Año II Zaragoza 15 Mayo de 1892 Núm. 17

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

LIGNE D'INTERSECTION

d'une surface de révolution avec un cilindre dont les génératrices son parallèles à l'axe.

PAR

M. GEMINIANO PIRONDINI, *à Parme*

M. CH. ROBERT, dans une Note insérée aux *N. Annales de Mathématiques* (année 1890) a démontré le théoréme suivant: *Etant donnée la courbe* C, *intersection d'une surface quelconque de révolution* S *autour d'un axe* OZ *avee un cylindre droit* S' *ayant pour directrice une spirale logarithmique de pôle* O, *la transformée de la courbe* C, *quand on déroule le cylindre, est une courbe appartenant à la même famille que la méridienne* C' *de la surface de révolution* S.

Dans cette Note j'étude l'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre quelconque ayant les génératrices parallèles à l'axe de la surface, et je donne la résolution de plusieurs problèmes importants.

1. Si l'on désigne par σ l'arc d'une ligne plane L et par R (fonction de σ) le rayon vecteur, joignant l'origine des axes coordonnés à un point quelconque P de L, les équations:

$$x = \mathrm{R}.\cos\int\frac{\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}}\,d\sigma,\qquad y = \mathrm{R}.\sin\int\frac{\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}}\,d\sigma$$

donnent les coordonnées de P exprimées par l'arc σ.

En désignant donc par ρ le rayon de courbure de L, on aura:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2}} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}}{1-\mathrm{R}'^2-\mathrm{RR}''} \tag{1}$$

Soient

$$f(\mathrm{R},\sigma) = o \tag{2}$$

une relation analytique entre R et σ et

$$\text{(3)} \qquad R = \varphi(\sigma)$$

l'égalité que l'on dérive de l'équation (2) en la résolvant par rapport à R.

Puisque l'élimination de R entre les équations (1), (3) donne lieu à une relation entre ρ et σ (ce qui suffit pour la détermination de la courbe), on a le théorème:

Une ligne plane est connue complètement lorsqu'on a l'expression du rayon vecteur en fonction de l'arc ou, plus généralement, lorsqu'on a une relation finie entre ce rayon vecteur et l'arc.

La forme de l'équation (2) d'une ligne déterminée est dépendante de la position du pôle d'où l'on compte les rayons vecteurs; conséquemment une ligne plane peut être représentée par une infinité d'équations entre les variables R, σ.

Il peut arriver au contraire, qu'une équation $R = \varphi(\sigma)$ ne représente aucune ligne. En effet, le cosinus de l'inclinaison du rayon vecteur sur la courbe est exprimé par $\frac{dR}{d\sigma}$; si donc la fonction $\varphi(\sigma)$ est telle que l'on ait:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} > 1,$$

l'équation que l'on vient d'écrire ne peut représenter aucune ligne.

Si par exemple

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{2m}\left(m^2 e^{\frac{\sigma}{n}} - n^2 e^{-\frac{\sigma}{n}}\right),$$

m et n étant des constantes, on a:

$$1 - \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = -\frac{\left(m^2 e^{\frac{\sigma}{n}} - n^2 e^{-\frac{\sigma}{n}}\right)^2}{4m^2n^2} < o$$

et consequemment:

$$\frac{d\varphi}{ds} > 1$$

Il n'y a donc aucune ligne plane représentée par l'équation:

$$R = \frac{1}{2m}\left(m^2 e^{\frac{\sigma}{n}} - n^2 e^{-\frac{\sigma}{n}}\right).$$

Le procédé le plus naturel pour déterminer l'équation d'une ligne en coordonnées R, σ est le suivant. Soit

$$R = f(\theta) \tag{4}$$

l'équation de la ligne en coordonnées polaires; on a

$$\sigma + \text{const.}^e = \int \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\,.\,d\theta$$

Si l'on suppose que la quadrature ait été effectuée, on aura:

$$\sigma + \text{const.}^e = \varphi(\theta), \tag{5}$$

$\varphi(\theta)$ étant une certaine fonction de θ; l'élimination de θ entre les équations (4), (5) donne la relation cherchée entre les variables R, σ.

En appliquant ce procédé à la spirale d'Archimède $R = a\theta$, ou bien à la spirale hyperbolique $R = \frac{a}{\theta}$, on trouve respectivement les équations:

$$R\sqrt{R^2 + a^2} + a^2 . \log\left(R + \sqrt{R^2 + a^2}\right) = 2a\sigma + \text{const.}^e$$

$$a \log\left(\frac{a + \sqrt{R^2 + a^2}}{R}\right) - \sqrt{R^2 + a^2} = \sigma + \text{const.}^e$$

Lorsque le procédé que l'on vient d'exposer n'est pas applicable, on a recours à d'autres méthodes plus convenables. C'est ce que j'ai fait dans mes mémoires *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (1) et *Sur les lignes sphériques* (2). Dans le premier mémoire j'ai établi l'équation des coniques et dans le deuxième j'ai démontréque l'équation:

$$R = \sqrt{a\sigma^2 + 2b\sigma + c}$$

représente une spirale logarithmique si $b^2 - ac = o$; une développante de cercle si $a = o$; une droite si $a = 1$, une épicicloïde si $a < o$; une hypocicloïde si $a > 1$.

On peut quelquefois résoudre la question en appliquant la transformation par rayons vecteurs réciproques. Soient en effet R et R_1 les rayons vecteurs correspondants des lignes planes L, L_1 inverses par rapport à un cercle de rayon k et σ, σ_1 les arcs de ces lignes.

Si pour la ligne L on a:

$$R = f(\sigma),$$

(1) Ce Mémoire va paraître dans le Journal de M. Teixeira.

(2) Journal de M. Teixeira, 1889.

les équations:

$$R_1 = \frac{k^2}{R}, \quad \sigma_1 = k^2\int\frac{d\sigma}{R^2} + \text{const.}$$

donnent:

$$R_1 = \frac{k^2}{f(\sigma)}, \quad \sigma_1 = \varphi(\sigma),$$

$\varphi(\sigma)$ étant une fonction de σ.

L'élimination de σ entre ces équations conduit à la relation cherchée

$$\theta(R_1, \sigma_1) = o$$

entre R_1 et σ_1.

Soit par exemple une développante de cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}a$; nous aurons

$$R = -\sqrt{a\sigma}, \quad \sigma_1 = me^{\frac{a\sigma_1}{k}},$$

m étant une constante arbitraire.

L'équation de la courbe inverse de la développante considérée (lorsque le pôle d'inversion est le centre de la inconférence développée) est donc:

$$R_1 = A \,.\, e^{-\frac{a}{2k^2}\sigma_1},$$

A étant une constante.

2. Soit L la ligne méridienne d'une surface de révolution S; C la courbe d'intersection de S avec un cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe et dont la section droite est la courbe Γ, Λ la transformée de C quand on déroule le cylindre sur un plan.

Si (X, Y, Z), (x, y), (ξ, ζ) sont les coordonnées d'un point quelconque de C et des points correspondants de L et de Λ (que nous supposons placées sur le plan coordonné $Y = o$) on aura:

$$(6) \quad \begin{cases} x = R \\ z = Z \end{cases} \qquad (7) \quad \begin{cases} \xi = \sigma \\ \zeta = Z \end{cases}$$

R et σ étant le rayon vecteur et l'arc de Γ.

En supposant donc que

$$(8) \qquad R = \Psi(\sigma)$$

soit l'équation de Γ, les équations (6), (7) nous donnent:

$$(9) \qquad x = \Psi(\xi), \qquad z = \zeta$$

La construction à effectuer sur la ligne L pour obtenir Λ est dépendante seulement de la nature du cylindre; celui-ci fixé, la construction est la même, quelle que soit la surface de révolution. Et puisque les équations (9), par l'application des (6) e (7), conduisent à l'equatión (8), on conclut que lorsque la construction à l'aide de laquelle on déduit Λ de L est donnée, le cylindre coupant la surface est toujours le même, quelle que soit la surface de révolution.

Exemples. 1°) Si Γ est une spirale logaritmique ayant le pôle sur l'axe de rotation, on a:

$$R = \Psi(\sigma) = a\sigma$$

et conséquement:

$$x = a\xi \quad , \quad z = \zeta$$

Le théorème de ***M. Ch. Robert*** et son réciproque sont aussitôt démontrés.

2°) Γ soit une circonférence rencontrant l'axe de la surface.

On aura:

$$R = \psi(\sigma) = a \,.\, sin\left(\frac{\sigma}{a}\right),$$

a étant le rayon et conséquemment:

$$(10) \qquad x = a \,.\, sin\left(\frac{\xi}{a}\right), \qquad z = \zeta$$

Pour que la ligne Λ puisse être dérivée de l'autre L á l'aide la construction indiquée par l'équation (10), il est donc nécessaire et suffisant que la section droite du cylindre soit un cercle rencontrant l'axe de la surface. etc., etc.

3. Soient:

$$(11) \quad z = f(R) \quad ; \qquad (12) \quad \zeta = \varphi(\sigma) \quad ; \qquad (13) \quad R = \Psi(\sigma)$$

les équations des lignes planes L, Λ, Γ:

Elles ont une telle liaison mutuelle, que la connaissance de deux d'entre elles entraîne aussi la connaissance de la troisième.

a) Si l'on donne la ligne méridienne L et la transformée plane Λ, l'elimination de z et ζ (égales entre elles, à cause des égalités (6), (7)) donne pour équation de la section droite Γ

$$f(R) = \varphi(\sigma)$$

EXEMPLES. 1°) Si S est un cône de rotation et Λ une droite, on a:

$$z = f(\mathrm{R}) = a\mathrm{R} \quad ; \quad \zeta = \varphi(\sigma) = m\sigma + n \,,$$

a, m, n étant des constantes. La section droite du cylindre est donc la spirale logarithmique

$$\mathrm{R} = \frac{m}{a}\sigma + n \,;$$

c'est un résultat connu.

2°) Si S est un cône de rotation et Λ une circonférence, on a:

$$\mathrm{Z} = f(\mathrm{R}) = a\mathrm{R} \quad , \quad \zeta = \varphi(\sigma) = m + \sqrt{p^2 - (\sigma - n)^2}$$

La section droite du cylindre a donc pour équation:

$$\mathrm{R} = \frac{m}{a} + \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{a^2} + \frac{2n}{a^2}\sigma - \frac{1}{a^2}\sigma^2}$$

Cette courbe, pour $m = o$, se réduit à une épicicloïde (§. 1).

b) Si l'on donne la ligne méridiene L et la section droite Γ du cylindre, l'élimination de R entre les équations (11), (13) et le remarque que $z = \zeta$, donnent pour équation de la transformée plane Λ:

$$\zeta = f[\Psi(\sigma)]$$

EXEMPLE. Si la surface S es un paraboloïde de révolution, et la section droite Γ une développante de cercle, on a:

$$\mathrm{Z} = f(\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{R}^2}{a} \qquad \mathrm{R} = \Psi(\sigma) = \sqrt{b\sigma + c}$$

L'équation de la transformée plane Λ est donc:

$$\zeta = f[\Psi(\sigma)] = \frac{b\sigma + c}{a} \,;$$

cette ligne est donc une droite.

On a ainsi le théorème *L'intersection d'un paraboloïde de révolution avec un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à l'axe et la section droite est une développante d'un cercle ayant le centre sur l'axe, est une hélice cylindrique.*

c) Si l'on donne la section droite Γ du cylindre et la transformée plane Λ, l'équation de la ligne méridienne L est le résultat de l'élimination de σ entre les équations (12), (13).

Exemple. La section droite du cylindre soit une développante de cercle et la transformée plane une circonference. Puisqu'on a:

$$R = \sqrt{b\sigma + c}\,, \qquad (\zeta - m)^2 + (\sigma - n)^2 = p\,,$$

b, c, m, n, p étant des constantes, la ligne méridienne est la courbe de quatrième ordre représentée par l'équation:

$$(z - m)^2 + \left(\frac{R^2 + c}{a} - n\right)^2 = p^2.$$

4. La transformée plane Λ soit dérivée de la ligne méridienne L en variant les coordonnées parallèles à l'axe de rotation dans un rapport constant. Entre les coordonnées R, z d'un point quelconque de L et celles σ, ζ du point correspondant de Λ on a les relations:

$$\zeta = kz\,, \qquad \sigma = R\,,$$

k étant une constante.

Si donc la ligne méridienne est représentée par l'equation (11), la transformée plane Λ est représentée par l'autre:

$$\zeta = k f(\sigma)$$

L'équation de la section droite du cylindre coupant la surface est donc (§. 3):

$$f(R) = k f(\sigma) \tag{14}$$

Cette équation nous apprend que, lorsque la construcction indiquée dans le théorème de *M. Robert* s'effectúe sur les coordonnées parallèles à l'axe de rotation, le cylindre coupant dépend de la nature de la surface de révolution donnée.

La section droite du cylindre soit une courbe donnée représentée par l'équation (13); l'élimination de R entre les égalités (13), (14) donne:

$$f[\Psi(\sigma)] = k f(\sigma) \tag{15}$$

Si donc le cylindre est donné *à priori*, la surface de rotation n'est pas arbitraire, la fonction f étant assujettie à la condition (15).

Exemples. 1°) Si la surface donnée est un paraboloïde de rotation ou une sphère, on a respectivement.

$$f(R) = \frac{R^2}{a}, \quad f(R) = \sqrt{a^2 - R^2}$$

En appliquant donc l'équation (14), on trouve que la section droite du cylindre est représentée respectivement par les équations:

$$R = \sqrt{k \cdot \sigma}\,, \qquad R = \sqrt{a^2(1 - k^2) + k^2\sigma^2}$$

Le première courbe est une spirale logarithmique et la deuxième, lorsque $k > 1$, se réduit à une hypocicloïde (§. 1).

2°) La section droite du cylindre soit la spirale logarithmique

$$R = \Psi(\sigma) = a^{\sigma}$$

La condition (15) devient

$$f(a^{\sigma}) = kf(\sigma),$$

d'où

$$f(\sigma) = \frac{\sigma^m}{b^{m-1}}, \qquad k = a^m,$$

b et m étant des constantes.

On obtient donc une famille complète de surfaces de révolution, dont les lignes méridiennes sont représentées par l'équation:

$$z = \frac{R^m}{b^{m-1}}$$

Pour $m = 2$ on a le paraboloïde; pour $m = -1$ on a la surface engendrée par une hyperbole équilatère tournant autour d'une de ses asymptotes, etc.

3°) La section droite du cylindre soit représentée par l'équation

$$R = \Psi(\sigma) = \sqrt{m + n\sigma^2},$$

n étant un nombre positif. Puisque la condition (15) se réduit à l'autre:

$$f\left(\sqrt{m + n\sigma^2}\right) = kf(\sigma),$$

il doit être:

$$f(\sigma) = \sqrt{p + \frac{p(n-1)}{m}\sigma^2}, \qquad k = \sqrt{n},$$

p étant une constante arbitraire. Conséquemment la ligne méridienne est la courbe représentée par l'équation:

$$Z = f(R) = \sqrt{p + \frac{p(n-1)}{m} R^2},$$

c'est-à-dire, par l'autre:

$$\frac{Z^2}{p} + \frac{R^2}{\left(\frac{m}{1-n}\right)} = 1$$

Les surfaces de révolution, dans ce cas, sont celles de deuxième ordre, le paraboloïde excepté.

(Se concluirá).

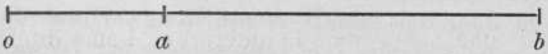
INTEGRALES DEFINIDAS

POR D. HORACIO BENTABOL

profesor de la Escuela preparatoria de Ingenieros de Madrid

DEFINICIONES

Supongamos una variable independiente x susceptible de *crecer* de de un modo contínuo entre dos de sus valores a y b, siendo $a < b$



y supongamos que á partir del valor $x = a$ llega la variable al valor $x = b$ por medio de una serie de incrementos finitos ó diferencias Δx *positivas* y sean $a, x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ los valores que sucesivamente va tomando x.

En tal caso se verificará, cualquiera que sea el número n de los incrementos y su magnitud,

$$\Delta a + \ldots . \Delta x_n = \sum_{x=a}^{x=b} \Delta x = b - a$$

Como la anterior igualdad se verifica, cualquiera que sea la magnitud de las diferencias, con tal de que sean positivas, supongamos que estas dejan de ser finitas para pasar á ser *infinitamente decrecientes* ó diferenciales (dx), al mismo tiempo que n crece, pasando á ser *infinitamente creciente* (Cn) [1], y admitamos además (aunque únicamente por comodidad) que la división del intervalo $b - a$ se hace en partes iguales dx. En esta hipótesis se deducirá, puesto que

$$Cn \, . \, dx = b - a = const.$$

1.° Cn será del mismo orden que dx.

2.° Si los incrementos considerados, cuya suma es constantemente igual á $a = b$, se convierten en diferenciales, $\sum_{x-a}^{x=b} \Delta x$ se transforma en el límite de una suma de sumandos infinitamente decrecien-

(1) Véase la *Introducción al estudio del Cálculo infinitesimal* del autor.

tes en número infinitamente creciente en la cual el número de sumandos y la magnitud de cada uno de ellos son variables infinitesimales del mismo orden, cuyas circunstancias pueden expresarse simbólicamente escribiendo dicha suma bajo cualquiera de las dos formas siguientes:

$$\lim_{\Delta x = o} \sum_{\rho=a}^{\rho=b} \Delta x = b - a \quad \text{ó} \quad \int_a^b dx = b - a$$

de cuyas dos notaciones, la segunda es más usada por ser la más sencilla.

Al límite de una suma como la anterior se llama integral definida de dx entre a y b, es decir, que:

Llamamos integral definida, al límite de una suma de sumandos infinitamente decrecientes en número infinitamente creciente, cuando los sumandos y su número son variables infinitesimales del mismo orden; contándose esta suma entre dos valores a *y* b *de la variable* (cuyas diferenciales sumamos), *y que se llaman respectivamente* LÍMITE INFERIOR y LÍMITE SUPERIOR *de la integral.*

CONTINUIDAD, CON RESPECTO A LA VARIABLE INDEPENDIENTE, DE LA FUNCIÓN PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN FINITA, CONTÍNUA Ó DISCONTÍNUA CON RESPECTO A LA MISMA VARIABLE.

Consideremos ahora una función cualquiera de x, $f(x)$, á cuya función primitiva *desconocida* llamaremos $y = \mathrm{F}(x)$, ó lo que es lo mismo, tal que su derivada sea precisamente $f(x)$.

Por el teorema de Bonnet sabemos que, siendo $y = \mathrm{F}(x)$,

$$\Delta y = \mathrm{F}(x + \Delta x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}'(x + \theta\Delta x) . \Delta x = f(\rho + \theta\Delta\rho) . \Delta x$$

ó simplemente

$$\Delta y = f(x) . \Delta x,$$

puesto que x y Δx son indeterminadas.

Supongamos ahora que $f(x)$ sea *finita* para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $(b - a)$. Cuando supongamos que la diferencia de x pasa á ser infinitamente decreciente, lo que expresamos en la fórmula sustituyendo Δx por dx (1), el producto $f(x) . dx = dy$

(1) Véanse las consideraciones que preceden al Programa de la asignatura de *Cálculo infinitesimal* del autor.

será infinitamente decreciente *del mismo orden que dx*; es decir, que $y = F(x)$ *será función continua* para todos los valores de x comprendidos entre a y b, conforme al concepto de continuidad de variables.

Si además $f(x)$ se conserva *positiva* en el intervalo $(b - a)$, la $F(x)$ será constantemente creciente en el mismo intervalo, y si $f(x)$ es *negativa* $F(x)$ será decreciente en dicho intervalo.

Condiciones de existencia del límite de $\int_a^b f(x) \, . \, dx$

Siempre que $y = F(x)$ sea una variable *creciente* de un modo continuo entre $y = F(a)$ é $y = F(b)$, podrá decirse de Δy lo mismo que en un principio queda dicho de Δx, y por lo tanto, siendo $A = F(a)$ y $B = F(b)$, los valores que la función $F(x)$, primitiva de $f(x)$, toma para $x = a$ y $x = b$ podrá escribirse como anteriormente

$$\Delta A + \Delta y_1 + \ldots\ldots + \Delta y_n \sum_{x=a}^{x=b} \Delta y = B - A$$

Supongamos que x crece á partir de $x = a$ pasando por los valores a; x_1; x_2; .... x_n á los cuales corresponden, para y, los valores A; y_1; y_2; .... y_n.

A cada uno de los sumandos de

$$\Delta a + \Delta x_1 + \ldots . \Delta x_n$$

corresponde igualmente otro determinado en

$$\Delta A + \Delta y_1 + \ldots . \Delta y_n \qquad \Delta y = f\,(x_n + 0 . \Delta x_n) \, . \, \Delta x_n$$

enlazado con los primeros por la fórmula; luego, comparando las dos sumas y suponiendo que las diferencias pasan á ser diferenciales, observamos que el número de sumandos es idéntico en ambas y su orden infinitesimal también, á causa de la continuidad de y como queda demostrado.

Si $f(x)$ conservase el signo negativo en todo el intérvalo $b - a$, $y = F(x)$ sería decreciente en el mismo, ó lo que es lo mismo, la última suma tendría todos sus términos negativos lo cual equivaldría á darles el signo + y afectar á la suma entera del signo — que corresponde á todos ellos.

Por esta razón siempre que $f(x)$ *conserve un mismo signo* (+ ó —)

en el intervalo $(b - a)$, se puede considerar á $F(x)$ ó y, como creciente para los efectos de estos razonamientos, sin más que dar á la suma el signo que le corresponda.

Por consiguiente, siempre que la primera suma tenga un límite finito y determinado, la segunda suma también tendrá un límite finito y determinado; puesto que ambas se compondrán de sumandos infinitamente decrecientes en número infinitamente creciente respectivamente del mismo orden infinitesimal, lo cual se verificará siempre que x sea continua y creciente, y que $f(x)$ sea *finita y conserve el mismo signo en el intervalo* $(b - a)$, pudiéndose escribir, conforme á las notaciones convenidas,

$$\lim_{\Delta y = o} \sum_{x=b}^{x=a} \Delta y = B - A \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x) \,.\, dx = F(b) - F(a)$$

en cuyas sumas $f(x)$ representa precisamente uno de los valores que corresponden á los de x comprendidos en la dx de cada uno de los sumandos.

El anterior razonamiento demuestra:

1.º Que cuando una función $f(x)$ es *finita y conserva el mismo signo en un intervalo* $(b - a)$, la suma de productos $f(x) \,.\, dx$ tiene un límite finito y determinado, lo que se expresa diciendo que dicha función *es integrable entre* a y b.

2.º Que el valor del límite de esta suma es igual á la diferencia entre el valor que la función primitiva $F(x)$ de la propuesta $f(x)$ tenía para el límite inferior de la variable independiente.

Resulta igualmente.

3.º Que no es indispensable que $f(x)$ sea continua en el intervalo $(b\ a)$, como erróneamente se dice en tantos autores.

4.º Que el valor de la integral definida no depende inmediatamente de los valores que la función $f(x)$ toma entre los límites de x y sí solamente de dichos límites, que son los que han de sustituirse en $F(x)$ y

5.º Que tampoco depende de la constante que pudiera atribuirse á $F(x)$, porque afectaría igualmente á los dos términos de la diferencia $F(b) - F(a)$ y desaparecería cualquiera que fuese su valor.

Nota.—La y que figura en las fórmulas anteriores no es, como claramente se ha dicho, el valor de la $f(x)$, colocada bajo el signo integral, sino su función primitiva.

Al desarrollar la $F(x)$ puede suceder que sea algo complicada ó larga de escribir, y en este caso resulta ventajoso escribir el segundo miembro de la integral definida del modo siguiente

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = \Big[\,\mathrm{F}(x)\,\Big]_a^b$$

porque de este modo en vez de escribir la $\mathrm{F}(x)$, desarrollada dos veces, una para el valor $x = a$ y la otra para $x = b$, solamente se escribe una vez.

Propiedades de la integral definida

Siendo la función primitiva de $f(x)$ continua con respecto á x para todos los valores de esta variable para los cuales $f(x)$ se conserva finita, y verificándose que

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,.\,dx = \mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1),$$

resulta con evidencia que la integral definida es función continua de los límites de la misma.

También es evidente que, si M es un factor constante que afecta á la función colocada bajo el signo integral, y teniendo en cuenta la definición de la integral definida, se tendrá

$$\int_a^b \mathrm{M}\,f(x)\,.\,dx = \mathrm{M}\int_a^b f(x)\,.\,d(x).$$

Cuando $\mathrm{F}(x)$ es múltiple, podrían hallarse muy distintos valores para la integral, según los que tomamos para $\mathrm{F}(a)$ y $\mathrm{F}(b)$. Para evitar confusiones, se entiende que tomaremos para valores de $\mathrm{F}(x)$ los primeros que se encuentran, para los valores $x = a$ y $x = b$, cuando hacemos crecer á x á partir del valor cero.

Por ejemplo, en la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,.\,sen\,(1) - arc\,.\,sen\,(0)$$

se tomarán los arcos 0 y $\frac{\pi}{2}$, que son los primeros que corresponden á los de $sen = 0$ y $sen = 1$.

Dependiendo el cálculo de una integral definida de la terminación de la función primitiva de la propuesta, es evidente que existe entre ambas integrales una relación íntima del mismo género (aunque inversa) que la que tienen entre sí la diferencia y la derivada de una función; porque al tratar de determinar la función *primitiva* no nos proponemos más que buscar una función de *forma* determinada y tal, que derivada reproduzca la propuesta, y al calcular una *integral definida*, tratamos de determinar el *valor de la diferencia* entre los que toma la función primitiva para los límites de la integral, que es una cantidad variable dependiente de la forma de la función bajo el signo $\int$ y de los límites de la integral.

Inversión de los límites de las integrales definidas.

Siendo como anteriormente $P\,f(x) = F(x)$, se tendrá por definición y conforme á lo que la notación significa

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,.\,dx &= F(b) - F(a)\\ \int_b^a f(x)\,.\,dx &= F(a) - F(b)\end{aligned}\right\}\ \text{de donde resulta}\ \int_a^b f(x)\,.\,d(x) = -\int_b^a f(x)\,.\,dx;$$

luego el cambio de los límites de una integral definida equivale al cambio de signo de la misma.

Descomposición de una integral definida en suma de otras varias

Siendo una integral definida el límite de una suma de productos de la forma $f(x)\,.\,dx$ para los valores de x comprendidos en el intervalo $(b - a)$, claro es que podrá dividirse dicha suma en otras parciales cuyos límites sean dos á dos comunes y estén comprendidos entre los de la propuesta y escribir, siendo $a < b < c < d\ldots\ldots$

$$\int_a^d f(x)\,.\,dx = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d f(x)\,.\,dx + \ldots\ldots$$

Del mismo modo se podrá escribir

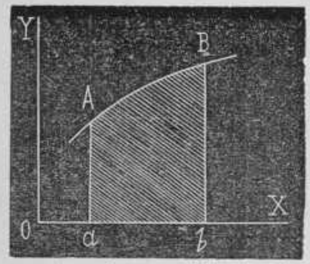
$$\int_a^d f(x)\,.\,dx = \int_a^c - \int_c^b + \int_b^d f(x)\,.\,dx + \ldots.$$

en cuyas integrales corresponde el signo $+$ á las que tienen los límites en su orden natural de magnitud y el signo $-$ á aquéllas cuyos límites están escritos en orden inverso porque

$$\int_b^d = \int_b^c + \int_c^d$$

cuya integral sustituída en la anterior la reduce á la precedente.

Representación geométrica de una integral difinida.



Siendo AG la curva correspondiente á la función $f(x)$, todos los productos $f(x) \, . \, \Delta x$ serán representables geométricamerte por áreas de rectángulos que tendrán por base Δx y por altura una ordenada de la curva variable con el valor de x, y comprendida entre $f(a)$ y $f(b)$.

En las aplicaciones geométricas se demostrará que el límite de la suma de estos rectángulos es el área de la porción de plano comprendido entre el eje, las ordenadas y la curva y por esta razón se dice que, geométricamente, la integral definida se puede representar por el área de una curva plana.

Esta observacion justifica la denominación de *cuadraturas* dada á la resolución de las integrales definidas, viniendo á ser sinónimas las espresiones de resolver una integral definida ó efectuar una cuadratura.

No es esta, sin embargo, la única representación geométrica que las integrales definidas pueden recibir, puesto que también pueden representarse por la longitud de un arco de curva ó por el volumen comprendido entre una superficie y dos planos paralelos. Pero estas representaciones son menos espresivas y útiles que la relativa al área de una curva plana, y por lo tanto son menos usadas.

Caso en que la función bajo el signo $\int$ cambia de signo para valores de x comprendidos entre los límites.

La demostración de que $f(x) \, . \, dx = dy$ es integrable entre los límites a y d de x supone que y es constantemente *creciente* desde $y = \mathrm{F}(a)$

á $y = \mathrm{F}(b)$, lo que exige que dy (y por lo tanto $f(x)$) sea positiva para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $(d - a)$.

Si $f(x)$ cambiase de signo en el intervalo considerado, dy cambiaría en consecuencia de signo, y subdividiendo la suma representada por la integral total entre a y d, en tantas como fuese necesario para que en cada una de ellas $\mathrm{F}(x)$ fuese constantemente creciente ó decreciente, es decir que dy (ó lo que es lo mismo $f(x)$) no cambie de signo, la integral total se desdoblaría en varias, en las cuales el signo de $f(x)$ y por lo tanto de dy fuese constante, y calculando separadamente cada una de estas integrales, la integral será la suma algebráica de las integrales parciales.

La subdivisión de la integral total del modo dicho requiere la determinación previa de los valores de x comprendidos entre a y d para los cuales $f(x)$ cambia de signo; es decir el conocimiento de las raíces de $f(x) = 0$ comprendidas entre a y d.

Siendo estas, por ejemplo b y c, se tendrá dividida la suma total en tres partes de las cuales la primera, entre a y b y la última entre c y d, tendrán los sumandos positivos, y la intermedia, entre b y c, los tendrá negativos, luego deberá escribirse

$$\int_a^d f(x).\,dx = \int_a^b - \int_b^c + \int_c^d f(x).\,dx$$

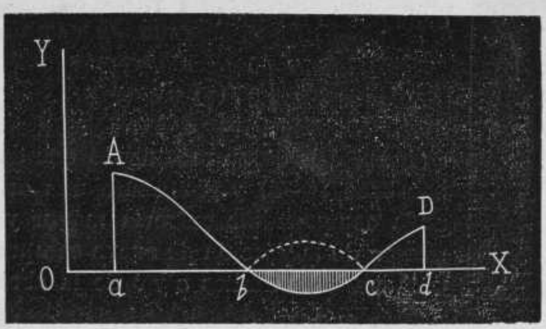
para la fórmula que ha de dar el valor de la integral definida en este caso.

Si no se hubiese tomado esta precaución, y se hubiese calculado la integral como si todos los sumandos, cuyo límite de suma representa fuesen positivos, se habría cometido el error que aparece como valor de la siguiente diferencia

$$\left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d f(x).\,dx\right] - \left[\int_a^b - \int_b^c + \int_c^d f(x).dx\right]$$
$$= 2\int_b^c f(x)\,dx$$

La representación geométrica da una idea perfectamente clara del valor de la integral en ambos casos y de la necesidad de precaverse contra la causa de error mencionada.

Una función positiva para $x=a$ y $x=d$ y que cambia de signo para $x=b$ y $x=c$ puede ser representada por la ordenada de la curva del margen. Siendo la ordenada negativa entre b y c, la representación geométrica de la integral constará de tres partes, de las cuales la intermedia será un área negativa colocada por bajo del eje de las abscisas.



Si no se subdividiese la integral en dichas tres partes, es decir, si las tres se considerasen como positivas, la integral que se calcularía sería el área colocada por encima del eje que está limitada entre b y c por la línea de puntos, con lo cual se cometería un error igual al doble de la parte rayada.

Teorema de la media

El valor de una integral definida $\int_a^b f(x).dx$ *es igual al producto de la diferencia* $(b-a)$ *de los valores de la variable correspondientes á los límites, multiplicada por un cierto valor de la función* f(x), *correspondiente á otro de* x *comprendido entre los límites.*

En efecto, siendo la integral definida el límite de una suma de productos de la forma $f(x).dx$, su valor será igual (1) al producto del límite de la suma de dx ó sea $(b-a)$, multiplicada por un valor de $f(x)$ comprendido entre el mayor M y el menor m de los que dicha función toma para las de x correspondientes al intervalo $(b-a)$.

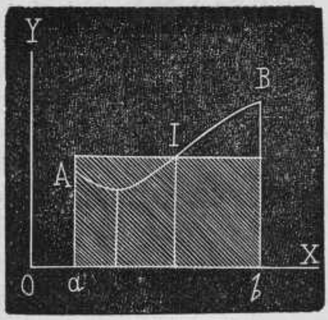
Es decir, que se tendrá

$$\int_a^b f(x).dx=(b-a).f(\zeta) \text{ siendo } f(\zeta)\begin{matrix}>m\\<\text{M}\end{matrix}$$

como se quiera demostrar.

(1) Véase la pág. 38 de la *Introducción al estudio del cálculo infinitesimal* del autor.

El teorema anterior tiene una representación geométrica que consiste en observar que el área de la curva dada por la integral



$$\int_a^b f(x).dx$$

es igual á la de un rectángulo que tiene por base $(b-a)$ y por altura una ordenada comprendida entre la mayor y la menor de la porción de curva comprendida entre los límites a y b de la abcisa.

INTEGRACIÓN APROXIMADA DE $\int_a^b f(x).dx$

Cuando no se conoce la función primitiva de una función $f(x)$, pero esta es tal que se encuentra comprendida entre los valores de otras dos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ para todos los valores de la variable correspondientes al intervalo $(b-a)$, y se pueden integrar $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, es evidente dada la definición de la integral definida, y puesto que

$$\Big[\varphi(x) < f(x) < \psi(x)\Big]_a^b,$$

que $\int_a^b f(x).dx$ estará comprendida entre $\int_a^b \varphi(x).dx$ y $\psi(x).dx$.

Por ejemplo, tratemos de calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Teniendo presente que para valores de x menores que 1 se verifica que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ está comprendida entre 1 y $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$, se tendrá

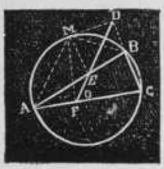
$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

y puesto que la primera y tercera integral valen respectivamente $\dfrac{1}{2}$ y arc. sen $\dfrac{1}{2} = 0,\ 5236\ldots\ldots$, la propuesta estará comprendida entre 0,5 y 0,5236.....

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

PROPUESTO POR JACOBO STEINER.

El egregio geómetra Steiner, tan notable por la pasmosa serie de sus descubrimientos y problemas ingeniosos, propuso uno de que voy á ocuparme y que es susceptible de una sencilla resolución geométrico-sintética. Yo no sé que se haya publicado alguna vez la solución de este problema, que se halla en la colección de las obras compuestas de Jacobo Steiner, publicadas bajo los auspicios de la Real Academia de Ciencias de Berlin, en el año 1881. Se refiere á un lindo teorema correspondiente á la circunferencia y atribuido universalmente á Roberto Simson, profesor de matemáticas en la Universidad de Glasgow y que falleció en dicha ciudad el año 1768.

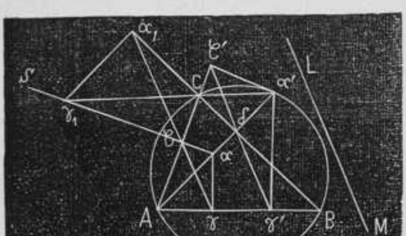


Este teorema es: *Si desde un punto ω situado sobre una circunferencia de círculo, se trazan perpendiculares á los tres lados de un triángulo inscripto, los tres pies de dichas perpendiculares están en línea recta.*

Suponemos conocido este teorema y su demostración.

El problema de Steiner es como sigue: *Dados una circunferencia y un triángulo inscripto en la misma, hallar sobre la circunferencia un punto tal, que los tres pies de las perpendiculares trazadas á los tres lados del triángulo, esten sobre una recta paralela á otra recta dada de antemano.*

He aquí ahora la solución. Sobre uno de los lados, AC, por ejemplo, tomemos un punto β y levantemos en β una perpendicular á AC. Tracemos por β una recta paralela á la dirección dada LM y esta recta cortará á la AB en un punto γ. Levantemos en γ una perpendicular á AB; las dos perpendiculares se cortarán en α. Unamos el vértice A del triángulo con el punto α, y la recta Aα cortará á la circunferencia en un α', que es precisamente el punto buscado. En efecto, trazando desde α' las perpendiculares $\alpha'\beta'$ y $\alpha'\gamma'$ á los lados AC y AB, los triángulos $\alpha\beta\gamma$ y $\alpha'\beta'\gamma'$, que tienen dos pares de lados paralelos y además sus vértices alineados dos á dos sobre tres rectas concurrentes en un punto, deberán también te-



ner paralelos sus otros dos lados. Esto indica que $\beta' \gamma'$ debe ser paralelo á $\beta \gamma$, y en consecuencia á L M.

Hubiésemos podido utilizar en vez del punto γ, intersección de la paralela á L M trazada por β con el lado AB, el punto α_1 en que dicha paralela corta á BC. En tal caso hubiésemos levantado en α_1 una perpendicular á B C, y hubiésemos hallado su intersección γ_1 con la perpendicular $\beta\alpha$, y uniendo el punto γ_1 con el c hallaríamos la intersección de $\gamma_1 c$ con la circunferencia.

Pero es fácil probar que la solución sería la misma. En efecto, supongamos ya resuelto el problema por el primer modo, los triángulos $\alpha_1 \gamma_1 \beta$ y $\delta \alpha' \beta'$ que tienen sus lados paralelos dos á dos, tendrán sus vértices alineados dos á dos sobre tres rectas concurrentes en un punto. Así es, que la recta γ_1 C debe pasar por el punto α' antes hallado.

Es sencillo además el convencerse de que solo hay una solución al problema, para cada dirección dada, de lo contrario la recta Aα, tendría con la circunferencia un tercer punto α'' común, lo que es absurdo.

De las propiedades de los triángulos homotéticos se deduce fácilmente que la solución obtenida es idéntica, aunque operemos sobre los lados del ángulo en A, en B ó en C. Véanse simplemente en la figura los dos triángulos, $\gamma' \delta \alpha'$ hallado según las instrucciones dadas y el $\gamma'' \delta'' \alpha''$ de lados paralelos. B, α'' y α' son tres puntos que han de estar en línea recta. El triángulo $\gamma'' \delta'' \alpha''$ conduciría pues á igual solución que el $\alpha \beta \gamma$, primeramente considerado.

Prof. Dr. Ventura Reyes Prósper.

Madrid 10 de Abril de 1892.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par M. G. de Longchamps

(BIBLIOGRAFÍA)

Los desarrollos que durante el siglo actual han alcanzado todas las teorías matemáticas, por efecto de esa labor continuada que prosiguen las diversas instituciones científicas, las numerosas publicaciones periódicas y los esfuerzos individuales de cuantos se han interesado por llevarlas á un grado superior de perfeccionamiento, han influído en la modificación de los libros destinados á la preparación de la juventud para los estudios superiores.

Muchas teorías habían permanecido durante algunos años estacionadas en las más altas esferas de las especulaciones científicas sin poder ser trasplantadas por entonces á los dominios de lo elemental, y formaban como cuerpo aparte de todo lo que se consideraba dentro de la enseñanza clásica. En geometría proyectiva, las teorías de la homografía y correlación, en Algebra la constitución de la teoría de las formas debida á los matemáticos ingleses, en geometría analítica las coordenadas homogéneas y las tangenciales y además de los pro-progresos, que han ido realizando la teoría de los números y de las funciones, la geometría cinemática y la geometría infinitesimal han contribuído á dar nuevas y amplísimas proporciones al organismo de la matemática, exigiendo tan considerable progreso en el orden científico, un progreso correlativo en el orden pedagógico.

Ha sido preciso alterar especialmente los libros destinados á la educación científica, para armonizar las aptitudes del alumno con el número y calidad de teorías de que se le debiera poner en posesión, ligar con íntimo enlace teorías recientemente creadas, con las que desde épocas más ó menos remotas habían sido el fundamento de todo el edificio, y especialmente, ha sido necesario evitar muchas repeticiones innecesarias que todavía retardan y entorpecen la marcha de las inteligencias de los alumnos hacia la posesión de la verdad. Y ciertamente que entre las obras destinadas á la enseñanza de la geometría analítica en las Universidades, Liceos, etc., que se prestan á evocar reflexiones de carácter pedagógico, por la feliz disposición de las materias, por la sencillez y elegancia en el modo de exponer, salvando dificultades, llamando la atención hacia las ideas fundamentales, la obra de M. G. de Longchamps *Géométrie analytique á deux et á trois dimensions,* merece ocupar un lugar preeminente, por el arte admirable que su autor posee para hacer descender al dominio de lo elemental, muchas teorías generalmente destinadas á figurar en las obras magistrales ó de consulta.

La obra de M. de Longchamps no se limita á ser un tratado de las secciones cónicas y de las superficies inmediatamente derivadas de éstas ó sus representantes en el espacio de tres dimensiones, pues á pesar de no ser su extensión excesiva, y sí proporcionada á lo que los alumnos pueden aprender en un curso, prepara las inteligencias de éstos á la posesión de conceptos de orden más elevado.

Al tratar de las curvas no se limita á las de segundo orden, pues desde el principio familiariza al lector con otras de tercero ó cuarto orden: la cisoide y la estrofoide, rectas y oblícuas, las concoides, los óvalos de Cassini, la lemmiscata de Bernoulli, las podares, etc., aplicando las *transversales recíprocas* al trazado de la tangente.

Al exponer la construcción de las expresiones homogéneas, da construcciones gráficas elegantes de la *media armónica* y de la *media armónica de cuadrados,* y con objeto de aplicar la teoría de las formas, de entre las que frecuentemente emplea en las discusiones el resultante, el discriminante y además el hessiano, etc., hace uso continuado de la forma homogénea, á partir de la teoría de la línea recta, cuyas diversas maneras de representación, pone en conocimiento del lector, ocupándose de los haces armónicos, puntos y rectas imaginarios y en el infinito, de los que ha de valerse en lo sucesivo.

En la lección dedicada al círculo deduce la fórmula $A^3 R^2 \operatorname{sen}^2\theta + \Delta_0 = 0$, que determina el radio, la cual le es de gran utilidad más adelante, tratando á continuación de la *potencia de un punto con relación á un círculo,* de los *ejes radicales, centro radical, círculos ortogonales* y *círculo ortotómico.*

En el libro 2.º comienza á exponer las *teorías generales relativas á las curvas planas,* ocupándose de las tangentes de una manera general, pues aplica los razonamientos á una curva algébrica del grado m representada por la ecuación homogénea $f\ (x, y, z;) = 0$, hallando la condición para que dos curvas sean tangentes, y llegando á la idea de las *coordenadas tangenciales* para tratar enseguida de las *envolventes,* demostrando que la envolvente es tangente á las envueltas en los puntos que tiene comunes con éstas, presentando varios ejemplos de envolventes y un método geométrico para obtenerlas.

Siguiendo su plan general de exposición, M. de Logchamps principia la teoría de las polares por la definición del conjugado armónico respecto á los m puntos $A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$, ocupándose de las *polares de los diversos órdenes* y de las *polares recíprocas* y del *método de transformación por polares recíprocas.*

La teoría de las asíntotas, muy detallada, es objeto de tres lecciones, á las que sigue otra destinada á los puntos singulares, dando idea de los *puntos de inflexión, concavidad* y *convexidad, hessiano* de los puntos de inflexión, *puntos de retroceso, osculación, punto de parada, anguloso,* etc.

Los *centros, diámetros* y *ejes*, son tratados con análoga generalidad que las anteriores cuestiones, considerando la ecuación general de las curvas algébricas, haciendo después aplicación á las cónicas, y ocupándose primero del *centro* y depués de los *diámetros* y *curvas diametrales, diámetros singulares, conjugados*, etc.

En la lección dedicada á la *homotecia* y *semejanza* se ocupa también de la homografía, de su *interpretación geométrica* y de la *transformación homológica.*

El tercer libro comienza con la *clasificación de las cónicas* siendo notable el extenso y detallado razonamiento por lo original y metódico, lo que conduce al autor á la *reducción de la ecuación general de segundo grado* y á los *invariantes,* haciendo de estos aplicaciones importantes.

Después de hacer un resúmen de las fórmulas y resultados hallados que termina con la *ecuación del círculo de Monge,* trata de los focos y de las directrices desde el punto de vista general hoy adoptado en los mejores tratados de geometría analítica, exponiendo varios métodos para la determinación de los focos y las directrices de las curvas de segundo orden, terminando con algunas propiedades notables de estos puntos y rectas.

Es notable é interesantísima la lección, cuyo objeto es: *teoremas generales sobre las cónicas,* en la cual, además de una proposición, se considera su *correlativa,* enumerándose y demostrándose los teoremas de Desargues, Mac-Laurin y Braikenridge, de Chasles, Pappus, Pascal, Brianchon, Newton, Carnot, siguiendo numerosos teoremas relativos á cónicas inscriptas y circunscriptas, y si interesante en alto grado es esta lección, no lo son menos las dos siguientes que tratan de la *intersección de dos cónicas* que terminan estableciéndose la existencia de un triángulo autopolar común á dos cónicas.

El cuarto libro tiene por objeto el estudio de las cónicas representadas por sus ecuaciones reducidas. Trata de los polos tangencial y normal, se demuestra el teorema de Joachimsthal, concerniente al cuadrilátero inscriptible formado por los pies de tres de las normales y el punto diametralmente opuesto al cuarto pie, deduciéndose la ecuación del círculo de Joachimsthal. Trátase asimismo de la evoluta círculo osculador, de las transformaciones homográficas de la elipse y la hipérbola, de la aplicación del teorema de Joachimsthal á la parábola, de los centros de curvatura, etc.

Por último, el quinto libro, con que termina la geometría de dos dimensiones, está destinado á la construcción de las curvas. Después de enumerar y distinguir las condiciones *simples* y las *dobles,* se resuelve una serie de problemas en los que dichas condiciones se combinan variadamente, considerándose las cónicas, después se trata sucesivamente de la construcción de las curvas expresadas, por *ecuaciones resolubles,* por *ecuaciones no resolubles,* la construcción de una curva correspondiente á una *ecuación irracional, curvas trascendentes,* las *unicursales* las *coordenadas polares,* diversas espirales, la construcción de las curvas en coordenadas polares y, en fin, las secciones planas del cilindro y del cono circular recto.

Las indicaciones hechas sobre la geometría analítica de dos dimensiones de M. de Longchamps son suficientes para formarse idea del segundo tomo que corresponde á la de tres, y se halla expuesta según el mismo grandioso y elegante plan, según el que se expuso aquella y sólo diremos para terminar nuestra reseña, que el *Supplement,* precioso libro de 240 páginas, es digno coronamiento de la obra constituída por los dos primeros tomos, pues impone fácilmente al lector en todo lo más fundamental de la geometría cinemática é infinitesimal: círculo de curvatura, trazado de las tangentes, puntos múltiples, las cuadraturas, coordenadas trilineales y baricéntricas, coordenadas tangenciales, intersección de dos cuadricas, etc.

Los numerosos problemas intercalados entre las diversas lecciones en que está dividida la obra, forman una colección interesantísima por la importancia, calidad y acierto esquisito que ha presidido á su elección.

Z. G. DE G.

CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión núm. 44, (véase t. II pág. 32)

En cada punto P *de una cónica se traza un diámetro* PP′ *y la nor-*

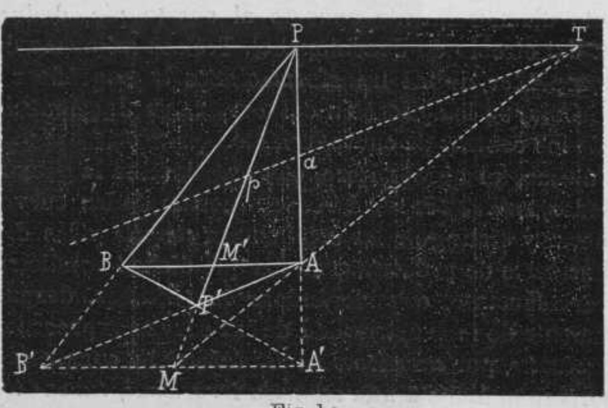


Fig. 1.ª

mal PA. *Determinar la intersección* D *de este diámetro y de la tangente en el otro extremo de la normal.*

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro, profesor de la Escuela Politécnica de Lisboa

I

Por la intersección A de la cuerda normal tracemos la perpendicular AM' que corta el diámetro PP' en el punto M' en la que se toma el segmento M'B igual á AM' (fig. 1.ª y 2.ª).

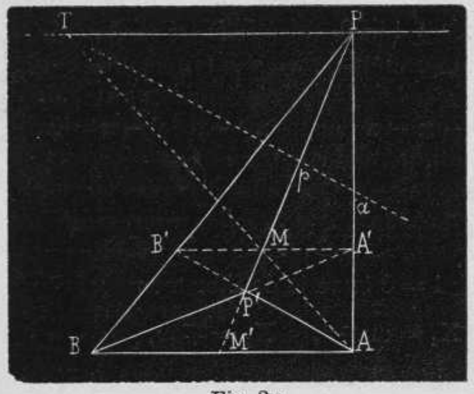


Fig. 2.ª

Es claro que la diagonal A'B' del cuadrilátero completo APBP', A'B' cortará al diámetro dado en el punto buscado M.

En efecto, siendo la diagonal AB en la cónica, una cuerda conjugada del diámetro PP', será la polar del punto M con relación á esta curva, conjugado armónico de M' con relación á P y P'.

II

Trazando la tangente PT en el punto P de la cónica (figs. 1.ª y 2.ª) así como el diámetro *pa*T conjugado de la cuerda normal PA, su punto de intersección T será el polo de esta cuerda, y por consiguiente, la recta TA será la tangente en A, que cortará también al diámetro dado PP' en el punto buscado M.

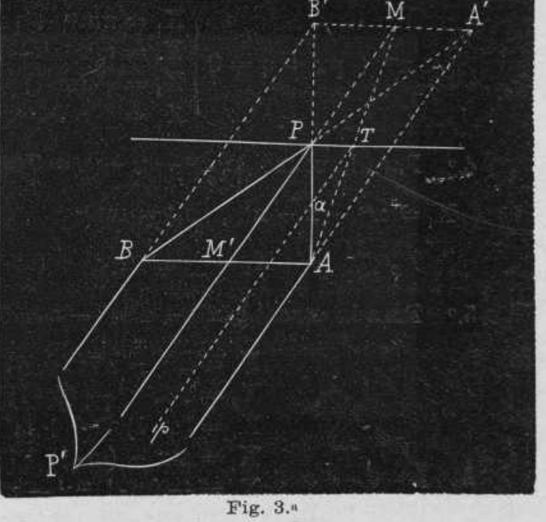


Fig. 3.ª

Observación. — En el caso en que el vértice P' del cuadrilátero inscrito al generador se halla en el infinito (figura 3.ª), la cónica considerada será una parábola, y por consiguiente, el vértice P será el punto medio del segmento MM', y las construcciones se simplifican.

Cuestión núm. 28 (véase t. I, pág. 294)

28. Dar la serie de Sturm para las ecuaciones

$$x^m \pm 1 = 0,$$

$$x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1 = 0,$$

$$x^m + px + q = 0, \quad x^m - x - a = 0, \quad x^m - x^{m-1} - a = 0.$$

(N. C. M.) *(H. Brocard.)*

Solución por D. Angel Bozal, alumno de la Universidad de Zaragoza

1.º Para la ecuación $x^m \pm 1 = 0$ la serie de Sturm es

$$X_1 = x^m \pm 1, \quad X_2 = mx^{m-1}, \quad X_3 = \mp m,$$

2.º Para la ecuación

$$x^m + x^{m1} + \dots + x + 1 = 0, \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x^m + x^{m-1} + \dots + x + 1 \\ X_2 = mx^{m-1} + (m-1)x^{m-2} + \dots + 2x + 1 \\ X_3 = -x^{m-2} - 2x^{m-3} - \dots - (m-2)x - (m-1) \\ X_4 = -m^2 \end{array} \right.$$

3.º Para la ecuación

$$x^m + px + q = 0 \left\{ \begin{array}{l} X_1 = xm^m + px + q \\ X_2 = mx^{m-1} + p \\ X_3 = -(m-1)px - mq \\ X_4 = \pm m^m q^{m-1} - (m-1)^{m-1} p^m \end{array} \right.$$

4.º Para la ecuación $x^m - x - a = 0$ se tiene

$$X_1 = x^m - x - a \ , \quad X_2 = mx^{m-1} \ , \quad X_3 = (m-1)x + ma,$$

$$X_4 = \pm m^m a^{m-1} + (m-1)^{m-1}$$

5.º Para la ecuación $x^m - x^{m-1} - a = 0$, se tiene

$$\begin{array}{l} X_1 = x^m - x^{m-1} - a, \\ X_2 = mx^{m-1} - (m-1)x^{m-2} \\ X_3 = (m-1)x^{m-2} + m^2 a \\ X_4 = mx - (m-1) \\ X_5 = -(m-1)^{m-1} - m^m a. \end{array}$$

Cuestión núm. 46 (véase t. II pág. 32).

Dada una perpendicular PQ al diámetro AB de una circunferencia y M un punto cualquiera de esta perpendicular.

1.º Demostrar que PQ es bisectriz del ángulo CPD.

2.º Determinar la posición de M con la condición de que CP haya de ser paralela á MB (se supone á P situado entre A y B).

3.º Caso en que P se halle en la prolongación de A B.

(J. J. Durán Loriga).

Solución por D. A. Schiappa Monteiro, **profesor de la Escuela Politécnica de Lisboa.**

Tracemos las rectas AD y BC, así como la recta CD, cuyo punto de intersección con el diámetro AB es R (figs. 1 y 2).

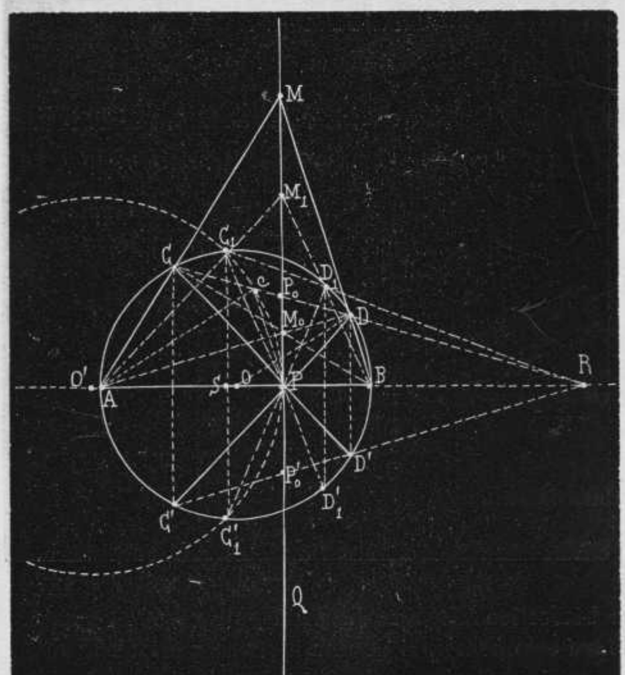


Fig. 1.ª

Suponiendo que el punto M recorra la perpendicular PQ, la recta CD girará, como se sabe, al rededor de este punto R, y las rectas AD y BC al rededor de A y de B, cortándose en M_0, sobre esta perpendicular; y se tendrá el cuadrilátero completo MCM_0DAB.

(1.º y 3.º) Según esto, las rectas CP y DP serán conjugadas armónicas con relación á las rectas MP y RP, que al ser rectangulares,

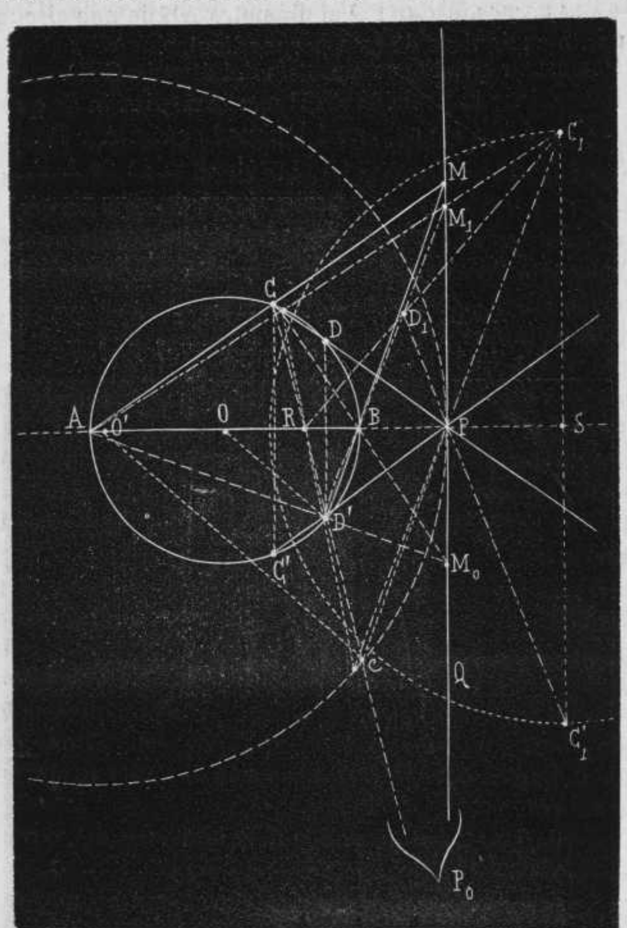


Fig. 2.ª

serán las bisectrices del ángulo CPD y de su suplemento. Se ha demostrado así este principio de una manera general.

Observación.—Se llega al mismo resultado en el caso en que el punto P se halla situado entre A y B (fig. 1.ª) del círculo O, considerando los arcos del círculo *(O)* que son la medida de los ángulos CPM y MPD, y de sus ángulos opuestos por el vértice C′PQ y QPD′.

(2.º y 3.º) Por el punto P tracemos *c*P paralela á BD (figs. 1.ª y 2.ª), y sea *c* su punto de intersección con CD.

Tracemos también el radio OD así como su paralela cO' que corta AB en O'.

Cuando la recta BD gire al rededor de B, la recta RDc girará al rededor de R, y se tendrá siempre

$$\frac{DB}{cP} = \frac{RB}{RP}, \text{ y por consiguiente } \frac{OD}{O'c} = \frac{RB}{RP}.$$

Pero siendo OD constante, también lo será $O'c$. Luego el lugar geométrico de c es una circunferencia (O') cuyos radio y centro son $O'c$ y O' (figs. 1.ª y 2.ª).

Esta circunferencia y la circunferencia (O) tendrán pues, por centro de *homotecia directa* el punto R, pudiendo ser *reales* sus puntos de intersección C_1 y C'_1 (fig. 1.ª) ó *ideales* (fig. 2.ª).

Esto sentado, la recta AC_1 (figs. 1.ª y 2.ª) cortará á la perpendicular PQ en el punto pedido M_1, y las rectas M_1D y C_1P serán paralelas.

Como se ve, la determinación del centro O' y del radio O'P de la circunferencia (O') es muy fácil.

Observación.—Hallándose el punto P en la prolongación del diámetro AB, los puntos C y D estarán situados á distinto lado de este diámetro (fig. 2.ª), y la perpendicular PQ será bisectriz del ángulo suplementario de CPD.

La recta C_1P será la dirección ideal, correspondiente al punto buscado M_1, y el punto de intersección D_1 de RC_1 y C'_1P se hallará situado en la hipérbola equilátera ($C_1BC'_1$,...) *suplementaria* de la circunferencia (O), con relación á su diámetro AB; y la *cuerda ideal comun* $C_1C'_1$ de los círculos (O) y (O') será la *cuerda real comun* de esta hipérbola y de la hipérbola suplementaria ($C_1PC'_1$,...) de este último círculo, con relación al diámetro O'P, las que tendrán el punto R por *centro de homotecia directa.*

La cuerda $C_1C'_1$ será igualmente el diámetro del círculo (S) que corta *ortogonalmente* á los círculos (O) y (O').

Se ve, pues, que el tercer caso de la cuestión propuesta puede hallarse incluido en el 1.º y 2.º de una manera general, reemplazando el círculo (O) por su hipérbola suplementaria, con relación á su diámetro AB, y haciendo sobre estos nuevos datos consideraciones análogas á las del caso en que el punto P es interior al círculo (O).

Nota del Sr. Solertinsky sobre la cuestión 2.

Hallar el lugar del punto de contacto de las tangentes paralelas á una dirección dada, á una serie de elipses ó de hipérbolas homofocales.
(Nicolaides) (1).

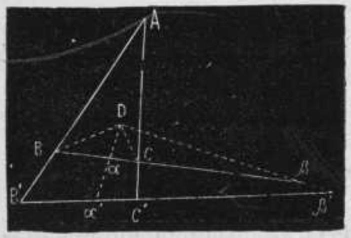
(1) Nos limitamos por ahora á insertar las breves indicaciones que hemos creido oportuno

Esta cuestión es evidente. Se halla fundada en un lema muy conocido y fecundo en consecuencias, á saber:

Si dos rectas, BA, CA, giran alrededor de los puntos fijos B, C con la misma velocidad angular, y en sentido contrario, su punto de intersección describe una hipérbola equilátera, que tiene BC por diámetro, y las paralelas á las bisectrices del ángulo ABC por asíntotas.

Véase una cuestión que es consecuencia de la anterior:

Sobre los lados AB, AC de un ángulo dado se toman cuatro puntos cualesquiera B, C, B', C', y se describen dos hipérbolas equiláteras que tengan por diámetros BC, B'C', y que pasen por A. Construir su segundo punto comun D.



Como se sabe, estas hipérbolas deben tener por asíntotas las paralelas á las bisectrices del ángulo BAC, que tienen por consiguiente dos puntos comunes en el infinito, el tercero es A. Falta hallar el cuarto D.

Para esto, divídanse los segmentos BC, B'C' en la razón $\frac{BB'}{CC'}$.

Sean α, β; α', β' estos puntos de división.

Se sabe (2) que las rectas $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$ son paralelas á las bisectrices del ángulo BAC, y, por consiguiente, perpendiculares.

Sea D su intersección.

Siendo el haz D. (BC $\alpha\beta$) armónico, y los rayos Dα, Dβ pendiculares, estos rayos son las bisectrices del ángulo BDC. Por consiguiente, D pertenece á la hipérbola BAC.

Por la misma razón, este punto D pertenece también á la hipérbola equilátera AB'C'.

Cuestion núm. 5, (véase t. I pág. 207)

Sean A, B, C tres generatrices de un mismo sistema del hiperboloide H; A', B', C' tres generatrices de un mismo sistema del hiperboloide H'; P un punto cualquiera de la intersección de las superficies H, H'. Por P, se trazan las dos rectas que se apoyan respectivamente en pares de rectas (A, B'), (A' ,B); sea γ el plano que pasa por

transcribir de una carta con que nos ha honrado el Sr. Solertinsky, pues creemos que serán seguidas con gran interés por los aficionados á los estudios geométricos.—(Z. G. de G.)

(2) En la obra de M. Catalán (*Théor. et prob.* p. 10, th XIII) se demuestra el caso particular del teorema; pero por el mismo procedimiento se demuestra el caso general.

estas rectas. Se obtienen, de una manera análoga, otros dos planos α, β, combinando por una parte los pares B, C'), (B', C) y por otra, los pares (A, B'), (A' B). Los planos α, β, γ pasan por una misma recta.

(J. Neuberg.)

Solución por el Sr. Solertinsky

Los tres planos que pasan por P y por las generatrices A, B, C cortan á la superficie H según la generatriz G del otro sistema. De igual manera, los planos (P, A'), (P, B'), (P, C') cortan á H' según la generatriz G'.

Sean a, b, c, g, a', b', c', g' los puntos de intersección de las rectas A, B, C, G, A', B', C', G' con un plano cualquiera Q.

La recta D que se apoya en A, B', es la intersección de los planos (P, A), (P, B'). Estos planos encuentran á Q según las rectas ga, $g'b'$; por consiguiente, D cortará á Q en la intersección m de estas rectas. Igualmente, la recta que se apoya en B, A' encontrará á Q en la intersección m' de las rectas gb, $g'a$. Así, la recta mm' será la intersección de los planos Q, γ.

Pero, según un teorema conocido [1], la recta mm' y las otras dos rectas análogas concurren en el mismo punto S.

Los tres planos α, β, γ pasan, pues, por la recta PS.

Observación.—En nuestra demostración, las letras H, H' designan dos snperficies regladas de segundo orden que no son necesariamente hiperboloides.

Cuestión núm. 43 *(Véase t. I, p. 296).*

Supóngase las cónicas circunscriptas á un triángulo dado ABC que encuentran á una recta en dos puntos dados P, Q que dividen armónicamente un segmento fijo MN de esta recta.

Demostrar que estas curvas pasan por un cuarto punto fijo D y que las tangentes en los puntos P, Q envuelven una curva de la tercera clase.

(J. Neuberg),

Solución por el Sr. Solertinsky

Sean: B', C' los puntos en que la recta MN encuentra á los lados AC, AB del triángulo ABC; β, γ los conjugados armónicos de estos puntos con relación á MN.

---

1) Véase *Z. G. de Galdeano*, Geometría elemental. Parte 2.ª, pág. 184.

Formando los pares de puntos PQ, B'β, C'γ una involución, se tiene

$$(PQ\, B'\gamma) = (QP\, \beta C')$$

ó, puesto que la relación anarmónica no altera cuando se cambian simultáneamente dos puntps en otros dos,

$(PQB'\gamma) = (PQC'\beta)$, por consiguiente, $C\,(PQ\,B'\gamma) = B\,(PQ\,C'\beta)$,

lo que muestra que la intersección D de las rectas fijas G, Bβ pertenece siempre á la cónica BCPQA.

Sea **E** la curva envolvente de las tangentes en P, Q á las cónicas consideradas, S un punto cualquiera del plano.

La tangente de S á **E** toca también una de las cónicas ABCD en la recta MN. Pero el lugar de los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde un punto S á todas las cónicas A B C D, es una cúbica [1] es decir, una curva que no puede encontrar á MN mas que en tres puntos. No se puede trazar, pues, desde S mas de tres tangentes á **E**.

CUESTIONES PROPUESTAS

56. [2] Demostrar que no hay curva alabeada cuyas esferas osculatrices tengan sus centros sobre las perpendiculares trazadas á un plano fijo por los puntos de intersección de este plano con las tangentes á la curva.

(E. Cesàro).

63. Sean AEFB, AHIC los cuadrados construídos sobre los lados del ángulo recto de un triángulo ABC, rectángulo en A; O, el punto de intersección de las rectas CF, BI; AOD, la perpendicular bajada desde el vértice A sobre BC. Demostrar que

1.º $$\frac{1}{AO} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC}$$

2.º $$AB.\,FC.\,IO = AC.\,FO.\,IB$$

3.º $$\frac{IO}{OB} = \frac{(AB + AC)\,AC}{\overline{AB}^2}, \quad \frac{FO}{OC} = \frac{(AB + AC)\,AB}{\overline{AC}^2}$$

(N. C. M.) *(H. Van Aubel).*

(1) Se sabe, en efecto, que las polares de un punto S, con relación á todas las cónicas circunscriptas á un cuadrángulo ABCD concurren en el mismo punco S'. Cada una de estas polares contiene tres puntos de contacto, incluído el S', y no puede conten r más. El punto S es el punto doble de la cúbica.

(2) Habiéndose publicado repetida la cuestión 52 con el núm. 56 (pág. 127), hoy publicamos una nueva con el núm. 56.—(Z. G. de G.)

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos