Año II Zaragoza 15 Febrero de 1892 Núm. 14

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

ERNESTO SCHROEDER

Sus merecimientos ante la Lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras.

En tanto que una ciencia cualquiera no traspasa los límites de las revistas destinadas á las investigaciones de los sabios, no puede decirse que ha logrado carta de naturaleza: en efecto, la gran masa del público científico no cobra afición por aquéllo que ha de rebuscar con el fin de aprender en actas de Academias, Memorias de sociedades, reseñas de sesiones, etc., cosa que exige pérdida grande de tiempo y dinero ú oportunidad de buenas Bibliotecas públicas.

Además, en estas publicaciones se suele remitir muy frecuentemente á otras de análoga índole y que para mejor inteligencia del texto se hace preciso consultar, suponiendo generalmente por de contado, que el lector ya conoce algo la materia. Tales sacrificios sólo puede imponérselos el hombre apasionado por el estudio y á él decididamente consagrado.

La difusión de las diferentes disciplinas científicas, exige libros de conjunto en donde el autor, reuniendo los pequeños trabajos diseminados de sus predecesores, sean ilustres ú obscuros, de todos los que han aportado materiales al edificio y agregando su obra propia, construya el monumento.

El haber hecho esto con respecto á la Lógica simbólica es, aparte del mérito que le dan sus propios descubrimientos, una de las glorias del Sr. D. Ernesto Schroeder, profesor de la Escuela técnica de Karlsruhe y uno de los más simpáticos investigadores lógicos del día.

La primera publicación que leí del Sr. Schroeder fué su *Operations Kreis des Logikkalküls.* Sin ser esta obra tan profunda ni detallada como la última del mismo autor, produjo en mi una grandísima impresión. Desde entonces he venido dedicándome asíduamente á esta ciencia para mi tan querida. El autor copia al principio algo de la escasa literatura entonces existente. Prescinde en ella de los números Boolianos (que aparte de la teoría de las probabilidades pueden en la Lógica ser suprimidos), y adopta la adición lógica en el sentido hoy ya corriente. Los métodos que para resolver los problemas lógicos propone son elegantes y sencillos á la par. Tiene cuidado de escribir á dos columnas mostrando la dualidad lógica que tiene cierta semejanza con la geométrica, aunque no en el fondo.

Posteriormente llegaron á sus manos los meritísimos trabajos de Peirce, y entonces tuvo Schroeder la ocasión de hacer, é hizo en efecto, un hermoso descubrimiento. Muchos se fijaron sin duda, aunque sin comprender la trascendencia, en que la demostración de una de las partes de la ley distributiva de la multiplicación lógica que Peirce decía no explanar por ser pesada (too tedious to give) no podía en modo alguno obtenerse siguiendo el camino indicado por el eminente lógico americano. En general debieron cansarse del poco éxito de sus tentativas de reconstrucción de tal prueba. Lo que aquí estaba oculto, lo vió la perspicacia de Schroeder. Con las leyes que en el escrito de Peirce precedían á la conclusión de que tratamos, era imposible absolutamente el deducirse ésta. Para hallarla hay que introducir la idea de *indivíduo,* esto es, si se parte de tal base puede legitimarse la segunda parte de la ley distributiva de la multiplicación. Esto es lo que Peirce denominó una demostración dilemática. Y la prueba mejor de que para evidenciar completamente la ley distributiva hacen falta otros principios que los antepuestos por Peirce, es que existen *relaciones* en que no se cumple una de las partes de la ley distributiva, á pesar de que tales *relaciones* satisfacen á todas las otras fórmulas de la cópula implicativa. Peirce lo reconoce así en su último trabajo (que yo conozca) inserto en el "American Journal of Mathematics", *On the Algebra of Logic, a contribution to the Philosophy of notation.* En este dá una demostración rigurosa de la ley distributiva, pero referente sólo al cálculo de las proposiciones de donde por la consideración del *indivíduo* se aplica á las clases (1). Pero queda en pié la afirmación de Schroeder y como una de sus más bellas aplicaciones se presenta el cálculo lógico con los grupos.

A la verdad, Peirce ya había demostrado por completo la ley distributiva en uno de sus antiguos trabajos publicados en los *proceedings* de la Academia Americana de Ciencias y Artes, pero introduciendo la idea de indivíduo; su demostración no puede ni podrá nunca obtenerse de otro modo.

(1) En el antiguo sentido.

Nos hallamos aquí en presencia de un caso parecido (parecido solo) al de los postulados de Euclides y Arquímedes en la Geometría. Así, pues, hoy se ha creado una Geometría no Euclidea por Gauss, Lobachefski y Bolyai, en que para nada se tiene en cuenta el axioma Euclideo (yo sigo la opinión de los que creen que quizás sea falso); Du Bois Reymond, Stolz y Thome han estudiado el concepto de *contínuo* en unión ds Veronese y Betazzi, y hoy se sabe que existen entes análogos á las cantidades y que no satisfacen al postulado de Arquímedes.

La cópula implicativa de los silogismos se nos presenta como un caso particular de relaciones más generales á las que no se aplica más que una parte de las leyes relativas á la suma y multiplicación propias de la primera. Creo que, aunque no explane más el asunto, se comprenderá perfectamente la inmensa trascendencia del descubrimiento de Schoeder. Las partes de la ciencia que menos postulados exigen, son frecuentemente, sin embargo, pobres, pues á medida que las hipótesis se van introduciendo, el rigor y la generalidad perdidos se transforman en numerosas proposiciones nuevas, á la manera como las fuerzas de la naturaleza se cambian entre sí. ¡Nuestra pobre ciencia humana ha de ser limitada si ha de ser sólida!

Schroeder publicó su descubrimiento en una concisa nota titulada *Exposition of a Logical principle, as disclosed by the Algebra of Logic, but overlovked by the Ancient Logicians,* inserta en el "Report of the British Association de 1884. Después ha detallado completameute sus ideas sobre el asunto en sus admirables *Vorlesungen über die Algebra der Logik,* en el primer tomo y en la parte primera del segundo (1). Hay pues una diferencia esencial de tratamiento de la lógica entre Mac Coll y Peirce de un lado y Schroeder de otro. Los primeros basan el cálculo de identidades sobre el cálculo de proposiciones. El método de Schroeder es más general.

Muchas reseñas hay de las obras de Schroeder y todas las hechas por matemáticos no pueden serle más favorables. Yo creo que la Lógica simbólica solo encontrará alguna oposición de parte de filósofos más amigos de charla que de estudio, ó de personas qne acostumbradas á ser los solos sabios, nunca miran con buenos ojos aquéllo que ignoran.

Un espíritu de justicia diferente anima al Sr. Schroeder, cuidadoso de dar siempre á cada cual lo suyo. Ultimamente publicaba en los *Matematische Annalen* una nota satisfactoria para la Sra. Ladd y re-

(1) Con especialidad las lecciones 6 y 7 de del primer tomo, algunas del segundo y en los apéndices interesantísimos p. e. el del cálculo lógico de los grupos.

cientemente me escribe para indicarme los derechos de esta señora en otro punto distinto. Este se refiere al número de proposiciones que pueden formarse con respecto á $-n$ clases. Christine Ladd cuenta el número de las que pueden formarse absurdas ó falsas, y Peano y Schroeder el número de las que pueden formarse que sean verdaderas. De ahí la diferencia de resultados obtenidos.

He aquí ahora una lista de los escritos matemáticos que conozco de Schoeder:

1. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.
2. Der operationskreis des Logikkalkuls.
3. Note über den operations kreis des Logikkalkuls. (Math. ann. 1877).
4. Crítica de la memoria de Gottlob Frege, titulada: "Begriffschrift„ (Gaceta de matemáticas de Schloemilch),
5. Exposition of a logical principle (ya citada antes).
6. Über das Eliminationsproblem im identischen kalkul.
7. Tafeln der eindeutig umkehrbaren Funktionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. Math. ann. 1887.
8. Über Algorithmen und kalkulrn (Archivos de Matemáticas Grunert Hoppe. 1887).
9. Üder die Anzahl der Urteile etc. (62.ª Reunión de médicos y naturalistas (1) alemanes en Heilderberg).
10. Vorlesungen über die Algebra der Logik. (Exakte Logik) I Band 1890.
11. Über das Zeichnen 1890. (Discurso).
12. Vorlesungen über die Algebra der Logik. II Band. Erste Abtheilung, 1891.

Después de esta lista poco habré de añadir yo.

La Lógica simbólica se impone cada día más y con su difusión crecerá la fama del Sr. Schroeder. No en vano termina su discurso *Uber das Zeichnen* con las palabras del Lábaro imperial que Constantino, vencedor de Magencio, vió escritas en el cielo: ¡*In hoc signo vinces*!

