fueron adoptadas inmediatamente con su maestro. Lástima grande que un sabio como Mitchell, de quien tanto podía esperarse, falleciese á los 38 años de edad en Marietta (Ohío) de donde era profesor de matemáticas. Yo no sé si desde 1883 volvió á publicar nada referente á Lógica; sólo conozco algunos trabajos referentes á la teoría de los números.

En el *American Journal of Mathematics* vol. 7, año 1884, publicó, en fin, Peirce, bajo el título de *On the Algebra of Logic, a contribution*

to the *Philosophy of notation* un resumen completo de sus doctrinas, empleando el descubrimiento de Mitchell bajo una notación diferente de la usada por el inventor. En dicho resumen se señalan más y más las diferencias existentes entre la exposición de las cuestiones lógicas, adoptada por los lógicos de Baltimore de la adoptada por los sabios alemanes. Los primeros reducen todo con preferencia al cálculo de las proposiciones, los segundos al cálculo de las clases, considerado desde un punto de vista diferente del adoptado por los americanos.

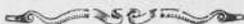
Posterior á lo citado, no conozco nada escrito sobre Lógica, excepto una pequeña nota incluída en el núm. I del *American Journal of Psychology* y titulada *On the logical machines*. Otros opúsculos hay anteriores á 1884 del Sr. Peirce, pero yo creo que los más importantes son los que llevo indicados.

Reciba el Sr. Peirce, con las excusas por los errores en que haya incurrido, un testimonio de admiración sincera que desde el otro lado de los mares le envía un extranjero.

Dios quiera que pronto amanezca *el hermoso día en que alguien ilumine con un rayo de luz las múltiples cuestiones de la lógica de los relativos*.

PROFESOR DR. VENTURA REYES PRÓSPER.

Madrid 3 de Junio 1892.



GEOMETRÍA DEL TRIANGULO

Algunas propiedades de los triángulos podares y de los círculos de Schoute

POR M. EMILE VIGARIÉ

(CONTINUACIÓN)

9. Sean (X_1, Y_1, Z_1) ; (X_2, Y_2, Z_2) los ángulos según los que se ven los lados BC, CA, AB desde dos puntos inversos, P_1 y P_2 . Se sabe que los ángulos X_1, X_2 satisfacen siempre á una de las cuatro ecuaciones

$$tg(X_1 \pm X_2) \pm tg A = 0$$

Se tendrá, pues, salvo un múltiplo de π :

$$(8) \quad X_1 + X_2 = A, \quad Y_1 + Y_2 = B, \quad Z_1 + Z_2 = C$$

Á estas relaciones corresponden otras relativas á los ángulos de los triángulos podares de P_1 y P_2 . En efecto, la comparación de las fórmulas (1) y (2) da:

$$2A + A'_1 + A'_2 = X_1 + X_2 = A, \quad 6$$

$$(9) \quad A + A' + A'_2 = 0, \quad B + B' + B'_2 = 0, \quad C + C' + C'_2 = 0.$$

La suma de tres ángulos análogos $A + A' + A'_2$, por ejemplo, es, pues, nula, igual á π ó á 2π , según la manera de contarse los ángulos.

10. La dirección de los lados del triángulo podar de un punto, P_1 , es fácil de obtener. Los lados $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ son, en efecto, perpendiculares á las rectas que unen los vértices del triángulo ABC al punto P_2 inverso de P_1 .

11. TRIÁNGULOS PODARES DE PUNTOS TRIPOLARMENTE ASOCIADOS.—*Definición.*—M. J Neuberg ha propuesto llamar *puntos tripolarmente asociados* á dos puntos tales, que los cuadrados de sus distancias á los tres vértices del triángulo de referencia son proporcionales á tres cantidades dadas. Estos puntos, P y P' se hallan en línea recta con el centro O del círculo circunscripto, y son conjugados armónicos con relación á este círculo. Se tiene, pues,

$$OP \cdot OP' = R^2 \quad (10)$$

Si ξ , n , ζ son las coordenadas tripolares de estos puntos, es decir, los cuadrados de las distancias de estos puntos á los tres vértices de ABC, la recta perpendicular al punto medio de PP' tiene por ecuación baricéntrica

$$\xi\alpha + n\beta + \zeta\gamma = 0 \quad (11)$$

12. TEOREMA.—*Los triángulos podares de dos puntos tripolarmente asociados son inversamente semejantes:*

1.º Desde luego, si se consideran los dos ángulos según los que se ve el lado BC desde P y P', su suma algébrica es igual al doble del ángulo A. En efecto, siendo OB, según las fórmulas (10), media proporcional entre OP y OP', resulta que la circunferencia PBP' es tangente á OB; luego

$$\angle OBP = \angle BP'P$$

$$\text{Entonces} \quad \angle BP'P = \angle BOP + \angle BP'P$$

$$\text{Igualmente,} \quad \angle CPP' = \angle COP + \angle CP'P,$$

$$\text{y sumando,} \quad \angle BPC = \angle BOC + \angle BP'C = 2A + \angle BP'C$$

Para poner los signos en evidencia, sería preciso escribir:

$$(PB, PC) + (P'B, P'C) = 2A.$$

Se demostraría fácilmente la generalidad de esta fórmula.

2.º Sean $A'B'C'$ y $A''B''C''$ los triángulos podares de P y P' . Las fórmulas (1) dan:

$$A + A' = BPC, \quad A + A'' = BP'C.$$

Y sumando: $2A + A' + A'' = BPC + BP'C$;

pero acabamos de ver que:

$$BPC + BP'C = 2A.$$

Luego $A' = -A''$.

Siendo los ángulos de uno de los triángulos podares iguales á los del otro y de signos contrarios, los triángulos son inversamente semejantes.

Se podría llegar á las mismas conclusiones evaluando los lados. Evaluemos las áreas S' y S'' . Las fórmulas (3) y (10) dan:

$$\frac{S'}{S} = \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{4R^2} = \frac{OP(OP' - OP)}{4R^2} = \frac{OP \cdot PP'}{4R^2} = \frac{PP'}{4OP'}$$

Igualmente

$$\frac{S''}{S} = -\frac{OP' \cdot PP'}{4R^2} = -\frac{PP'}{4OP}$$

de donde:

$$\frac{4}{S} (OP' - OP) = \frac{PP'}{S'} + \frac{PP'}{S''}$$

De aquí la relación:

$$\frac{4}{S} = \frac{1}{S'} + \frac{1}{S''}$$

ó en valor absoluto

$$\frac{4}{S} = \frac{1}{S'} - \frac{1}{S''}$$

Esta fórmula permite calcular el área de los triángulos podares de dos puntos tripolarmente asociados.

13. TRIÁNGULOS PODARES DE LOS PUNTOS GEMELOS.—Definición.—

Dado un punto P , si se toman los simétricos de los tres círculos BPC , CPA , APB , con relación á los lados sobre los que se hallan descritos, estos nuevos círculos se cortan en un segundo punto, P_0 . Los puntos P , P_0 , son puntos gemelos (véase sobre este método de transformación la nota que hemos publicado en el *Journal de mathématiques élémentaires*, 1891).

Según esta definición, desde dos puntos gemelos se ven los lados del triángulo de referencia, según ángulos iguales y de signos contrarios (salvo un múltiplo de π).

14. TEOREMA.—Los inversos de dos puntos gemelos son puntos *tripolarmente asociados*.

Sean (X_1, P_1, Z_1) y $(-X_1, -Y_1, -Z_1)$ los ángulos, según los que se ven los lados del triángulo de referencia desde dos puntos gemelos. Según las fórmulas (8), desde los inversos de estos puntos se verán los lados de ABC, según ángulos

$$\begin{cases} X_2 = A - X_1 \\ Y_2 = B - Y_1 \\ Z_2 = C - Z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} X'_2 = A + X_1 \\ Y'_2 = B + Y_1 \\ Z'_2 = C + Z_1 \end{cases}$$

Aplicando ahora las fórmulas (1) se halla que los ángulos (A_0, B_0, C_0) ; (A'_0, B'_0, C'_0) de estos triángulos podares son:

$$\begin{cases} A_0 = A - X_1 - A = -X_1 \\ B_0 = -Y_1 \\ C_0 = -Z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} A'_0 = A + X_1 - A = X_1 \\ B'_0 = Y_1 \\ C'_0 = Z_1 \end{cases}$$

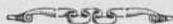
Teniendo los triángulos $A_0B_0C_0$, $A'_0B'_0C'_0$ iguales sus ángulos y de signos contrarios (salvo un múltiplo de π), son inversamente semejantes. Estos son los triángulos podares de dos puntos tripolarmente asociados.

En vez de construir el punto P_0 , gemelo de P, según la definición dada arriba, se podrá pues, emplear el procedimiento siguiente, debido á M. Schoute (*Bulletin de Sciences mathématiques*, 1982):

Se toma el punto P_2 inverso de P, después el punto P'_2 , tripolarmente asociado á P_2 , en fin, el punto P_0 inverso de P'_0 . P_0 es el punto gemelo de P.

La relación que liga los puntos gemelos á los puntos inversos y á los puntos tripolarmente asociados, permite hallar fácilmente las relaciones que ligan entre sí sus triángulos podares. No insistiremos más en esto.

Para completar este artículo, tendremos que ocuparnos de los triángulos antipodares, y mostrar cómo, de la teoría de las figuras semejantes, construídas sobre los lados de un triángulo, se puede deducir la teoría de los triángulos podares. Este asunto es demasiado largo para tener cabida aquí; nos ocuparemos de él en el próximo artículo.



SOBRE UN MÉTODO DE COMPARACIÓN DE LAS RESOLUCIONES GEOMÉTRICAS

POR M. EMILE LEMOINE

ANTIGUO ALUMNO de la Escuela Politécnica.

En 1883 publiqué (*Journ. de mathém. élém.* de M. de Longchamps, pág. 267) una solución de la cuestión resuelta en EL PROGRESO MATEMÁTICO por D. Ventura Reyes y Prósper (t. II p. 147); y juzgo interesante el comparar aquí las dos soluciones para ofrecer un ejemplo de cómo se puede *medir* la sencillez de las construcciones geométricas.

Para los lectores que no tengan á su disposición la memoria que publiqué en 1888 en los *Comptes rendus* de los trabajos de *l'Association française pour l'Avancement des Sciences* en el Congreso de Oran, ó la que se encuentra en el periódico *Mathesis* (1888, págs. 217 y siguientes), voy á dar aquí algunas breves indicaciones suficientes para comprender el espíritu del método y para explicarlo. Se la encontrará también sumariamente expuesta en los *Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, sesión del 16 de Julio de 1888.

Con un compás no se puede hacer mas que las tres operaciones siguientes:

- 1.^a Hacer coincidir una de las puntas con un punto señalado en el dibujo; yo la llamo operación C_1 .
- 2.^a Colocar la punta en un punto determinado de una línea trazada, á la que llamo C_2 .
- 3.^a Describir el círculo con el compás, á la que llamo C_3 , supuesto el círculo trazado por completo, aun cuando solo se utilice una pequeña parte del mismo.

Con una regla se pueden hacer las dos operaciones siguientes:

- 1.^a Hacer coincidir el borde de la regla con un punto dado; yo la llamo R_1 . Si hago pasar el borde de la regla por dos puntos dados, será $2R_1$.
- 2.^a Trazar la recta haciendo resbalar el lápiz ó el tira-líneas á lo largo de la regla; yo la designo con R_2 .

De esto se sigue que toda operación hecha con la regla y el compás tendrá por símbolo representativo de las operaciones hechas:

$$n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3 + m_1 R_1 + m_2 R_2$$

Esto sentado, suponiendo equivalentes, para simplificar, las operaciones elementales C_1, C_2, C_3, R_1, R_2 , llamo coeficiente de sencillez de una construcción al número:

$$n_1 + n_2 + n_3 + m_1 + m_2,$$

y coeficiente de *exactitud* al número $n_1 + n_2 + m_1$; porque la exactitud del resultado no depende realmente mas que de la precisión de las operaciones preliminares C_1, C_2, R_1, n_3 y m_2 serán los números de círculos y el de rectas trazados.

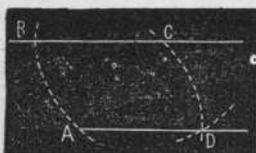
A esto añado que, en cada construcción componente de una solución: trazar por un punto una paralela á una recta, bajar desde un punto una perpendicular á una recta, etc., que se hace para llegar á un resultado geométrico, débese trazar el menor número posible de líneas, y servirse, cuando se puede, de las ya empleadas.

Estudiando sistemáticamente, desde un punto de vista las construcciones elementales dadas desde Euclides en todas las geometrías, se nota con sorpresa que *la mayor parte* son demasiado complicadas.

Véanse dos ejemplos.

1.º Por un punto A trazar una paralela á una recta dada BC.

Véase desde luego la construcción indicada siempre.



Desde A como centro (fig. 1.^a), con un radio cualquiera, suficiente para cortar á BC, describo una circunferencia que corta á BC en C: Operación $(C_1 + C_3)$.

Desde C como centro, con el mismo radio describo una circunferencia que corta á BC

en B: op. $(C_1 + C_3)$.

Coloco una punta del compás en B, la otra en A: op. $(2C_1)$.

Describo desde C como centro con esta abertura de compás por radio una circunferencia que corta en D á la primera circunferencia descrita: op. $(C_1 + C_3)$.

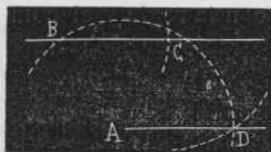
Uno AD: op. $(2R_1 + R_2)$.

En total: $5C_1 + 3C_3 + 2R_1 + R_2$.

Sencillez: 11. — exactitud: 7. Tres circunferencias y una recta.

Véase ahora otra construcción un poco más sencilla:

Esto es verdaderamente extraordinario para el problema que, desde hace tantos siglos se halla en la base de los procedimientos de construcción.



Desde el punto de A como centro (fig. 2.^a) con un radio cualquiera suficiente para pasar de BC, describo una circunferencia que corta á BC en B: op. $(C_1 + C_3)$.

Desde B con *el mismo radio*, describo una circunferencia que corta á BC en C: op. $(C_1 + C_3)$.

Desde C como centro con *el mismo radio*, describo una circunferencia que corta en D á la primera descrita: op. $(C_1 + C_3)$.

Uno AD: op. $(2 R_1 + R_2)$.

En total: $3 C_1 + 3 C_3 + 2 R_1 + R_2$.

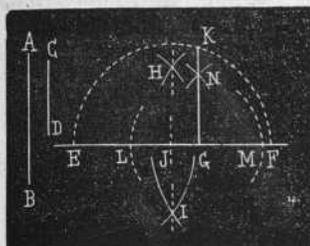
Sencillez: 9, exactitud: 5. Tres circunferencias y una recta.

AD es paralela á BC, porque la figura ABCD es un rombo.

Gano sobre la primera construcción el tomar la distancia AB (figura 1.^a) entre las piernas del compás.

2.^o Construir una media proporcional entre dos longitudes dadas AB y CD.

Primer procedimiento clásico:



Trazo una recta cualquiera EF op. (R_2) (fig. 3.^a). Entre las piernas del compás tomo la longitud AB: op. $(2C_1)$, y llevo esta longitud desde E á G sobre EF, siendo E un punto arbitrario de EF: op. $(C_2 + C_3)$; tomo CD que llevo á continuación de EG en GF sobre EF: op. $(3C_1 + C_3)$.

Tomo el punto medio de EF. Para esto desde E y F como centros con radio suficiente, describo 2 circunferencias que se cortan en H y en I: operación $(2C_1 + 2C_3)$. Uno HI que corta á EF en el punto medio J de EF: op. $(2R_1 + R_2)$. Coloco una punta del compás en J, la otra en E, y describo la circunferencia EKF: op. $(2C_1 + C_3)$.

En G levanto la perpendicular á EF que corta esta última circunferencia en K; para esto, desde G, como centro, describo una circunferencia que corta á EF en L y en M: op. $(C_1 + C_3)$. Desde L y M, como centro, describo dos circunferencias de igual radio que se cortan en N: op. $(2C_1 + 2C_3)$.

En fin, uno GK: op. $(2R_1 + R_2)$. GK es la media proporcional buscada.

En todo: $13 C_1 + 8 C_3 + 4 R_1 + 3 R_2$.

Sencillez: 28.—Exactitud: 17.—8 círculos y 3 rectas.

Si se hubiese empleado el segundo procedimiento clásico, fundado en que la longitud de la tangente trazada desde un punto á un círculo es media proporcional entre toda la secante y su parte exterior, etc., se habría obtenido por adiciones análogas:

$$6R_1 + 4R_2 + 11C_1 + C_2 + 8C_3$$

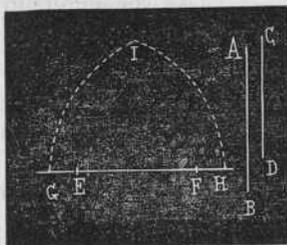
Sencillez: 30.—Exactitud: 18.—8 círculos y 4 rectas.

Véase ahora una construcción *mucho* más sencilla:

Trazo una recta cualquiera GH: op. (R_2) (fig. 4.^a).

Sobre GH tomo, á partir de un punto cualquiera E, la longitud EF

igual á la menor de las longitudes CD, AB: op. $(2 C_1 + C_2 + C_3)$.



Sobre FG á partir de F y en el sentido EF tomo $FG = AB$, y sobre EH, á partir de E y en dirección EF tomo $EH = AB$:

op. $(4 C_1 + 2 C_3)$.

Desde G y H como centros y todavía con el mismo radio AB describo circunferencias que se cortan en I: op. $(2 C_1 + 2 C_3)$.

La distancia EI que *no hay necesidad de trazar* es la media proporcional buscada.

En efecto. Los dos triángulos isósceles EIF, EHI son semejantes, puesto que el ángulo de la base E le es común, luego:

$$\frac{EF}{EI} = \frac{EI}{EH} \quad \text{ó} \quad \frac{CD}{EI} = \frac{EI}{AB} \quad (\text{l. q. d. d.})$$

Se ha obtenido esta construcción por

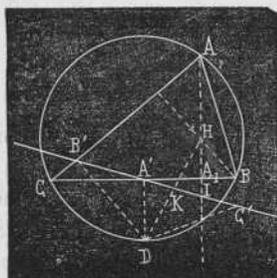
$$R_2 + 8 C_1 + C_2 + 5 C_3$$

Sencillez: 15.—Exactitud: 9.—Una recta y cinco círculos.

Ahora me refiero, en fin, á la solución muy sencilla de *expresar*, que he dado (*loc. cit.*) del problema que ha ocupado á D. Ventura Reyes Prósper, y cuyo enunciado es el siguiente:

Dado un triángulo inscrito en una circunferencia, hallar en ésta un punto tal, que los tres pies de las perpendiculares, bajadas desde este punto á los tres lados del triángulo, se hallen en una paralela á una dirección dada.

Supongo que, como datos gráficos, no hay sobre el dibujo más que el círculo, el triángulo inscrito y una recta que representa la dirección dada.



Supongamos resuelto el problema (figura 5.^a).

Sean A' , B' , C' los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto buscado D á los tres lados BC , CA , AB del triángulo, H el punto de encuentro de las alturas, K la intersección de DH con la recta $A'B'C'$. Es fácil ver que K es el medio de HD . Luego K pertenece al lugar de los medios de las rectas HD que unen el punto H á un punto variable D de la circunferencia. Este lugar es el círculo de los nueve puntos del triángulo ABC .

Sea I la intersección de AH con $A'B'C'$, K es evidentemente el me-

...

dio de A'I; luego K pertenece también á la recta lugar del medio de los segmentos de las rectas paralelas á la dirección dada, segmentos comprendidos entre las rectas CB y AH. K está, pues, determinado por estos dos lugares.

Solución gráfica.

- 1.º Trazar el círculo de los nueve puntos.
- 2.º Tomar el medio K' del segmento de la recta que determina la dirección de A'B'C', segmento comprendido entre BC y AH.
- 3.º Unir K' al pie A₁ de la altura que parte de A; K'A₁ corta al círculo de los nueve puntos en K.
- 4.º Unir KH que corta al círculo circunscrito á ABC en el punto buscado D.

Para trazar el círculo de los nueve puntos, trazo las dos alturas que parten de B y de A, y que se cortan en H, y uno GH:

$$\text{op. } (6R_1 + 3R_2 + 6C_1 + 6C_3).$$

Uno CH y hago pasar un círculo por los pies de las tres alturas:

$$\text{op. } (6R_1 + 3R_2 + 5C_1 + 4C_3).$$

y determino K': op. $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$

Uno A₁K' que me da K, después HK, que me da D: op. $(4R_1 + 2R_2)$.

En total: $18R_1 + 9R_2 + 13C_1 + 12C_3$.

Sencillez: 52 — Exactitud: 31 — 9 rectas, 12 círculos.

Examinemos ahora la solución de D. Ventura Reyes Prósper.

Nos referimos á la figura de la página 147, referente á la misma.

En un punto β sobre AC levanto una perpendicular á AC:

$$\text{op. } (2R_1 + R_2 + 2C_1 + C_2 + 2C_3)$$

Por β trazo una paralela á la dirección dada y me sirvo del círculo ya trazado desde β como centro cuyo radio he tomado bastante grande para que encuentre á LM, lo que reduce la operación á:

$$\text{op. } (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3).$$

Por γ levanto una perpendicular á AB: op. $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 2C_3)$.

Uno A α : op. $(2R_1 + R_2)$

En total: $8R_1 + 4R_2 + 7C_1 + C_2 + 6C_3$.

Sencillez: 26 — Exactitud: 16 — 4 rectas, 6 círculos.

Así, con el compás en la mano, esta solución es dos veces más sencilla que la mía; y, sin el análisis que acabamos de hacer de sus dos soluciones, hubiera sido difícil, puede ser, prever tal diferencia; porque en palabras mi solución no exige mayores desarrollos ni aún mayor elegancia. Si esto es así para cuestiones tan sencillas, se ve que la comparación llegaría á ser imposible para el caso de soluciones más complicadas.

Me parece pues indispensable hacer pasar toda solución geomé-

trica que se desee comparar con otra por el tamiz de este método.

Por lo demás, se notará en seguida que hay dos modos de elegancia geométrica: la de la demostración y la del compás, que, muy frecuentemente no tienen ninguna relación entre sí.

Si no se hubiera tenido en cuenta mas que la primera. Las construcciones diversas por las que se puede determinar cada punto notable en la Geometría del triángulo me han mostrado todo el interés que tiene también el ocuparse sistemáticamente de la segunda. Son, por decirlo así, un nuevo orden de especulaciones geométricas modestas que deben tenerse en cuenta.



NOTA SOBRE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

POR M. H. BROCARD.

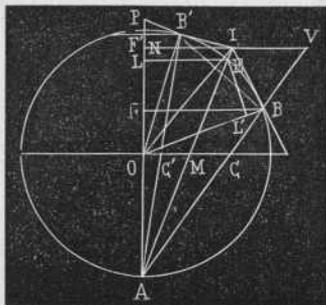
El *Traité de Géodésie* de FRANCEUR (edic. de 1879) contiene en el § 314 la indicación de una propiedad de la proyección estereográfica de un círculo, que se podría enunciar así:

Sean D , la distancia del polo del hemisferio proyectado en el polo de un círculo menor de radio esférico Δ , α y ρ los mismos elementos rectilíneos para la proyección estereográfica de estos puntos y líneas. Se tiene la relación

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } \Delta}$$

FRANCEUR llega á esta relación por una demostración bastante larga que me parece puede simplificarse.

Sean, en efecto, en el meridiano $PB'BA$, que tiene O por centro, BB' el círculo dado, $OC'C$ el plano de la proyección estereográfica (ecuador), A el polo de la proyección, diametralmente opuesto al polo P , E el polo del círculo BB' , M el medio de CC' ; φ , ψ los ángulos POB , POB' .



$$OM = \alpha = \frac{OC + OC'}{2},$$

$$MC = MC' = \rho = \frac{OC - OC'}{2}$$

$$\text{arc } PE = D = \frac{\text{arc } PB + \text{arc } PB'}{2}$$

$$\text{arc BE} = \text{arc EB}' = \Delta = \frac{\text{arc PB} - \text{arc PB}'}{2}$$

Sean F, F' las proyecciones de BB' sobre AP. Se tendrá

$$\frac{OC}{FB} = \frac{OA}{AF}, \quad \frac{OC'}{B'F'} = \frac{OA}{AF'}$$

ú

$$OC = \frac{\text{sen } \varphi}{1 + \cos \varphi} = \text{tg } \frac{\varphi}{2}, \quad OC' = \frac{\text{sen } \psi}{1 + \cos \psi} = \text{tg } \frac{\psi}{2},$$

y

$$\frac{OM}{MC} = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\text{sen } \frac{\varphi + \psi}{2}}{\text{sen } \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } \Delta}.$$

Véase una demostración aún más sencilla que ha tenido la atención de darme á conocer M. G. TARRY.

Por definición, M está en la línea que une el punto A al punto de intersección de las tangentes en los puntos B y B'.

Sean L y L' las proyecciones de E sobre OP y sobre OB, N la proyección de I sobre OP, V la intersección de IN con la prolongación de AB.

Tendremos

$$\frac{EL}{EL'} = \frac{IN}{IB}$$

Pero los ángulos IBV, IVB son iguales por tener igual medida,

Así $IB = IV$.

Luego

$$\frac{EL}{EL'} = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } \Delta} = \frac{IN}{IV} = \frac{IN}{IB}$$

y

$$\frac{IN}{IV} = \frac{OM}{MC} = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } \Delta}$$

En fin, M. G. TARRY observa que la propiedad del triángulo IVB de ser isósceles, resulta también de que este triángulo es semejante al triángulo formado por AB y por las tangentes en A y B.

La demostración precedente permite también establecer la igualdad de los segmentos MC, MC' determinados por la línea IMA, independientemente de toda propiedad de las proyecciones estereográficas.

(Septiembre 1881).



CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión núm. 62 (véase t. II pág. 128).

Resolver el sistema de ecuaciones

$$(A) \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = a, \quad (B) \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = b$$

(R. Guimaraes).

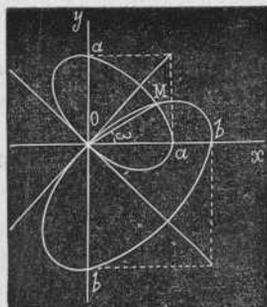
Solución por M. H. BROCARD.

Las dos curvas (A), (B) son elipses cuyo radio vector común MO corresponde al ángulo ω dado por la condición

$$\frac{a(\cos \omega + \operatorname{sen} \omega)}{1 + \operatorname{sen} \omega \cos \omega} = \frac{b(\cos \omega - \operatorname{sen} \omega)}{1 - \operatorname{sen} \omega \cos \omega}$$

de donde

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt[3]{\frac{b-a}{b+a}} = m.$$



Se tiene pues,

$$OM = \frac{a(1+m)}{\cos \omega(1+m^2+m)}$$

$$x = MO \cos \omega = \frac{a(1+m)}{1+m^2+m} = \frac{a(1-m^2)}{1-m^3}$$

$$x = \frac{(b+a)^{\frac{1}{3}} \left[(b+a)^{\frac{2}{3}} - (b-a)^{\frac{2}{3}} \right]}{2}, \text{ etc., etc.}$$

Se vuelven á hallar estos resultados tomando como incógnitas auxiliares $x+y$ y $x-y$.