En otro escrito daría las gracias al Sr. Schroeder por sus bondades continuadas para conmigo, en este no lo hago por no mezclar las ideas de justicia con las de gratitud.

PROF. DR. VENTURA REYES Y PRÓSPER.

(1) Naturforscher, investigadores de la naturaleza, en sentido general.

LE CALCUL DES SÉRIES CONVERGENTES

PAR M. G. DE LONGCHAMPS

professeur au Lycée Saint Louis

(CONCLUSIÓN)

6. Considérons les deux séries :

$$U = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots,$$

$$V = \frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)^2} + \ldots\ldots;$$

et posons

$$\varepsilon_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots,$$

$$\varepsilon'_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)^2} + \ldots\ldots$$

Il existe une relation entre ε_n, ε'_n que l'on peut établir, comme il suit.

A cet effet, observons que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \equiv \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Dans cette identité, changeons n en $n+1$, $n+2$, ...; puis, ajoutons les résultats. Nous avons

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \varepsilon_n + \varepsilon'_n,$$

ou

$$\varepsilon_n + \varepsilon'_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Par conséquent, si l'on suppose $\alpha < \varepsilon_n < \beta$

on aura

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} - \beta < \varepsilon'_n < \frac{n+2}{(n+1)^2} - \alpha.$$

7. On a vu comment le calcul d'une série convergente, avec une approximation donnée, revient à la résolution d'une inégalité telle que

$$\varphi(n) > \alpha,$$

pour une valeur entière de n. La méthode consiste, nous l'avons fait

observer, à substituer à la fonction $\varphi(n)$ une autre fonction $\psi(n)$, telle que l'on ait $\psi(n) > \varphi(n)$;
et à résoudre l'inegalité $\psi(n) < \alpha$.

Le choix de la fonction $\psi(n)$ peut être fait de diverses façons; et, parmi celles-ci, quelques unes sont particulièrement avantageuses.

Por montrer ceci sur un exemple, reprenons la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots$$

envisagée plus haut. Nous avons montré que, pour obtenir cette série à 0,1 près, il fallait prendre 31 termes. Mais ce nombre 31, fourni par la méthode que nous avons suivie, est trop élevé; il est facile de s'en assurer, en raisonnant comme il suit:

Si l'on pose

$$\varphi(n) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots,$$

et

$$\psi(n) = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots,$$

on a

$$\psi(n) > \varphi(n).$$

Posons donc

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \ldots\ldots < 0{,}1$$

ou,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \ldots\ldots < 0{,}1$$

finalement

$$n > 10.$$

Ainsi, il suffit de prendre les *dix* premiers termes de la série, pour avoir sa valeur à 0,1 près. Le nombre 31 fourni par la première méthode était donc sensiblement trop considérable.

8. Prenons encore la série, déjà considérée

$$\frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)^2} + \ldots\ldots$$

et posons

$$\frac{1}{n(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} + \ldots\ldots < 0{,}01. \qquad (1)$$

Si nous déterminons n, de telle sorte que

$$\frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} + \ldots\ldots < 0{,}01,$$

cette valeur de n vérifiera, a fortiori, l'inégalité (1). Cette dernière inégalité s'écrit

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\cdots\right]<0{,}01$$

ou

$$n(n-1)>50.$$

En supposant $n \geqq 8$ cette dernière inégalité est vérifiée. Ainsi, on calculera la valeur de la série, à 0,01 près, en prenant pour dernier terme de la partie conservée $\frac{1}{7.8^2}$.

Il faut donc prendre les 7 premiers termes; l'autre méthode indiquait le calcul des 15 premiers termes.

9. Voici un dernier exemple portant sur une série plus compliquée.

Soit la série

$$\frac{1}{2\mathrm{L}2\mathrm{L}3}+\frac{1}{3\mathrm{L}3\mathrm{L}4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,\mathrm{L}n\,\mathrm{L}(n+1)}$$

que l'on veut calculer à 0,1 près, par exemple.

Il faut résoudre l'inégalité

$$\frac{1}{n\,\mathrm{L}n\,\mathrm{L}(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\,\mathrm{L}(n+1)\,\mathrm{L}(n+2)}+\cdots\cdots<0{,}1.$$

En observant que

$$\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2n}\;(*)$$

on voit qu'il suffira de résoudre l'inégalité

$$\frac{2\,\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{L}n\,\mathrm{L}(n+1)}+\cdots\cdots<0{,}1$$

ou

$$2\,\frac{\mathrm{L}(n+1)-\mathrm{L}n}{\mathrm{L}n\,\mathrm{L}(n+1)}+\cdots\cdots<0{,}1$$

(*) Cette inégalité est manifeste, L représentant le symbole des logaritmes népériens. En effet, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2,\quad \text{ou}\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}>4,\quad \text{ou}\quad 2n\,\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\mathrm{L}\,4$$

et, à fortiori,

$$\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2n}$$

ou, enfin

$$2\left[\frac{1}{Ln}-\frac{1}{L(n+1)}+\frac{1}{L(n+1)}-\frac{1}{L(n+2)}\dots\dots\right]<0{,}1.$$

Ainsi, on doit avoir

$$Ln>20, \qquad \text{ou} \qquad n>e^{20}.$$

On voit que n est très grand 738800000 environ!

C'est que, en effet, la série considérée est très lentement convergente.

10. Pour citer maintenant un exemple de série rapidement convergente, prenons la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\dots+\frac{1}{n^n}<\dots\dots$$

et cherchons sa valeur à 0,001 près.

L'inégalité

$$\frac{1}{x^x}+\frac{1}{(x+1)^{x+1}}+\dots\dots<0{,}001$$

sera verifiée, si l'on peut trouver le nombre entier x qui donne

$$\frac{1}{x^x}+\frac{1}{x^{x+1}}+\dots\dots<0{,}001,$$

ou

$$\frac{\frac{1}{x^x}}{1-\frac{1}{x}}<0{,}001$$

ou

$$(x-1)\,x^{x-1}>1000.$$

Le nombre $x=5$ donne $4.5^4=4\times 625=2500.$

Il suffit de prendre les *quatre* premiers termes pour avoir la valeur de la série à 0,001 près.

11. Parmi les procédés de calcul que l'on peut indiquer pour trouver avec une approximation déterminée, la valeur d'une série convergente, il y en a un que nous voulons encore signaler en terminant cette petite Note.

Lorqu'on peut trouver une relation entre deux séries U et V; si l'une d'elles est connue avec une certaine approximation (telle la série e, par exemple) on pourra déduire, de cette rélation, avec une aproximation correspondante, la valeur de la seconde série.

L'un des exemples les plus remarquables que l'on puisse citer, à ce propos, est celui des séries dont le terme général est

$$u_n = \frac{f(n)}{n!}$$

$f(n)$ désignant une fonction entière de n.

Toutes ces séries sont convergentes et peuvent être rattachées à la série e.

Prenons, pour fixer les idées, le cas où $f(n)$ est du second degré et posons

$$f(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma.$$

L'identité

$$\alpha n^2 + \beta n + \gamma \equiv \alpha n(n-1) + (\beta + \alpha) n + \gamma$$

prouve que

$$u_n = \frac{\alpha}{(n-2)!} + \frac{\alpha+\beta}{(n-1)!} + \frac{\gamma}{n!}.$$

De là, on déduit

$$S - u_1 - u_0 = \alpha e + (\alpha + \beta)(e-1) + \gamma(e-2).$$

Ou, finalement,

$$S = e(2\alpha + \beta + \gamma).$$

ESTUDIO DEL TRIÁNGULO INFINITESIMAL

POR D. GABRIEL GALAN

I.—Introducción

En las aplicaciones del Cálculo infinitesimal á la Geometría, ya tiendan á la investigación, ya entrañen sólo caracter representativo de los conceptos analíticos, ocurre con frecuencia, tener que fijar las relaciones infinitesimales existentes entre los diversos elementos de las figuras.

Por el conocimiento de las relaciones finitas que los enlazan, es como se llega de ordinario al de las infinitesimales. Así, cuando de un triángulo se conoce el orden infinitesimal de un cateto y el de un ángulo agudo (el opuesto al cateto, por ejemplo), y se desea conocer el de la hipotenusa, se aplica la ley trigonométrica que los liga: *un cateto es igual á la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto, é* inmediatamente los principios del cálculo diferencial, relativos al orden del resultado de las operaciones en función de los órdenes de los datos.

En el ejemplo citado, bastará recordar la proposición que dice: *el orden infinitesimal de un producto es igual á la suma de los órdenes infinitesimales de los factores,* para llegar al enunciado siguiente: *el orden infinitesimal de un cateto es igual al de la hipotenusa, más el del seno del ángulo opuesto al cateto.*

Este procedimiento es necesario repetirlo á cada nueva investigación; pero si previamente conociésemos, no la ley trigonómetrica finita, sino la relación infinitesimal entre los órdenes de datos é incógnitas, llegaríamos á definir el del resultado sin necesidad de atender á aquélla.

Por esto, juzgamos conveniente y nos proponemos establecer fórmulas que definan el orden infinitesimal de los elementos desconocidos de un triángulo en función de los órdenes de los conocidos; ó de otro modo: resolver sobre los triángulos infinitesimales, los mismos problemas que la Trigonometría ordinaria resuelve sobre los finitos.

Además, como en toda forma, puede efectuarse una verdadera triangulación, es suficiente tener hecho el estudio del triángulo para poder verificar el referente á las demás figuras.

Realizado que sea el primero, efectuaremos un ensayo de aplicación á los principios más conocidos de la Geometría infinitesimal.

II.—Preliminares

Nada hay grande ni pequeño en absoluto: la idea de cantidad es relativa, y el número que nos expresa el resultado de su comparación con la unidad, será tanto mayor ó menor, cuanto menor ó mayor sea ésta. Una cantidad puede ser infinitamente pequeña respecto de otra, y al propio tiempo infinitamente grande en relación con una tercera.

Apoyados en este criterio de subordinación, se definen en el análisis infinitesimal los diversos órdenes de la cantidad, relacionándolos todos, con un infinitamente pequeño ó infinitamente grande, que se adoptan como fundamentales.

Se establecen también teoremas que dan á conocer el orden infinitesimal del resultado de las operaciones. De ellos vamos á enunciar los que han de servir á nuestro fin, refiriéndonos para su estudio al *Tratado de cálculo diferencial* de nuestro maestro Sr. Archilla:

«I.—El orden infinitesimal de una suma de un número finito de sumandos, del mismo signo, es igual al del sumando de menor orden.

»*Corolario.*—Si los sumandos son todos del mismo orden, el de la suma será igual al de cada uno de ellos.

»*Escolio.*—Si los sumandos son de distinto signo y del mismo orden, el orden infinitesimal del resultado, puede ser superior al de cada uno de los sumandos.

»II.—El orden infinitesimal de la diferencia de dos cantidades de distinto orden, es igual al orden de la del menor.

»III.—El orden infinitesimal de un producto, es igual á la suma de los órdenes infinitesimales de los factores.

»IV.—El orden infinitesimal de un cociente, es igual á la diferencia de los órdenes del dividendo y divisor.

»V.—Si dos cantidades difieren en un infinitamente pequeño, de orden superior al de cada una de ellas, son del mismo orden infinitesimal y recíprocamente.»

En todos estos teoremas, como en las sucesivas aplicaciones, la cantidad finita debe considerarse de orden cero, y las infinitamente grandes de órdenes negativos; suponiendo positivos, según de ordinario se hace, los órdenes de las infinitamente pequeñas.

III.—Naturaleza de los elementos

1.—Son elementos principales de un triángulo los tres lados y los tres ángulos.

Un triángulo se dice finito, si lo son todos sus elementos; infinitesimal si alguno de ellos es infinitamente pequeño ó infinitamente grande.

Un triángulo infinitesimal, puede tener lados infinitamente pequeños ó infinitamente grandes, porque estos dos estados de la magnitud puede alcanzar un segmento rectilíneo; y ángulos de la primera especie, pero no de la segunda, puesto que la suma de los tres ha de ser finita, y si alguno de los sumandos fuese infinitamente grande, aquélla lo sería en virtud del teorema I del capítulo II.

Resumiendo:

Un triángulo puede tener:

Lados infinitamente pequeños, finitos ó infinitamente grandes y ángulos finitos ó infinitamente pequeños.

IV.—Relaciones entre los órdenes infinitesimales de los lados

2.—Teorema fundamental.—*Un triángulo no puede tener los tres lados de distinto orden infinitesimal.*

Sean a, b, c, los lados, cuyos órdenes infinitesimales designaremos por m, m', m'', siendo $m > m' > m''$.

Si expresamos por la notación

$$[a]_m$$

la frase: *lado* a *cuyo orden infinitesimal es* m, tendremos aplicando el conocido principio de Geometría que dice: *un lado cualquiera de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos*, la siguiente expresión:

$$(1) \qquad [a]_m > [b]_{m'} - [c]_{m''};$$

el orden infinitesimal del primer miembro es m; el del segundo m'' (II de preliminares); es decir, el orden infinitesimal de

$[a]_m$ es mayor que el de $[b]_{m'} - [c]_{m''}$;

luego el valor absoluto de $[a]_m$ ha de ser menor que el de la diferencia, $[b]_{m'} - [c]_{m''}$.

Son absurdas, por tanto, la expresión (1) y la hipótesis de que los tres lados sean de distinto orden.

Escolio.—No son admisibles respecto de los órdenes de los lados de un triángulo, más que las dos siguientes combinaciones:

I.—Tres lados del mismo orden.

II.—Dos lados del mismo orden y el tercero de orden distinto.

3.—Teorema II.—*Si un triángulo tiene dos lados infinitesimales del mismo orden, el tercero debe ser de orden superior.*

Sean: a, b, c, los lados; m, m, m', sus órdenes infinitesimales respectivos y $m > m'$.

En virtud del teorema de Geometría que dice: *un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos*, debe verificarse la relación:

$$[c]_{m'} < [a]_m + [b]_m;$$

el orden infinitesimal del primer miembro es m'; el del segundo m (Corolario de Preliminares); y puesto que el valor absoluto de

$$[c]_{m'}$$

ha de ser menor que el de la suma $[a]_m + [b]_m$,

deberá verificarse $\qquad m' > m$

Resumiendo.

Un triángulo puede tener:

I.—*Tres lados infinitesimales del mismo orden.*

II.—Dos lados infinitesimales del mismo orden y el tercero de orden superior.

4.—Corolarios.

I.—*Si conocemos sólo el orden infinitesimal de un lado de un triángulo, no podemos afirmar nada de la naturaleza de los otros dos.*

II.—*Si conocemos dos y son del mismo orden, el tercero podrá ser del mismo ó de orden superior.*

III.—*Si conocemos dos, y son de distinto orden, el tercero será del orden del que le tenga menor.*

V.—Existencia ó imposibilidad de los diversos casos que pueden presentarse

5.—Propongamos los diversos casos que pueden presentarse, según la naturaleza de los lados; y teniendo en cuenta los principios establecidos en los capítulos anteriores, examinemos cuales son admisibles y cuales no.

Todos están comprendidos en el siguiente cuadro:

Casos que pueden imaginarse en el estudio del triángulo infinitesimal, atendiendo á la naturaleza y orden de los lados:

Tres lados infinitesimales	A. Tres infinitamente pequeños . . .	1.° Del mismo orden. 1.° Dos del mismo orden. 3.° Los tres de distinto orden.
	B. Dos infinitamente grandes y uno infinitamente pequeño.	1.° Los infinitamente grandes del mismo orden. 2.° Los infinitamente grandes de distinto orden.
	C. Dos infinitamente pequeños y uno infinitamente grande	1.° Los infinitamente pequeños del mismo orden. 2.° Los infinitamente pequeños de distinto orden.
	D. Tres infinitamente grandes . . .	1.° Del mismo orden. 2.° Dos del mismo orden. 3.° Los tres de distinto orden.
II. Dos infinitesimales y uno finito. . . .	A. Dos infinitamente pequeños y uno finito	1.° Los infinitamente pequeños de mismo orden. 2.° Los infinitamente pequeños de distinto orden.
	B. Dos infinitamente grandes y uno finito.	1.° Los infinitamente grandes del mismo orden. 2.° Los infinitamente grandes de distinto orden.
	C. Uno infinitamente pequeño, uno finito y uno infinitamente grande.	
III. Dos finitos y uno infinitesimal . . .	A. Dos finitos y uno infinitamente pequeño.	
	B. Dos finitos y uno infinitamente grande.	
IV.	Los tres finitos.	

6.—Estudiemos en detalle los diversos casos presentados en el cuadro anterior.

(I.-A.).—*Tres lados infinitamente pequeños.*

Es evidente la posibilidad de este caso (fig. 1).

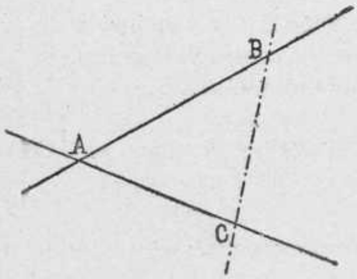


Fig. 1.ª

Podemos imaginar el triángulo construyendo un ángulo A, que podrá ser finito, ó infinitamente pequeño; si trazamos la recta BC, determinará un triángulo ABC, que tendrá nulos sus tres lados, en el caso de pasar por A la recta auxiliar; luego en una posición infinitamente próxima á ésta considerada como límite (no estando el vértice A, sobre BC), los tres lados serán infinitamente pequeños.

Atendiendo á los órdenes de estos infinitamente pequeños, pueden presentarse tres casos distintos:

1.º—Tres lados infinitamente pequeños del mismo orden.

2.º—Dos lados infinitamente pequeños del mismo orden, y el tercero de orden distinto.

3.º Los tres de distinto orden.

El primero es evidente.

El segundo es posible, si el tercer lado es de orden superior al de los dos primeros.

El tercero es absurdo (Cap. IV.—Teorema fundamental).

Resulta, pues, ser sólo admisibles las dos hipótesis siguientes:

I.—*Tres lados infinitamente pequeños del mismo orden.*

II.—*Dos lados infinitamente pequeños del mismo orden, y el tercero de orden superior.*

(I.-D.).—*Tres lados infinitamente grandes.*

Este caso como el anterior, es también posible.

Si suponemos la recta auxiliar BC (fig. 1), en la posición representada en la figura, y hacemos que se mueva paralelamente á sí misma, cuando los puntos B y C se hayan alejado indefinidamente sobre AB y AC, los tres lados del triángulo ABC, habrán llegado á adquirir el estado de magnitudes infinitamente grandes (ó de cantidades), puesto que aquí la idea de infinitamente grande es relativa.

Atendiendo á los órdenes, se presentan tres casos análogos á los anteriores:

1.º—Tres lados infinitesimales grandes del mismo orden.

2.º—Dos lados infinitamente grandes del mismo orden, y el tercero de orden distinto.

3.º—Los tres infinitamente grandes de distinto orden.

Razonando como anteriormente, llegamos á la conclusión de que sólo son admisibles los dos primeros, es decir, en un triángulo cuyos tres lados sean infinitamente grandes podrá admitirse:

I.—*Que los tres sean del mismo orden.*

II.—*Que dos sean del mismo orden y el tercero de orden superior.*

Conviene hacer una advertencia que aclarará este segundo enunciado.

Al decir que un lado de un triángulo es infinitamente grande de un orden superior al de otro, debemos entender que el valor absoluto del número que indica el orden del primero, es menor que el del segundo; pues hemos dicho, que eligiendo un infinitamente pequeño como fundamental y considerándole de orden positivo, los infinitamente grandes serán de órdenes negativos, y sabido es que un número negativo vale en el orden natural de la ley de formación de la cantidad, tanto menos cuanto mayor es su valor absoluto.

Para hacer más comprensible el segundo enunciado, convendría decir: Que dos lados, sean infinitamente grandes del mismo orden y el tercer lado *más pequeño* que los dos primeros.

(I-C.).—*Dos lados infinitamente grandes y uno infinitamente pequeño.*

Es posible en virtud de la proposición II del número 3.

Su construcción:

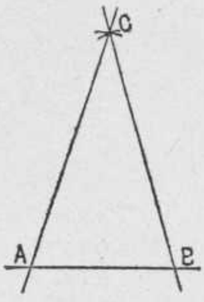


Fig. 2.ª

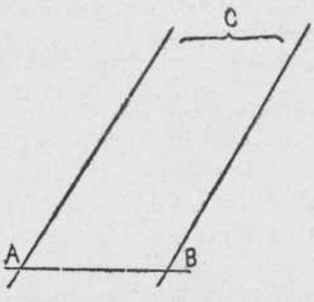


Fig. 3.ª

Tomemos un lado, AB, infinitamente pequeño (fig. 2); y con una abertura de compás infinitamente grande (relativa), tracemos dos arcos de círculo, haciendo centros en A y en B; su intersección determina el tercer vértice C, del triángulo pedido.

De otra manera puede imaginarse construido el triángulo. Trácese una dirección cualquiera distinta de AB (fig. 3); y por A y B dos rectas paralelas á dicha dirección; el tercer vértice C, será el punto al infinito de las rectas AB y BC.

Atendiendo á los órdenes de los lados pueden presentarse dos casos:

1.º—Los dos lados infinitamente grandes del mismo orden.

2.º—Los dos lados infinitamente grandes de distinto orden.

El primero es posible, pues resulta un triángulo con dos lados infinitesimales del mismo orden y el tercero de orden superior (N.º 3-II).

El segundo es absurdo, por resultar un triángulo con tres lados de distinto orden (Cap. IV.—Teor. fund.).

Resulta ser sólo admisible el primero; á saber:

Dos lados infinitamente grandes del mismo orden y el tercero infinitamente pequeño.

(I.—C).—*Dos lados infinitamente pequeños y uno infinitamente grande.*

Es absurdo.

En efecto: si los infinitamente pequeños son del mismo orden, el tercero debe ser de orden superior; y si son de distinto orden resulta un triángulo con tres lados de órdenes distintos.

(II.—A).—*Dos lados infinitamente pequeños y uno finito.*

Absurdo; pues teniendo dos lados infinitamente pequeños, si son del mismo orden, el tercero deberá ser de orden superior, y si son de distinto orden resultan tres lados con órdenes diferentes.

(II.—B).—*Dos lados infinitamente grandes y uno finito.*

Es posible.

Atendiendo á los órdenes pueden ocurrir dos casos:

1.º—Los dos lados infinitamente grandes del mismo orden.

2.º—Los dos lados infinitamente grandes de órdenes distintos.

El segundo evidentemente es absurdo.

El primero es admisible y su construcción idéntica á la representada en las figuras 2.ª y 3.ª, con la sola variante de suponer finito el lado AB.

El segundo evidentemente es absurdo.

El primero es admisible y su construcción idéntica á la representada en las figuras 2.ª y 3.ª, con la sola variante de suponer finito el lado AB.

El caso admisible es:

Dos lados infinitamente grandes del mismo orden y el tercero finito.

(II.—C).—*Un lado infinitamente pequeño, otro finito y el tercero infinitamente grande.*

Absurdo. (Cap. IV. Teor. fund.).

(III.—A).—*Dos lados finitos y uno infinitesimal.*

Es posible, si el infinitesimal es infinitamente pequeño.

Su construcción en la fig. 2.ª, suponiendo AB infinitamente pequeño y los AC y BC finitos.

Hipótesis admisible:

Dos lados finitos y uno infinitamente pequeño.

(III.—B).—*Dos lados finitos y uno infinitamente grande.*

Absurdo.

(IV).—*Los tres finitos.*

Evidente.

7.—Reuniendo todos los casos *posibles*, podemos presentarlos en el cuadro siguiente:

(Las líneas de puntos corresponden á los casos absurdos).

(Se continuará).

PRINCIPIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

NOTA DEL SR. G. PEANO

profesor de la Universidad de Turín

(CONCLUSIÓN)

§ 4 signos $-$, $\smile$, Λ (1)

Siendo a una proposición, con $-a$ designamos su negación.

Si a, b, c representan proposiciones, se tiene:

1. $-(-a) = a$ «Dos negaciones constituyen una afirmación.»

---

(1) El signo de negación $-$, en la forma empleada se debe en rigor á Boole.

En vez de $-a$, Schroeder escr.be a_1; Jevons A; McColl a'.

En vez de $a \smile b$ escribió Leibnitz $a\ n\ b$ (donde n es la inicial de *nel*), Jevons $a.|.b$ y el mayor número de autores $a + b$.

DEDEKIND (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1 88) en vez de $a \frown b$ y $a \smile b$ escribe

2. $$a=b.=.-a=-b.$$

3. $$a \supset b.=.-b \supset -a$$

«La proposición: de a se deduce b, es equivalente á: de no b se deduce no a.

Por comodidad, en la escritura alguna vez en lugar de escribir el signo — delante de toda la proposición, lo escribiremos delante del signo de relación ε, $=$, etc.:

4. $$-(x \varepsilon s).=.x-\varepsilon s$$

5. $$-(x=y)=.x-=y.$$

Siendo a, b proporciones, con $a \cup b$ indicaremos la afirmación de la verdad de una al menos de la a y de b; esto es, ó es cierta la a, ó es cierta la b. La operación $\cup$ llámase también *adición lógica*. Se tiene:

6. $$-(ab)=(-a)\cup(-b)$$

«Negar que sean ciertas á un tiempo la a y la b es afirmar que, ó no es cierta la a ó no es cierta la b» ó sea «la negación de un producto es la suma de las negaciones de los factores.»

7. $$-(a\cup b)=(-a)(-b)$$

«Negar que una al menos de las a y b sea cierta, equivale á afirmar que la a y la b son ambas falsas,» ó sea «la negación de una suma es el producto de las negaciones de los términos.»

Se tiene.

8 $$a\cup b=b\cup a;\ a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c=a\cup b\cup c;\ a\cup a=a,$$

fórmulas que expresan la propiedad conmutativa y asociativa de la adición lógica, análoga á la indicada en el § 1.

9. $$a(b\cup c)=ab\cup ac,$$

que expresa la propiedad distributiva de la multiplicación lógica respecto á la adición, análoga á la algébrica $a(b+c)=ab+ac$.

$G(a,b)$ y $M(a,b)$ notaciones poco diferentes de las empleadas por CANTOR en sus estudios sobre *Mannichfaltigkeinten* (Math. Ann t. XV y siguientes).

Se podría emplear el signo V inicial de *vero* (verdadero), para indicar una proposición idénticamente cierta, y tratándose de clases, para indicar la clase *tutto* (todo). Este signo fué usado por Peirce; es el *módulo* de la multiplicación lógica. Para indicar lo absurdo, ó el nulo, usaremos el signo Λ, ó sea la letra anterior invertida. No introduciremos el signo V que corresponde por dualidad á Λ, porque no tendremos necesidad.

En vez de los signos Λ y V, la mayor parte de los autores escriben 0 y 1, ó signos derivados. Sin embargo, es muy útil distinguir bien los módulos de las operaciones algebraicas de los de las operaciones lógicas.

Ejemplos: Se tiene:

$$x, y \varepsilon q . \supset \therefore xy = 0 . = : x = 0 . \cup . y = 0$$

«Siendo x é y dos números, decir que su producto es nulo, significa decir que se anula uno de los factores.» Tomando los negativo- de los dos miembros de la igualdad, según las reglas 2 y 7, se puede escribir:

$$x, y \varepsilon q . \supset \therefore xy - = 0 = : x - = 0 . y - = 0$$

«Si el producto de dos números no es nulo, son ambos al mismo tiempo diversos de cero, y viceversa.»

Emplearemos, en fin, el signo Λ para indicar lo *absurdo.*

De aquí $ab = \Lambda$, dice que las proposiciones a y b son contradictorias. Se tiene:

10. $$a - a = \Lambda ; a\Lambda = \Lambda ; a \cup \Lambda = a$$

«afirmar y negar una misma proposición es un absurdo» «si en un sistema de ecuaciones algunas son contradictorias, el sistema es absurdo.....» Se nota la analogía entre la Λ y el 0, cuales son los módulos de las adiciones lógica y algébrica.

11. $$a \supset b . = . a - b = \Lambda$$

«En vez de decir que de a se deduce b, se puede decir que la afirmación de a y la negación de b es un absurdo.» Por esto en toda deducción, $a \supset b$, se puede transportar el segundo miembro al primero, haciéndole preceder del signo $-$ y escribiendo en el segundo Λ, y viceversa. Así, por ejemplo, la proposición 9 del § 1:

$$a = b . b = c : \supset . a = c$$

puede escribirse, transportando la $a = c$ al primer miembro:

$$a = b . b = c . a - = c : = \Lambda$$

«El sistema de las proposiciciones a es igual á b, b es igual á c, y a no es igual á c, es absurdo;» y transportando la $b = c$ al segundo miembro, se podrá reducir á la forma:

$$a = b . a - = c : \supset . b - = c .$$

Resulta de aquí que se puede prescindir del signo $\supset$, reduciendo siempre el segundo miembro á la Λ. Sin embargo, nosotros lo conservaremos para mayor variedad y por analogía con la forma común de expresar el pensamiento.

Si a, b,..... representan clases, á los signos $-$, $\cup$, Λ atribuiremos las significaciones siguientes: $-a =$ «los no a»

$a \cup b =$ «al conjunto de los indivíduos que son ó a ó b.»

$\Lambda =$ «nada.» De aquí $a \frown b = \Lambda$ significa «ninguna es b »

De aquí que el signo Λ se se leerá *absurdo* ó *ninguno*, según que se trate de proposiciones ó de clases; en los dos casos tiene la misma propiedad, como el signo $\supset$.

Respecto al signo de la deducción ($\supset$) entre dos proposiciones, observaremos aún lo que sigue: cuando a y b son proposiciones que contienen letras variables $x, y, \ldots.$ con $a \supset b$ entendemos que «cualesquiera que sean $x, y \ldots.$, siempre que satisfagan á la a será cierta la b.

Así la $$x, y \, \varepsilon \, Q . x - : \supset . \, x + y > 2 \sqrt{xy}$$

significa que: «cualesquiera que sean las dos cantidades positivas x é y, con tal que no sean iguales, será etc. Pero alguna vez se quiere afirmar la deducción sólo respecto de alguna ó algunas de las letras variables; para indicar esto, escribiremos como índice de $\supset$ la letra respecto à la que se quiere hacer la deducción. Así, siendo a y b proposiciones que contienen la letra x además de otra letra, la expresión $a \supset_x b$ significa «cualquiera que sea x, de a se deduce b.» Esta proposición cesa de ser una proposición absoluta, pero es una condición entre las letras restantes. Asi, se tiene:

$$a, b, c \, \varepsilon \, q : x \, \varepsilon \, q . \supset_x . \, ax^2 + b_x + c = 0 \therefore \supset : a = 0 . \, b = 0 . \, c = 0$$

Si a, b, c son tres números, y si cualquiera que sea el número x, se tiene $ax^2 + \ldots. = 0$, los tres números dados son nulos.»

Análogamente $a =_x b$ indica que, cualquiera que sea x, las proposiciones a y b son equivalentes, ó sea $a \supset_x b . \, b \supset_x a$.

$a =_x \Lambda$ significa que, cualquiera que sea el valor de x, la a es absurda» ó sea «no existen de las x que satisfagan á la condición a.» $a - =_x \Lambda$ significa «existen de las x que satisfacen á la condición a.»

Conc'usión

Los signos

ε (*es*) $=$ (*es igual*), $\supset$ (*se deduce, ó está contenido*), $\frown$ (*es* en general sobreentendido), $\cup$ (*ó*), $-$ (*no*), Λ (*absurdo ó ninguno*), permiten expresar cualquier relación lógica.

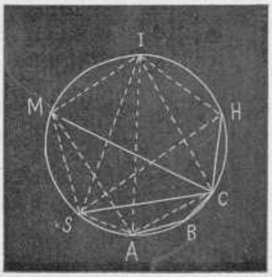
Conviene dar un nombre á dichos signos. Pero estos nombres, tomados en lenguaje común, los representan solo aproximadamente; porque los signos tienen siempre el mismo significado, mientras que las palabras no los tienen iguales. Para traducir en símbolo una proposición ordinaria, ocurre analizarla, ver el significado que tienen las diversas palabras y representar estos significados con símbolos equivalentes; pero sería erróneo el sustituir desde luego los símbolos ε, $\cap$, $\cup$, ... en lugar de las palabras *es*, *y*, *ó*.

En las páginas precedentes se enunciaron algunas propiedades de estos símbolos. Pero existen otras muchísimas: es de notar el *principio de dualidad*, por el que de toda identidad lógica se pasa á otra, cambiando los signos $\cap$ y $\cup$; se recordará solo que ya Boole llegó á resolver cualquier sistema de ecuaciones con una ó varias incógnitas, ligadas á clases conocidas con las operaciones $\cap$, $\cup$, $-$, repetidas un número arbitrario de veces.

DETERMINACIÓN DEL LADO DEL PENTEDECÁGONO REGULAR CONVEXO INSCRIPTO

y de los lados de los Pentedecágonos regulares inscriptos estrellados

POR D. FÉLIX ESEVERRI CATEDRÁTICO DEL INSTITUTO DE VITORIA



Trazo el diámetro AI, y tomo desde los extremos A, I, los arcos simétricos AB y AS iguales á $\frac{1}{10}$ de la circunferencia, y los arcos IH, IM, iguales á $\frac{1}{5}$ de la circunferencia. Señalo el arco ABC, igual á $\frac{1}{6}$ de la circunferencia y trazo las cuerdas CB, CH, CS y CM, que serán los lados pedidos.

En efecto, según el teorema de Poinsot, hay cuatro pentedecágonos regulares inscriptos; uno, uniendo los 15 puntos de división de *uno* en *uno*, que es el convexo y tres estrellados uniendo los puntos de división de 2 en 2, de 4 en 4 y de 7 en 7.

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Arco ABC} = \frac{1}{6}\\ \text{Arco AB} = \frac{1}{10}\end{array}\right\}; \text{ luego arco BC} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

lo que nos dice que la cuerda BC es el lado del pentedecágono regular convexo inscripto.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Arco CHI} = \dfrac{1}{3}\\ \text{Arco HI} = \dfrac{1}{5}\end{array}\right\}; \text{luego arco CH} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15},$$

lo que nos dice que la cuerda CH es el lado del pentedecágono estellado que se forma reuniendo los vértices de 2 en 2.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Arco ABC} = \dfrac{1}{6}\\ \text{Arco AS} = \dfrac{1}{10}\end{array}\right\}; \text{luego arco CAS} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15},$$

lo que nos dice que la cuerda CS es el lado del pentedecágono estrellado que se forma uniendo los vértices de 4 en 4.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Arco SABC} = \dfrac{4}{15}\\ \text{Arco SM} = \dfrac{1}{5}\end{array}\right\}; \text{luego arco CASM} = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15},$$

lo que nos dice que la cuerda CM es el lado del pentedecágono estrellado que se forma uniendo los puntos de división de 7 en 7.

Para determinar los valores numéricos de estos lados, uno sus extremos con los extremos del diámetro AI por medio de las cuerdas (AB, AC, IB, IC) (AH, IC, IH) (AS, IS) (AM, IM). Por esta construcción se forman los cuadriláteros inscriptos

ABCI, ACHI, SACI, ACIM,

y aplicándoles el teorema de Ptolomeo, resulta:

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{AC.BI} = \text{AI.BC} + \text{AB.CI},\\ \text{AH.CI} = \text{AI.CH} + \text{AC.HI},\\ \text{CS.AI} = \text{AC.IS} + \text{AS.CI},\\ \text{AI.CM} = \text{AC.IM} + \text{AM.CI}.\end{array}\right.$$

Suponiendo el radio unidad, y habida cuenta de los valores numéricos de las líneas que entran en las igualdades precedentes y que son:

$$\text{AC} = \text{lado del exágono regular inscripto} = 1$$

$$BI = \text{lado del pentágono estrellado} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$AI = 2, \quad BC = x_{15}^{1}$$

$$AB = \text{lado del decágono regular convexo inscripto} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$CI = \text{lado del triángulo equilátero inscripto} = \sqrt{3}$$

$$AH = \text{lado del decágono estrellado} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$CH = x_{15}^{2}$$

$$HI = \text{lado del pentágono regular convexo inscripto} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{2}}$$

$$CS = x_{15}^{4}, \quad IS = BI, \quad AS = AB$$

$$CM = x_{15}^{7}, \quad IM = IH, \quad AM = AH,$$

tendremos, sustituyendo en las igualdades (1)

$$\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2x_{15}^{1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3} = 2x_{15}^{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$2.x_{15}^{4} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3}$$

$$2.x_{15}^{7} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3}.$$

y finalmente:

$$x_{15}^{1} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$$

$$x_{15}^{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

$$x_{15}^{4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3} + \sqrt{15}\right)$$

$$x_{15}^{7} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{3} + \sqrt{15}\right)$$

FONDAMENTI DI GEOMETRIE

a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare,

LEZIONI DI

GIUSEPPE VERONESE

Professore nella R. Università di Padova.

(CONTINUACIÓN)

El capítulo III está destinado al *número en su primera formación* y á los *números naturales*.

El capítulo IV trata de *los sistemas de elementos, y, en particular de los de una dimensión*. Principia por «consideraciones empíricas sobre el continuo intuitivo rectilíneo». Define enseguida el *elemento fundamental*, ocupándose además de los elementos y formas diferentes en posición, coincidentes en sentido absoluto ó relativo, de la ley de *existencia* ó *construcción* de las formas, de su *determinación* de su *correspondencia de identidad*, de los conceptos de mayor y de menor— Sistema de una dimensión — Segmentos del sistema — Segmento indivisible — Direcciones del sistema — Sistema simple de una dimensión, cerrado ó abierto.

El capítulo V trata de la *forma fundamental*. En él se define el sistema de una dimensión, homogéneo en un sentido dado, y se exponen las primeras propiedades del sistema idéntico por la posición de sus partes, de la identidad de dos formas, de las operaciones de unir y quitar en la forma fundamental, de las relaciones entre tres elementos cualesquiera de la forma, de los segmentos múltiplos y submúltiplos de un segmento dado de la forma fundamental, de la escala, unidad, origen y campo de la misma.

El capítulo VI trata con gran extensión de los *segmentos finitos, infinitos, infinitesimales, indefinidamente pequeños* é *indefinidamente grandes y de los números infinitos*. En este capítulo, el autor, al presentar la exposición de su doctrina, hace frecuentes é interesantes referencias á las doctrinas de los eminentes matemáticos Bois-Reymond, Cantor, Dedekin, á las obras de Grassmann, Stolz, Killing, Peano, etc.

Comienza con la hipótesis (III) sobre la existencia de elementos exteriores al campo de una escala, hipótesis que no está en contradicción con la definición y propiedades del sistema idéntico en la posición de sus partes. Trata de los segmentos finitos, infinitos ó infinitesimales respecto de otros. Sigue la exposición de la hipótesis IV que llama hipótesis de *construcción* ó de *determinación* de los segmentos infinitos de la forma fundamental. Define el *elemento límite en el infi-*

nito, el *campo en el infinito de orden* m respecto á la unidad AA_1, el *campo en el infinito de orden cero*, etc., y se ocupa enseguida de los números infinitos é infinitesimales de los diferentes órdenes, de sus propiedades y de sus símbolos. Así: *un número finito es nulo respecto á un número infinito, aunque no en sentido absoluto, dos números infinitos son iguales respecto á un número finito.* Los números correspondientes á segmentos infinitos de un orden dado *m* se llaman *infinitesimales de orden* m *respecto al primero. El campo infinito ó infinitesimal de orden dado respecto á un número* a *es infinito ó infinitesimal respecto á todos los números de la especie* a. A estas nociones sigue la exposición de los *números transfinitos* de Cantor, comenzando con hipótesis de la existencia de un sistema Σ de una dimensión en el que hay siempre un segmento idéntico á un segmento cualquiera (AB) en un sentido dado cuyo primer extremo es un segmento X cualquiera del sistema Σ, y con la hipótesis II: *el campo de una escala en el sistema* Σ *determina un primer elemento exterior en el sentido de la escala,* lo cual le conduce á la definición del número infinito ó *transfinito* de Cantor.

La detallada exposición del Sr. Veronese relativa al infinito y á lo infinitesimal adquiere mayor importancia por las referencias que hace, como hemos indicado, á las doctrinas de los matemáticos alemanes é italianos que han contribuido al desarrollo de esta difícil cuestión de la ciencia, y en las numerosas y detalladas citas y discusiones que hace de estas modernas investigaciones relativas á los infinitos é infinitamente pequeños, puede el lector enterarse del estado general en que se halla tan importante rama de la ciencia, sobre todo de la evolución sufrida en estos últimos años.

Termina esta importante introducción á la obra ocupándose de la división de segmentos en partes finitas, la hipótesis sobre la continuidad relativa á una unidad, los elementos límites de un grupo de elementos respecto á una unidad de la forma fundamental, los elementos límites de un grupo de elementos obtenido mediante la división sucesiva de un segmento en partes iguales, los elementos límites absolutos de un grupo de elementos en la forma fundamental, la división absoluta de un segmento en *n* partes iguales, la determinación de la escala respecto á un segmento dado como unidad fundamental, la correspondencia de proporcionalidad entre los segmentos de una ó varias formas fundamentales. Del campo finito, infinito é infinitesimal, al rededor de un elemento de la forma elemental abierta ó cerrada, respecto á una unidad. El capítulo VII tiene por objeto la forma de varias dimensiones, definiéndose la *magnitud extensiva* de una forma en la cual se considera la relación de posición prescindiéndose de la de igualdad ó desigualdad, y la *magnitud intensiva* ó *cantidad,* en la que se prescinde de dicha relación de posición.

En fin el capítulo VIII trata de los números reales, relativos y absolutos, positivos y negativos y en el IX se resumen algunas consideraciones sobre la forma fundamental.

La Geometría del Sr. Veronese consta de dos partes: La primera trata de *la recta, el plano y el espacio de tres dimensiones en el espacio general,* que consta de tres libros: 1.º *La recta y las figuras rectilíneas en general.* 2.º *El plano.* 3.º *El espacio de tres dimensiones.* La parte segunda trata del *espacio de cuatro y de* n *dimensiones en el espacio general,* completando la obra un Apéndice que constituye un interesantísio estudio histórico y crítico de los principios de la geometría.

Comienza la obra con los enunciados de los axiomas relativos á la *existencia de puntos distintos, la identidad de todos los puntos, á la existencia de un sistema de puntos de una dimensión idéntica en la posición de sus partes, determinado por dos de sus puntos y contínuo,* considerando la recta *simplemente cerrada ó abierta,* y varias propiedades de ésta enunciadas en algunos teoremas y corolarios, como por ejemplo, que *si la recta es abierta cualquiera de sus puntos la divide en dos partes iguales,* y que *dado un punto cualquiera sobre la recta, existen á lo menos dos puntos que con él determinan la recta, y á partir de un punto, en uno y otro sentido, infinitos segmentos iguales consecutivos cuyos extremos determinan la recta.*

Después de enunciar en el axioma II, *b* que: *existen puntos exteriores á la recta,* que *todo punto no perteneciente á la recta, determina con cada punto de ella otra recta,* define el segmento de dos puntos sobre la recta abierta y cerrada, definiendo enseguida los *puntos opuestos* de la recta cerrada ó que la dividen por mitad, y denominando rayo *(raggio)* á la recta recorrida en un sentido, de manera que una recta tiene dos rayos, según los dos sentidos en que puede recorrerse. Define asimismo el punto *límite* L de un grupo de puntos (X) ó de una serie de puntos (X_r) aquél tal, que en toda su contigüidad (intorno), de amplitud arbitrariamente pequeña, hay siempre un punto del grupo, entendiendo por contigüidad (intorno) de un punto A el campo de todos los segmentos rectilíneos que parten de A, iguales á un segmento cualquiera ε tan pequeño como se quiera y designando la distancia 2ε con la palabra *amplitud* de la contigüidad de A.

(Se continuará).

Z. G. DE G.

VARIEDADES

BIBLIOGRAFÍA

SYNOPSIS DER HOEHEREN MATHEMATIK, *von J. Hagen, S. J.*, director der Sternwarte des Georgetown College, Washington. — Erster band. *Arithemische und algebraische Analyse*, grand in-4° de 400 páginas. Berlin. L. Dames. 47. Tauben-Strasse. 1891. Precio 37 fr. 50.

Admiro que un sólo hombre haya tenido el valor de emprender un trabajo tan considerable. No se trataba evidentemente de escribir una obra desarrollada sobre el conjunto de las matemáticas superiores, Esto sería imposible; el campo es demasiado vasto y se dilata aún continuamente. Ya es mucho el ofrecernos un mapa detallado del país, con la *guía completa del viajero*.

El autor no da las demostraciones, sino tan sólo los enunciados y la forma de su encadenamiento. Es sumamente cómodo encontrar así reunidos todos los resultados. De esta manera los investigadores no se hallan expuestos á reinventar los antiguos descubrimientos, como ocurre incesantemente, y se enteran al mismo tiempo del sitio en que deben encontrar las minas no explotadas; porque el P. Hagen ha tenido la feliz idea de señalar los *desiderata* de cada teoría. En fin, el autor da sus numerosas noticias bibliográficas; habiéndose consagrado á verificar la exactitud de los textos originales.

La obra constará probablemente de cuatro tomos, que aparecerán anualmente. El tomo ya publicado contiene cinco divisiones principales: 1.° Teoría de los números (con las magnitudes complejas); 2.° Las series (con los productos infinitos y las fracciones continuas); 3.° Las funciones; 4.° Los determinantes (con los invariantes y las sustituciones); 5.° Teoría de las ecuaciones.

El tomo siguiente tratará de la Geometría analítica y sintética.

Las bibliotecas importantes tienen interés en procurarse un repertorio tan completo.—*A. Poulain.*

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS APROXIMADOS Y OPERACIONES ABREVIADAS, *por G. Fernandez de Prado y R. Alvarez Sereix.*—Uno de los asuntos que más dificultades ofrece á los aspirantes al ingreso en las Escuelas y Academias especiales, es, sin duda alguna, el que trata la nueva obra de los Sres. Fernandez de Prado y Alvarez Sereix, pues, aparte del esfuerzo individual que exige el dominar la materia en su conjunto, con perfecta distinción de los varios detalles que deben tenerse presentes, no siempre en los libros de texto se atenúa, con la acertada disposición y fácil enunciado de las proposiciones, algo de lo abstruso del asunto.

El principal objeto de dichos señores ha sido el allanar en cierto modo los obstáculos, reduciendo el número de enunciados á los más precisos, procurando facilitar un trabajo de concentración en vez de dispersar las fuerzas del lector en multitud de proposiciones incidentales. Así es que se formula, para cada una de las operaciones fundamentales, un solo enunciado ó dos á lo más, que abarcando todos los casos particulares dignos de tomarse en consideración, permitan resolver inmediatamente una y otra de las dos cuestiones llamadas directa é inversa, y excepción hecha de los dos teoremas que sirven para pasar de un límite del error absoluto á otro del error relativo, y recíprocamente, han omitido, por considerarlos innecesarios, todos aquéllos en que entran explícitamente dichos errores relativos. La obra consta de dos capítulos. El primero trata de errores absolutos y relativos; el segundo de las operaciones abreviadas.

NECROLOGIA

L. Kronecker.—Recientemente la ciencia matemática ha perdido uno de sus grandes maestros.

El ilustre profesor de la Universidad de Berlín, miembro de la Academia de Ciencias de esta capital y del Instituto de Francia, falleció el día 29 de Diciembre de 1891, á la edad de 68 años.

En el periódico belga *Mathesis*, los Sres. Mansion y Neuberg publican la siguiente reseña necrológica:

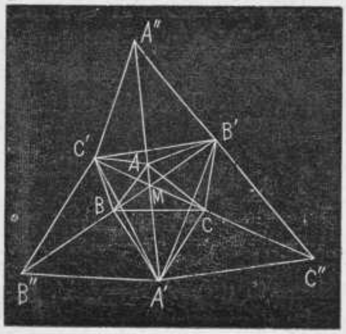
"L. Kronecker era sin duda alguna el más eminente representante de los métodos aritméticos puros en el dominio del análisis algebráico é infinitesimal.

Su *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, sus escritos sobre los principios fundamentales de la aritmética y del análisis superiores, y, en particular, sus investigaciones sobre la multiplicación compleja de las funciones elípticas, tendrán, sin duda alguna, una influencia siempre creciente en el dominio de las matemáticas.

Las principales memorias de L. Kronecker se han publicado en en *Journal de Crelle*, en los *Bulletins* de la Academia de Berlín y los *Comptes rendus* de la Academia de Ciencias de París. El número 28 de Diciembre de 1891 de esta última colección contiene una importante nota del mismo sobre una cuestión difícil. Nuestros lectores han podido formarse una idea del rigor que exigía en las demostraciones matemáticas, leyendo sus observaciones sobre el segundo principio de la media, que se dignó insertar en *Mathesis* (1885, t. V, pp. 97-102).„

SOLUCIONES Á LAS CUESTIONES PROPUESTAS

Cuestión núm. 34 (Véase t. I, pág. 295)



Sobre los tres lados de un triángulo ABC, *se construyen exterior ó interiormente los triángulos equiláteros* BA'C, CB'A, AC'B; *además, sobre los tres lados del triángulo* A'B'C' *se construyen, exterior ó interiormente, los triángulos equiláteros* B'A"C', C'B"A', A'C'B".

Demostrar que los puntos A, B, C *son respectivamente los medios de las rectas* A'A", B'B", C'C".

(N. C. M.) *(H. Van Aubel).*

Solución por D. Angel Bozal, alumno de la Universidad de Zaragoza.

Dos casos ocurren, según que los triángulos equiláteros del enunciado se construyen exterior ó interiormente con respecto á los lados del triángulo ABC y A'B'C' que les sirven de base.

Primer caso. Sea el triángulo ABC y los triángulos equiláteros BA'C, CB'A, AC'B construídos exteriormente sobre cada uno de sus lados.

Tracemos las rectas BB' y CC' que se cortan en un punto M, y unamos A y A' con M. Vamos á demostrar que los tres puntos A, M, A' están en línea recta.

En efecto, los triángulos BAB' y CAC' son iguales, porque tienen dos lados iguales comprendidos entre los ángulos iguales BAB' y CAC'; luego

$$\angle AC'C = \angle ABB' \text{ y } \angle AB'B = \angle ACC';$$

por consiguiente los cuadriláteros B'AMC y C'AMB son inscriptibles; luego

$$\angle C'MB = \angle C'AB = 60^\circ \qquad \angle B'MC = \angle B'AC = 60^\circ$$

$$\angle AMC' = \angle ABC' = 60^\circ, \qquad \angle AMB' = ACB' = 60^\circ.$$

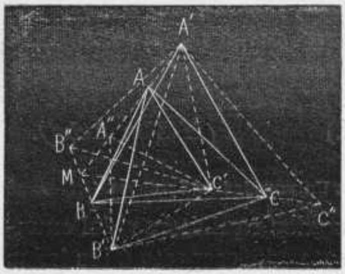
Por consiguiente, el ángulo BMC vale 120°, y por ser suplemento del ángulo BA'C, el cuadrilátero MBA'C es inscriptible; luego los ángulos BMA' y CMA' son tambien de 60°; luego MA es prolongación de MA.

Además, por iguales los triángulos BAB' y CAC', resulta que BB' = CC'; y por ser iguales tambien los triángulos ACA' y BCB', resulta que AA' = BB'; luego AA' = BB' = CC'.

Construyamos ahora, exteriormente sobre A'B', B'C', C'A; otros tres triángulos equiláteros.

Se ve inmediatamente que, por ser los tres ángulos A'MB', B'MC', C'MA' de 120°, los cuadriláteros MA'C"B', MB'A"C', MC'B"A' son inscriptibles; luego los ángulos A'MC", B'MA", C'MB" son de 60°, luego las direcciones de las rectas MA" y MA, MB" y MB, MC" y MC son las mismas, es decir que A', A y A"; B', B y B"; C, C' y C" están en línea recta.

Por último, los triángulos A"AB' y C'B'C son iguales, pues tienen



A"B'=C'B', AB'=B'C, ∠A"B'A=∠C'B'C

Luego A"A=CC', y como CC'=AA', resulta finalmente que A"A=AA', según se deseaba demostrar.

Segundo caso. Aplicando el mismo razonamiento á la figura adjunta, resulta demostrada la misma propiedad del enunciado para el segundo caso.

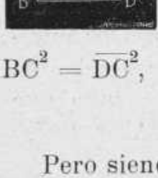
Cuestión núm. 47 (Véase t. II, pág. 32)

Sean* a *una de las alturas iguales de un triángulo isósceles,* l, l_1 *los dos segmentos aditivos ó sustractivos en que la perpendicular considerada divide al lado correspondiente (siendo* l *el contado á partir de la base); demostrar que se verifica la relación.

$$l^2 \pm 2ll_1 = a^2$$

(J. J. Durán Loriga).

Solución por D. Angel Bozal, alumno de la Universidad de Zaragoza



Dos casos hay que distinguir en la cuestión, según que los segmentos l y l_1 sean aditivos ó sustractivos.

Primer caso. Sea DBC el triángulo dado. Se tiene que

$$BC = BM + MC,$$

y elevando al cuadrado, resulta

$$\overline{BC}^2 = (BM + MC)^2 = \overline{BM}^2 + 2\,BM.MC + \overline{MC}^2,$$

ó sea

$$\overline{BC}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{MC}^2 + 2\,BM.MC,$$

y como, por ser isósceles el triángulo, se tiene que $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2$, resulta

$$\overline{DC}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{MC}^2 + 2\,BM.MC$$

Pero siendo DCM un triángulo rectángulo, se tiene

$$\overline{DC}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{DM}^2, \text{ luego } \overline{DM}^2 = \overline{BM}^2 + 2\ BM.MC$$

Segundo caso. Si la altura DM cae en la prolongación de BC (1), se partirá de la relación, BC = MB − MC, y se llegará, empleando el mismo razonamiento, á la fórmula del enunciado (2).

Solución á la *Cuestión núm. 47*, por D. Jovino López y Rua, aspirante al ingreso en la Academia general militar

Se tiene que demostrar que $a^2 = l^2 \pm 2l.\,l_1$, para lo cual consideraremos los dos casos siguientes:

Caso en el que el ángulo en el vértice es agudo. En el triángulo rectángulo BMD se verifica $a^2 = \overline{BD}^2 - l^2$; pero $\overline{BD}^2$, en el triángulo BCD, es $(l+l_1)^2 + (l+l_1)^2 - 2(l+l_1).l_1 = l^2 + 2l.l_1 + l_1^2 + l^2 + 2l.l_1 + l_1^2 - 2l.l_1 - 2l_1^2 = 2l^2 + 2l.l_1$; luego si sustituimos en la primera igualdad, en vez de $\overline{BD}^2$ su valor, tendremos $a^2 = 2l^2 + 2l.l_1 - l^2 = l^2 + 2l.l_1$.

Caso en el que el ángulo en el vértice es obtuso. En el triángulo rectángulo CMD se verifica

$$a = (l - l_1)^2 - l_1^2 = l^2 - 2l.l_1 + l_1^2 - l_1^2 = l^2 - 2l.l_1.$$

Solución por D. Rodolpho Guimaraes, oficial de ingenieros (3)

Sea $\qquad a = MC = BN, \quad BM = l, \quad AM = l_1.$

Aplicando el teorema de Stewart (4) al triángulo ABC, tenemos

$$\overline{AC}^2 . l + \overline{BC}^2 . l_1 = (l + l_1)(a^2 + l.l_1)$$

ó

$$(l + l_1)^2 . l + \overline{BC}^2 . l_1 = (l + l_1)(a^2 + l.l_1),$$

por consiguiente,

$$\overline{BC}^2 = \frac{l + l_1}{l_1}(a^2 - l^2) \qquad (1)$$

---

(1) El lector puede representarse un triángulo isósceles cuyo ángulo C sea obstuso

(2) La solución que nos remitió el Sr. Durán Loriga es la siguiente:

Tomando, á partir de C, una longitud CE = BC; considerando la circunferencia cuyo diámetro es BE, resulta inmediatamente

$$a^2 = l\,(l + l_1 + l_1) = l\,(l + 2l_1) = l^2 + 2l.l_1$$

(3) El lector puede considerar trazado un triángulo isósceles cuyo vértice es A, y cuyas tres alturas son AD, BN, CM, designando con l y l_1 los segmentos BN y AM determinados en AB por la altura CM.

(4) *Teorema de Stewart. Si se divide la base de un triángulo en dos segmentos por una recta cualquiera trazada por el vértice, la suma de los dos lados multiplicados respectivamente por el segmento no adyacente, es igual á la base multiplicada por el cuadrado de la recta aumentada en el rectángulo de los dos segmentos.*

Por ejemplo, en el triángulo BCD cuyo vértice es D y la recta trazada por D es DE, se tiene

$$\overline{DB}^2 . EC + \overline{DC}^2 . EB = BC\,(\overline{AM}^2 + BM\,.\,MC).$$

Lo que se demuestra trazando la altura DM y sumando las expresiones de $\overline{DB}^2$ y $\overline{DC}^2$ en los triángulos DEB, DEC.—(Z. G. de G.)

Pero los triángulos CMB y BDA son semejantes; luego

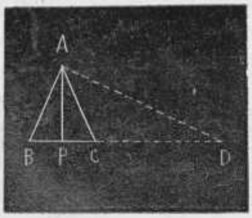
$$\frac{\text{BD ó } \frac{1}{2}\text{ BC}}{l+l_1} = \frac{l}{\text{BC}};$$

luego $$\overline{\text{BC}}^2 = 2l(l+l_1),$$

y sustituyendo en (1), resulta (*) $a^2 = l^2 + 2\, l.l_1$

Si a, altura BN=CM cae fuera de los lados AB=AC, tenemos que AB=AC=$l-l_1$, y aplicando el teorema de Stewart al triángulo BCM, y siguiendo el mismo método, resulta $a^2 = l^2 - 2\, l.l_1$.

Solución al *Problema num. 48*, por D. Carlos de Codes é Illescas, aspirante al ingreso en la Academia general militar



En el triángulo ABC (**) se verifica,

$$b^2 = 2a^2 - 2a \times \text{BE} \qquad (1)$$

Tracemos la perpendicular CE. Se tendrá: ángulo BCE = ángulo EBC, por tanto, BE = CE. Sustituyendo en (1) se tendrá $b^2 = 2a^2 - 2a \times \times \text{CE}$ y $2a \times \text{CE} = 2a^2 - b^2$ ó $a \times \text{CE} = a^2 - \frac{b^2}{2} = a^2 - 2.\frac{b^2}{4} = a^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}$; ahora bien, $a \times \text{CE}$ es el doble del área del triángulo ABC, pero como $h \times b$ indica lo mismo, puedo sustituir una por otra, y en vez de $a^2 - \frac{b}{4}$ también puedo poner h^2, y tendré, en resumen, $hb = h^2 - \frac{b^2}{4}$, de donde $4hb = 4h^2 - b^2$, $b^2 = 4h^2 - 4hb = 4h(h-b)$, que es lo que debía demostrarse.

Nota.—En el número próximo se publicarán las soluciones remitidas por los Sres. Roca y Caro á la cuestión 48 y algunas de las anunciadas en el número 1.

(*) O theorema de Stewart é susceptivel de muitas aplicaçoes e d'elle tireu M. Thiry um grande partido, publicando um importante fascículo *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre.* (Gand, 1891) (Nota del Sr. Guimaraes).

(**) El triángulo considerado es el ABC cuyo vértice es B, siendo BA=BC=a y AC=b, suponiéndose trazadas las alturas BD y CE.

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos