Año II  Zaragoza 15 Octubre de 1892  Núm. 22

# El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

## INTRODUCTION AUX MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES DE H. GRASSMANN

PAR M. VICTOR SCHLEGEL

**Profeseur à l'Ecole Technique de Hagen i/W**

### I.—Addition et soustraction géométrique de points et de distances (Strecken).

**I.** Soient $e_1$ et $e_2$ deux points quelconques d'une droite, alors la *distance* de ces points (Strecke) est représentée par la différence $(e_1-e_2)$ ou $(e_2-e_1)$, selon que le segment $(e_1\, e_2)$ tire son origine du mouvement de $e_2$ ou de $e_1$. Donc la distance est déterminée simultanément à l'égard de *longueur* et de *direction*.—Quant à la *position*, elle est arbitraire; car, si $(e_1-e_2)$ et $(e_3-e_4)$ sont deux distances égales et parallèles, on a

$$(e_1-e_2)=(e_3-e_4),$$

d'où il suit:

$$(e_1-e_3)=(e_2-e_4),$$

propriété connue du parallélogramme.

On a aussi identiquement:

$$(e_1-e_2)+(e_2-e_4)=(e_1-e_4),$$

ce qui caractérise l'*addition géométrique de distances quelconques* ou *l'équivalence de deux forces avec leur résultante.*

Soit P un point quelconque situé entre $e_1$ et $e_2$, et soit le rapport

$$(1)\qquad \frac{e_1-\mathrm{P}}{\mathrm{P}-e_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1},$$

où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont deux nombres. On en tire:

$$(2)\qquad (\alpha_1+\alpha_2)\,\mathrm{P}=\alpha_1\, e_1+\alpha_2\, e_2,\ \text{ou}\ \mathrm{P}\equiv\alpha_1\, e_1+\alpha_2\, e_2.$$

Et on dit alors que le point P est *dérivé* des points $e_1$ et $e_2$ au moyen des nombres $\alpha_1$ et $\alpha_2$, qu'on peut regarder comme une espèce de coordonnées homogènes du point P.

Si P est situé sur la droite $e_1 e_2$ hors du segment $(e_1 é e_2)$, l'un ou l'autre de ces nombres est négatif.

**2.** Un autre point $Q_2$ soit déterminé par l'équation:

$$(3) \qquad \frac{e_1 - Q}{Q - e_2} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}, \text{ ou } \frac{e_1 - Q}{e_2 - Q} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

ou

$$(4) \qquad (\alpha_1 - \alpha_2)\, Q = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$$

En comparant les équation (1) et (3) on trouve que les points (P, Q) sont harmoniques par rapport à $(e_1, e_2)$.

Donc les équations (2) et (4) expriment ensemble la *relation harmonique* entre quatre points.—Si $\alpha_2 = \alpha_1$, on tire de (2):

$$(5) \qquad P = \frac{e_1 + e_2}{2},$$

es P est le centre du segment $(e_1 e_2)$. En outre on tire de (4):

$$(6) \qquad 0.\, Q = (e_1 - e_2);$$

cela veut dire que la distance $(e_1 - e_2)$ est équivalente au point infini de la droite $e_1 e_2$, et que le point infini est un point chargé du coefficient 0.

Si
$$(e_1 - e_2) = (e_3 - e_4),$$

on a:
$$e_1 + e_4 = e_2 + e_3, \text{ ou } \frac{e_1 + e_4}{2} = \frac{e_2 + e_3}{2},$$

ce qui exprime une propriété connue du parallélogramme.

**3.** Soient $e_1$, $e_2$, $e_3$ trois points quelconques d'un plan, et P un point quelconque situé dans le triangle $(e_1 e_2 e_3)$; soit en outre $P_3$ le point d'intersection des droites $e_1 e_2$ et $Pe_3$; alors on peut dériver $P_3$ de $e_1$ et $e_2$ au moyen de l'équation

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\, P_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

et P de $P_3$ et $e_3$ au moyen de l'équation

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, P = (\alpha_1 + \alpha_2)\, P_3 + \alpha_3 e_3;$$

par conséquent:

(7) $$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) P = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

ou $$P \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Et on dit que le point P est *dérivé* des points $e_1$, $e_2$, $e_3$ au moyen des nombres $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, coordonnées homogènes du point P [1].—Si P est situé sur le plan $e_1 e_2 e_3$, mais hors du triangle $(e_1 e_2 e_3)$, l'un ou l'autre de ces nombres est négatif.

De même on peut dériver dans l'espace un point P de quatre points $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$, formant les sommets d'un tétraèdre.

**4.** Application.— Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$ les points d'intersection correspondants des droites: $e_2 e_3$ et $Pe_1$, $e_3 e_1$ et $Pe_2$, $e_1 e_2$ et $P_3$. Alors il suit de (7):

(8) $$\begin{cases} P_1 \equiv P - \alpha_1 e_1 \equiv \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ P_2 \equiv P - \alpha_2 e_2 \equiv \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1 \\ P_3 \equiv P - \alpha_3 e_3 \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \end{cases}$$

parce que (par exemple) $P_1$ est le point qui peut être dérivé simultanément des points $(P, e_1)$ et $(e_2, e_3)$.

Ensuite soient $A_1$, $A_2$, $A_3$ les points d'interséction correspondants des droites: $e_2 e_3$ et $P_2 P_3$, $e_3 e_1$ et $P_3 P_1$, $e_1 e_2$ et $P_1 P_2$. Alors on aura:

(9) $$\begin{cases} A_1 \equiv P_2 - P_3 \equiv \alpha_3 e_3 - \alpha_2 e_2 \\ A_2 \equiv P_3 - P_1 \equiv \alpha_1 e_1 - \alpha_3 e_3 \\ A_3 \equiv P_1 - P_2 \equiv \alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1 \end{cases}$$

En comparant les équations (8) et (9) on trouve que les couples $(A_1, P_1)$ et $(e_2, e_3)$; $(A_2, P_2)$ et $(e_3, e_1)$; $(A_3, P_3)$ et $(e_1, e_2)$ sont *conjugués harmoniquement*.— En outre on a

(10) $$A_1 + A_2 + A_3 \equiv 0;$$

cela veut dire que chacun de ces trois points peut être dérivé des deux autres, ou que les trois points sont situés sur la même droite $(p)$.— Nous appelons la droite $p$ *conjuguée au point* P *par rapport au triangle* $(e_1 e_2 e_3)$. [2] Et nous appelons $(P_1 P_2 P_3)$ le *triangle basal par rapport au point* P.

Soit P' un autre point quelconque. En ajoutant le trait à chaque lettre contenue dans les équations (7), (8), (9), excepté $e_1$, $e_2$, $e_3$, on

(1) Sur le sens géométrique de ces coordonnées voir núm. 7.

(2) Kindel, Eine reciproke Zuordnung der räumlichen Elemente. Programm des Köln. Gymn. Berlin 1887.

obtient trois équations correspondantes (7'), (8'), (9'), attachées au point P'.

Or, en éliminant par exemple $e_2$ entre les équations

$$P_3 \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \text{ et } P_1' \equiv \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3,$$

on obtient, après avoir introduit le point $B_2$:

$$B_2 \equiv \alpha_2' P_3 - \alpha_2 P_1' \equiv \alpha_1 \alpha_2' e_1 - \alpha_2 \alpha_3' e_3. \tag{11}$$

En éliminant de même $e_2$ entre

$$A_3 \equiv \alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1 \text{ et } A_1' \equiv \alpha_3' e_3 - \alpha_2 e_2,$$

on trouve:

$$\alpha_2' A_3 + \alpha_2 A_1' \equiv \alpha_2 \alpha_3' e_3 - \alpha_1 \alpha_2' e_1, \tag{12}$$

et en additionant (11) et (12):

$$B_2 + \alpha'_2 A_3 + \alpha_2 A_1' \equiv 0, \tag{13}$$

ce qui veut dire que les points $B_2$, $A_3$, $A_1'$ sont situés sur la même droite.

On a donc le théorème: *Si l'on construit dans un triangle* ($e_1$, $e_2$, $e_3$) *les triangles basaux par rapport à deux points* (P *et* P'), *alors sont situés sur une droite:* 1) *le point d'intersection* ($A_3$) *d'une arête* ($e_1$ $e_2$) *et de l'arête correspondante* ($P_1$ $P_2$) *du premier triangle basal* ($P_1$ $P_2$ $P_3$); 2) *le point d'intersection* ($A_1'$) *d'une autre arête* ($e_2$ $e_3$) *et de l'arête correspondante* ($P_2'$ $P_3'$) *de l'autre triangle basal* ($P_1'$ $P_3'$ $P_2'$); 3) *le point d'intersection* ($B_2$) *de la troisième arête* ($e_3$ $e_1$) *et de la ligne joignant les deux sommets restants* ($P_3$ $P_1'$) *des triangles basaux.*

Or, coïncident les droites: $e_1$ $e_2$ et $P_3$ $P_3'$; $e_2$ $e_3$ et $P_1$ $P_1'$; $e_3$ $e_1$ et $P_2$ $P_2'$. Donc il suit du theorème précédent que les points d'intersection de

$$P_1 P_2 \text{ et } P_3 P_3'; \quad P_2' P_3' \text{ et } P_1' P_1; \quad P_3 P_1' \text{ et } P_2 P_2'$$

sont situés sur la même droite. Par conséquent les triangles ($P_1$ $P_2$ $P_3$) et ($P_1'$ $P_2'$ $P_3'$) font ensemble un hexagone de Pascal ($P_1 P_2 P_2' P_3' P_3 P_1'$), et on a le théorème:

*Les six sommets de deux triangles basaux inscrits au même triangle donné sont situés sur une conique.*

### II.— Multiplication extérieure.

**5.** Soient $e_1$ et $e_2$ deux points quelconques d'une droite, alors le *segment de droite* (Linientheil), compris entre $e_1$ et $e_2$, est représenté par le *produit extérieur* $(e_1\, e_2)$, mis en parenthèses, pour le distinguer du produit algébrique.

Alors on a évidemment

(14) $$(e_1\, e_1)=(e_2\, e_2)=0.$$

Soient $a$ et $b$ deux points dérivés de $e_1$ et $e_2$ au moyen des équations

(15) $$a\equiv\alpha_1\, e_1+\alpha_2\, e_2\,;\quad b\equiv\beta_1\, e_1+\beta_2\, e_2.$$

Formons le produit extérieur de ces équations, en supposant seulement que la multiplication extérieure suive la loi distributive. Alors il vient:

$$(ab)\equiv\alpha_1\,\beta_1\,(e_1\, e_1)+\alpha_1\,\beta_2\,(e_1\, e_2)+\alpha_2\,\beta_1\,(e_2\, e_1)+\alpha_2\,\beta_2\,(e_2\, e_1)$$

ou, eu regardà (14)

(16) $$(ab)\equiv\alpha_1\,\beta_2\,(e_1\, e_2)+\alpha_2\,\beta_1\,(e_2\, e_1).$$

Alors il faut distinguer deux cas.

1) Si $a$ et $b$ sont des points coïncidants, il faut qu'on aie:

$$a=\lambda b\,,$$

où $\lambda$ est un facteur numérique.

Donc en regardant (15):

$$\alpha_1\, e_1+\alpha_2\, e_2=\lambda\,\beta_1\, e_1+\lambda\,\beta_2\, e_2\,,$$

ou

$$(\alpha_1-\lambda\,\beta_1)\, e_1=(\lambda\,\beta_2-\alpha_2)\, e_2\,.$$

Mais, comme les points $e_1$ et $e_2$ ne coïncident pas, il faut qu'on aie

$$\alpha_1=\lambda\,\beta_1\,;\quad \alpha_2=\lambda\,\beta_2\,,$$

donc d'après (16)

$$(ab)\equiv\lambda\,\beta_1\,\beta_2\,[(e_1\, e_2)+(e_2\, e_1)].$$

ou, suivant la relation (14):

$$0=(e_1\, e_2)+(e_2\, e_1)\,,$$

ou

(17) $$(e_1\, e_2)=-(e_2\, e_1)\,.$$

Par cela on voit que la multiplication extérieure ne suit pas la loi commutative, ce qui est caractéristique pour ce genre de multiplication.

2) Si $a$ et $b$ ne coïncident pas, on déduit de (16) et (17),

$$(ab)=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(e_1e_2). \tag{18}$$

Donc le produit extérieur de deux points quelconques, dérivé de $e_1$ et $e_2$, est un multiple du segment $(e_1 e_2)$.

**6.** Soient $(e_1 e_2)$ et $(e_3 e_4)$ deux segments quelconques, égaux et parallèles, alors l'aire du parallélogramme $e_1 e_2 e_3 e_4$ est représentée par la différence $(e_1 e_2)-(e_3 e_4)$ ou $(e_3 e_4)-(e_1 e_2)$, selon que le parallélogramme tire son origine du mouvement de $(e_3 e_4)$ ou de $(e_1 e_2)$.—Le parallélogramme est déterminé à l'égard de grandeur et de „côté" (Seite) [1], mais non pas à l'égard de position.

Soit

$$a=(e_1-e_2),\quad b=(e_2-e_4);$$

alors on obtient en multipliant:

$$(ab)=(e_1 e_2)-(e_1-e_2)e_4,$$

ou, comme

$$(e_1-e_2)=(e_3-e_4),$$

$$(ab)=(e_1 e_2)-(e_3 e_4). \tag{19}$$

Donc *le produit extérieur de deux distances contigues est égal à l'aire du parallélogramme que l'on en peut former.*

Cette aire s'évanouit, si les deux distances sont situés dans la même droite. Donc:

*Le produit exterieur de deux distances situes sur la même droite est égal à zéro.*

Pour que deux *distances* soient égales, il suffit qu'elles soient égales en longueur et direction; quant aux *segments de droite*, il faut encore qu'ils soient situés sur la même droite.— Donc on voit que la notion de „segment de droite" est attachée à la position de l'un de ses sommets, tandis que la notion de „distance" en est indépendante.

**7.** Soient $e_1 e_2 e_3$ trois points quelconques d'un plan, et soit

$$(e_1-e_2)=(e_3-e_4),$$

(1) Il faut distinguer les deux côtés d'un plan de même que les deux directions d'une droite.

alors le *segment de plan,* formé par un parallélogramme compris entre les segments $(e_1\, e_2)$ et $(e_3\, e_4)$ est réprésenté par le produit extérieur $(e_1\, e_2\, e_3)$.

Si les points $e_1\, e_2\, e_3$ sont situés sur la même droite, on a évidemment

$$(e_1\, e_2\, e_3) = 0. \tag{20}$$

Supposons encore que la multiplication extérieure soit soumise à la loi associative.

$$[e_1\, (e_2\, e_3)] = [(e_1\, e_2)\, e_3] = (e_1\, e_2\, e_3). \tag{21}$$

Alors on peut dire: *Le produit d'un point et d'un segment de droite est égal au segment de plan, formé à l'aide du point et du segment de droite. Ce produit s'évanouit, si le point est situé sur la droite.*

Pour que deux parallélogrammes soient égaux, il suffit qu'ils soient égaux en grandeur et côté; quant aux segments de plan, il faut encore qu'ils soient situés dans le même plan.

Si l'on multiplie l'equation (7) $P \equiv \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \alpha_3\, e_3$ par $(e_3\, e_3)$ on trouve:

$$(P\, e_2\, e_3) \equiv \alpha_1\, (e_1\, e_2\, e_3),$$

ou, en posant $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ :

$$(P\, e_2\, e_3) = \alpha_1\, (e_1\, e_2\, e_3),$$

ou

$$\alpha_1 = \frac{(P e_2\, e_3)}{(e_1\, e_2\, e_3)}. \tag{22}$$

Donc on voit que la coordonnée $\alpha_1$ du point P n'est autre chose que le rapport des aires des triangles $(P\, e_2\, e_3)$ et $(e_1\, e_2\, e_3)$, et qu'il en est de même à l'égard des autres coordonnées.

Ajoutons encore ce fait remarquable. Si

$$a \equiv \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \alpha_3\, e_3,$$
$$b \equiv \beta_1\, e_1 + \beta_2\, e_2 + \beta_3\, e_3,$$
$$c \equiv \gamma_1\, e_1 + \gamma_2\, e_2 + \gamma_3\, e_3,$$

et

$$(e_1\, e_2\, e_3) = 1,$$

alors on a

$$(a\, b\, c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

En formant le produit $(abc)$ il faut encore remarquer que des équations (17) et (21) découlent les suivantes:

$$(22a) \qquad \begin{aligned} &+ (e_1\, e_2\, e_3) = - (e_2\, e_1\, e_3) = + (e_3\, e_1\, e_2) \\ &= - (e_1\, e_3\, e_2) = + (e_2\, e_3\, e_1) = - (e_3\, e_2\, e_1). \end{aligned}$$

Généralement on peut dire: *Si les* n *quantités* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sont dérivées des unités* $e_1, e_2, \ldots e_n$ *au moyen des facteurs:* $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{2n}; \ldots; \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}$, *et si l'on pose* $(e_1\, e_2 \ldots e_n) = 1$, *alors le produit extérieur* $(a_1\, a_2 \ldots a_n)$ *équivaut, au déterminant formé des* $n^2$ *facteurs* $a_{11}, \ldots a_{nn}$.

**8.** *Application.*—Appliquons nos réflexions aux suppositions du n.º 4.— On trouve, par la multiplication exterieure, les lignes suivantes en forme de segments de droite.

1) Les arêtes du triangle donné: $(e_1\, e_2)$, $(e_2\, e_3)$, $(e_3\, e_1)$.

2) Les arêtes d'un triangle basal $(P_1\, P_2\, P_3)$, par ex:

$$(23) \qquad (P_1\, P_2) \equiv \alpha_2\, \alpha_3\, (e_2\, e_3) + \alpha_3\, \alpha_1\, (e_3\, e_1) - \alpha_1\, \alpha_2\, (e_1\, e_2).$$

3) La droite $p$ conjuguée au point P, par exemple sous la forme

$$(24) \qquad p = (A_1\, A_2) \equiv \alpha_2\, \alpha_3\, (e_2\, e_3) - \alpha_3\, \alpha_1\, (e_3\, e_1 - \alpha_1\, \alpha_2)\, (e_1\, e_2).$$

*Remarque.*— On trouve sans difficulté les équations de ces droites en coordonnées homogènes.— En effet, soit $x$ un point variable, dérivé de $e_1\, e_2\, e_3$ au moyen des variables $x_1\, x_2\, x_3$, de sorte que:

$$(25) \qquad x \equiv x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3.$$

Alors on obtient l'équation d'une droite $\xi$, en égalant à zéro le le produit extérieur $(x\,\xi)$ ou $(\xi\, x)$. Car l'équation

$$(26) \qquad (x\,\xi) = 0$$

exprime le fait que le point variable $x$ est situé toujours sur la droite $\xi$ (voir n.º 7). Seulement il faut encore poser

$$(27) \qquad (e_1\, e_2\, e_3) = 1,$$

pour obtenir une équation complètement numérique.

Ainsi l'équation de la droite $e_1\, e_2$ est

$$(x\, e_1\, e_2) = 0,$$

ou, eu regard à (25), (17) et (27):

$$x_3 = 0.$$

*(Se continuará).*

## CUESTIONES RESUELTAS

*Cuestión núm. 2* (Véase t. I, pág. 206).

*Hallar el lugar del punto de contacto de las tangentes paralelas á una dirección dada, á una serie de elipses ó de hipérbolas homofocales.*
*(N. C. M.)* *(Nicolaides)*

Solución por el Sr. Sollertinsky.

El lugar buscado es una hipérbola equilátera. Esto es una consecuencia bastante conocida del teorema siguiente, debido á Newton (1).

*Permaneciendo fijo el lado* BC *de un triángulo* ABC, *si las bisectrices del ángulo opuesto conservan sus direcciones, el vértice* A *del triángulo describe una hipérbola equilátera que tiene* BC *por diámetro. Las asíntotas de esta hipérbola son paralelas á las direcciones de las bisectrices del ángulo* BAC.

Tracemos por B, C las paralelas BB′, CC′ á la bisectriz AD del ángulo BAC.

En cualquiera posición del punto A se debe tener $\angle B'BA = \angle ACC'$. Siendo así los haces B(A), C(A) simétricamente iguales, el lugar del punto A es una cónica. Las rectas BB′ y CC′, así como sus perpendiculares, siendo los rayos homólogos de los haces, la cónica tiene dos puntos en el infinito, en direcciones perpendiculares. Es, por consiguiente, una hipérbola equilátera, cuyas asíntotas son paralelas á dichas direcciones.

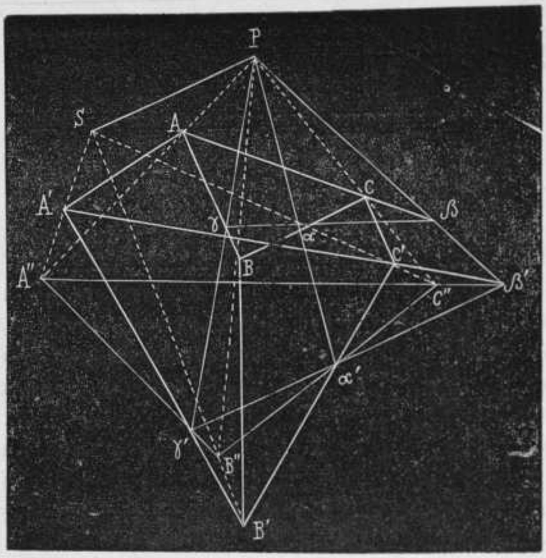
Sea A′ el simétrico de A con relación al medio M de BC. Siendo el cuadrilátero ABA′C un paralelógramo, las bisectrices de los ángulos A, A′ son respectivamente paralelas; el punto A′ pertenece, pues, á la curva. Por consiguiente, el punto M es el centro de la hipérbola.

*Observación.*— En el triángulo BAC: 1.º Los lados BA, CA giran alrededor de los puntos B, C con la misma velocidad angular; pero en sentido contrario; de aquí: 2.º La diferencia de los ángulos B, C permanece invariable; luego: 3.º La tangente en A al círculo ABC conserva su dirección, resultando de aquí otros tres enunciados del teorema.

*Cuestión núm. 3* (Véase t. I, pág. 207).

*Sean* ABC, A′B′C′ *dos triángulos situados de una manera cualquiera en el espacio. El lugar de un punto* P *tal, que las tres rectas trazadas por*

(1) Según M. Ch. Taylor *An introduction to the ancient and modern Geometry of Conics* 1881, p. 172. El enunciado está alterado.




P, *apoyándose respectivamente en los pares de rectas* (AB, A′B′), (BC, B′C′), (CA, C′A′) *se hallan situadas en un mismo plano, es el hiperboloide que pasa por las rectas* AA′, BB′, CC′.

N. C. M. *(J. Neuberg)*.

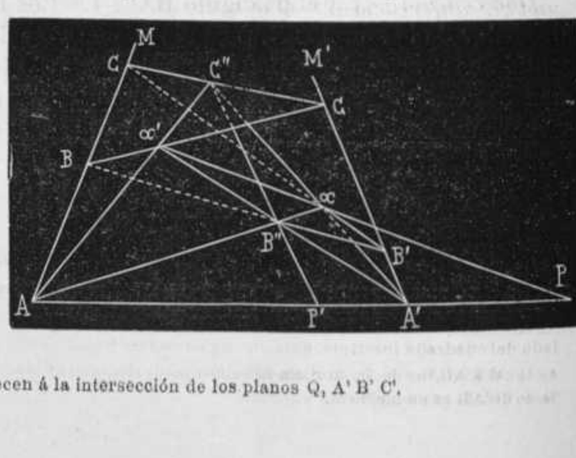
**Solución**
**por el Sr. Sollertinky.**

Sean $P\alpha\alpha'$, $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ estas tres rectas situadas en el mismo plano Q. Proyectemos el triángulo ABC, desde el punto P, sobre el plano A′B′C′, y sea A″B″C″ esta proyección.

Hallándose en una misma recta los puntos de intersección $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ de los lados homólogos de los triángulos A′B′C′ y A″B″C″ (1), estos triángulos son homológicos. Las rectas A′A″, B′B″, C′C″ concurren, pues, en un punto S.

Por consiguiente, los tres planos PAA′, PBB′, PCC′ pasan por una misma recta PS. De otro modo, la recta PS se apoya constantemente sobre tres rectas fijas AA′, BB′, CC′. Engendra, pues, una superficie reglada de segundo orden.

Esta superficie es un hiperboloide de una hoja, á menos que las rectas AA′, BB′, CC′, no sean paralelas á un mismo plano. Entonces la superficie es un paraboloide hiperbólico.




*Cuestión n.º 4* (V. t. I, p. 207).

*Si por um punto fijo* P, *tomado en un hiperboloidereglado, se trazan rectas que se apoyan en las diagonales de los cua-*

(1) $\alpha'$, $\beta'$; $\gamma'$ pertenecen á la intersección de los planos Q, A′ B′ C′.

*driláteros que forman dos generatrices fijas del primer sistema con dos generatrices variables del segundo, estas rectas se hallan situadas en un mismo plano.*

M. C. M. *(J. Neuberg).*

Solución por el Sr. Sollertinsky.

Sean: PAA′ la generatriz del segundo sistema que pasa por P; A, A′ sus puntos de intersección con las generatrices fijas AM, A′M′ del primer sistema; P′ el conjugado armónico de P con relación á AA′; BB′, CC′ dos generatrices variables del mismo sistema que AA′.

El plano Q, tangente en P′ á la superficie, encontrará á BB′, CC′ en puntos B″, C″ que se hallan situados sobre la otra generatriz que pasa por P′.

Sean $\alpha$, $\alpha'$ los puntos en que el plano Q encuentra á B′C, BC′. La recta AB″, como intersección de los planos Q, ACB′ pasa por $\alpha$, así como la recta A′C″ que es la intersección de los planos Q, ACC′. Asimismo las rectas AC″, A′B″ concurren en el punto $\alpha'$.

Pero dos diagonales C″B″, $\alpha'\alpha$ de un cuadrilátero plano $\alpha$C″$\alpha'$B″ dividen armónicamente á la tercera diagonal AA′. La recta C″B″ pasa por P; luego la recta $\alpha'\alpha$ pasa por P.

Así, todas las rectas P$\alpha\alpha'$ se hallan situadas en un mismo plano Q.

*Cuestión 49* (Véase t. II, pág. 126).

*Sean* OA, OB *dos semidiámetros conjugados de una elipse;* F, F′ *los focos;* $OH = \frac{OF}{\sqrt{2}}$, $OH' = \frac{OF'}{\sqrt{2}}$; K *el punto simétrico de* H′ *con relación á* AB. *Demostrar:* 1.º *Que los cuatro puntos* A, B, H, K *se hallan en una circunferencia.* 2.º *Que se tiene* $\frac{KA}{KB} = \frac{HB}{HA}$.

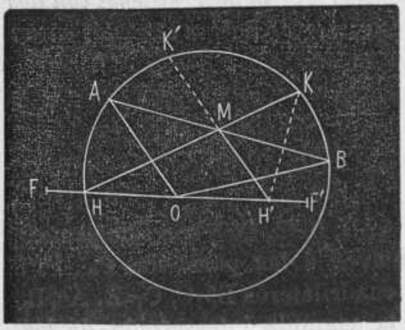
*(C. A. Laisant).*

Solución por el Sr. Sollerstinky

Se sabe que la cuerda AB envuelve á una elipse que tiene por focos H, H′. El punto de contacto de AB con su envolvente es el medio M de AB, y el diámetro de esta nueva elipse, conjugada con OM, es igual á AB. (1)

(1) En efecto. Siendo OA, OB radios perpendiculares de un círculo, la cuerda AB es el lado del cuadrado inscripto. Esta cuerda envuelve, pues, un círculo concéntrico cuyo diámetro es igual á AB, es decir, al diámetro del círculo dado dividido por $\sqrt{2}$, y el punto de contacto de AB es su medio M.

La recta HK debe pasar por el punto de contacto M de AB, y se tiene




$$HM . MK = HM . MH' = \overline{MA}^2,$$

porque el producto de los radios vectores de un punto M de la elipse es igual al cuadrado del semi-diámetro conjugado con el que pasa por M.

Los puntos A, B, H, K se hallan, pues, en un mismo círculo.

De los triángulos semejantes KAM, BHM y de los triángulos KMB, AMH resulta

$$\frac{KA}{BH} = \frac{AM}{HM} \quad y \quad \frac{KB}{AH} = \frac{MB}{MH}.$$

Luego

$$\frac{KA}{BH} = \frac{KB}{AH} \quad ó \quad \frac{KA}{KB} = \frac{HB}{HA}.$$

*Observación.*— Siendo K' el simétrico de H' con relación al medio M de AB, los puntos A, B, H, K' se hallan también sobre el mismo círculo, y se tiene

$$\frac{K'A}{K'B} = \frac{HA}{HB}$$

*Cuestión 50* (Véase t. II, pág. 126).

*Se dan en un mismo plano un triángulo* ABC *y un punto* D. *Sobre las rectas indefinidas* AD, BD, CD *se determinan tres puntos variables* A', B', C' *con la condición que los triángulos* A'BC, B'CA, C'AB *sean equivalentes.*

1.º *Los lados del triángulo* A' B' C' *envuelven tres parábolas* $P_a$, $P_b$, $P_c$.

2.º *Estas parábolas tienen dos tangentes comunes, es decir, se verifica dos veces que los puntos* A', B', C' *se hallan en línea recta.*

3.º *Hallar los focos y las directrices de las parábolas* $P_a$, $P_b$, $P_c$.

*(J. Neuberg).*

**Solución por el Sr. Sollerstinky.**

Sean $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ los puntos en que las rectas DA, DB, DC encuentran á BC, CA, AB.

Se tiene

$$\frac{A'BC}{ABC} = \frac{A'\alpha}{A\alpha}; \quad \frac{B'CA}{BCA} = \frac{B'\beta}{A\beta}; \quad \frac{C'AB}{CAB} = \frac{C'\gamma}{C\gamma}$$

Luego, en virtud de la condición:

$$\frac{A'\alpha}{A\alpha} = \frac{B'\beta}{B\beta} = \frac{C'\gamma}{C\gamma}$$

Y por consiguiente las divisiones $AA'\alpha$, $BB'\beta$, $CC'\gamma$ son semejantes. Luego las rectas B'C', C'A', A'B' envuelven á las parábolas $P_a$, $P_b$, $P_c$, inscriptas respectivamente á los cuadriláteros $B\beta\gamma C$, $C\gamma\alpha A$, $A\alpha\beta B$.

El foco $F_a$ de la parábola $P_a$ es la segunda intersección de las circunferencias DBC, $D\beta\gamma$, y los simétricos de $F_a$ con relación á las rectas $B\beta$, $C\gamma$ pertenecen á la directriz de $P_a$.

Como se sabe, el círculo $F_a F_b F_c$ pasa por el punto D y corta á DA, DB, DC en los puntos $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ tales, que las rectas $F_a\alpha'$, $F_b\beta$, $F_c\gamma'$, concurren en el mismo punto E. Este punto es la intersección de las dos tangentes comunes á las tres parábolas. (Véase la Memoria de M. Neuberg: *Sur les projections et contreprojections*, etc. Ch. VI, y en particular § 60 pp. 81-82).

*Cuestión núm. 52* (Véase t. II, pág. 127).

*Se dan dos rectas rectangulares* OA, OB *y un punto* C, *por el que se hace pasar una secante variable* ACB. *Se describe la circunferencia que tiene* AB *por diámetro.*

1.º *Se traza la cuerda* MCN *perpendicular á* AB. *Hallar el lugar de los puntos* M, N.

2.º *Se traza en* B *la tangente sobre la que se proyectan los puntos* M, N *en* S, T. *Hallar el lugar de los puntos* S, T.

*(H. Brocard).*

**Solución por el Sr. Sollertinsky**

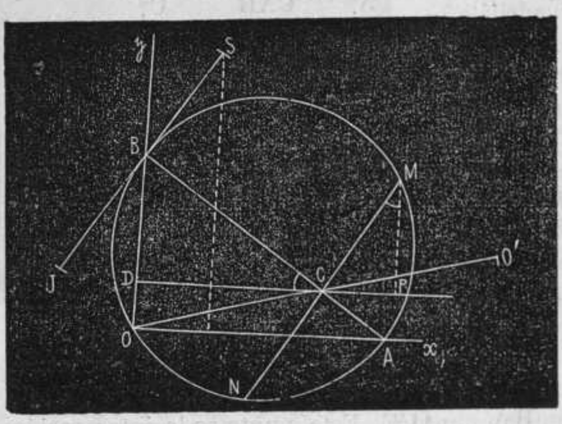
1.º Sea O' el simétrico de O con relación á C. Siendo el cuadrilátero OMO'N un paralelógramo, las bisectrices de los ángulos OMO' ONO' son paralelas á las del ángulo MON. Pero estas son evidentemente las rectas fijas OA, OB.

Así, el lugar de los puntos M, N es la hipérbola equilátera que tiene por diámetro OO' y cuyas asíntotas son paralelas á OA, OB.

2.º Sean: P la proyección de M sobre la paralela á OA trazada por C; D la intersección de CP y OB.

Puesto que se tiene $\angle MCP + \angle BCD = \frac{\pi}{2}$, los triángulos rectángulos BCD, CMP son semejantes, por lo que

$$BD . MP = DC . CP \qquad (1)$$




Hagamos $CD = a'$ $OD = b$, y designemos por $x$, $y$ las coordenadas del punto S con relación á los ejes OA, OB. Se tendrá

$$x = CP,$$

$$BD = y - b - MP$$

Además, siendo C el centro y CD una de las asíntotas de la hipérbola equilátera que pasa por M, O, se tiene

$$MP . CP = OD . CD \quad \text{de donde} \quad MP = \frac{ab}{x},$$

y por consiguiente $\quad BD = \dfrac{xy - bx - ab}{x}.$

En fin, si se llevan estos valores á la igualdad (1), se obtiene la ecuación de la curva, lugar de los puntos S, T:

$$x^3 - bxy + b^2(x + a) = 0.$$

*Cuestión 59* (Véase t. II, pág. 128).

*Lugar de los focos de las cónicas que tocan á dos rectas* OA, OB *en dos puntos dados* A, B.

*(H. Brocard).*

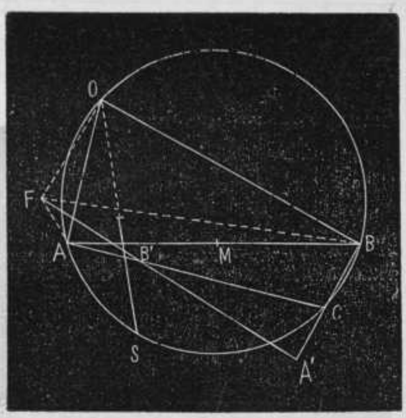
**Solución por el Sr. Sollertinsky.**

El lugar buscado, como se sabe, es una estrofoide (véase para la solución en coordenadas trilineales, Kœhler, *Exercices de Géométrie analytique,* 1.$^e$ partie, p. 317, y para la solución en coordenadas cartesianas J. M. S. 1886, p. 41). Véase una solución geométrica.

Se sabe que las tangentes OA, OB á una cónica se ven desde un foco F de la cónica según ángulos iguales ó suplementarios.

La cuestión se reduce, pues, á ésta: *Hallar el lugar del punto* F *tal, que una de las bisectrices del ángulo* AFB *pase por un punto fijo* O.

Sean: C el punto de intersección de las perpendiculares levantadas




en A, B sobre OA, OB; B', A' los puntos en que la otra bisectriz del ángulo AFB encuentra á CA, CB.

Á causa de los cuadriláteros inscriptibles OFA'B, OFAB', los ángulos A'FB y A'OB, B'FA y B'OA son iguales ó suplementarios. Pero, según la hipótesis, los ángulos A'FB, B'FA son también iguales ó suplementarios. Luego, los ángulos A'OB, B'OA, siendo agudos, son iguales. Por consiguiente, los triángulos A'OB y B'OA son semejantes, y se tiene

$$\frac{A'B}{B'A} = \frac{OB}{OA} = \text{const.}$$

Así, la bisectriz del ángulo AFB, que no pasa por O, envuelve una parábola P, inscripta al triángulo ABC.

Las bisectrices del ángulo AOB son dos posiciones particulares de la recta B'A', las cuales tocan por consiguiente á P. Luego el punto O, como la intersección de las tangentes rectangulares, pertenece á la directriz de P. Así, el lugar del punto F es la podar de una parábola (P) con relacion á un punto (O) de su directriz, es, pues, una estrofoide oblicua que tiene por punto doble O. La directriz es la mediana OM del triángulo AOB, y el foco es la proyección del centro del círculo OAB sobre la simediana OS.

*Cuestión núm. 55* (Véase t. II, pág. 127).

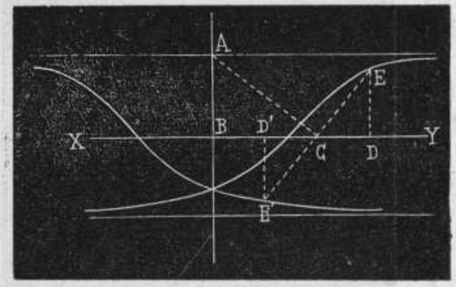
*Se tiene una recta indefinida* XY *y una perpendicular* AB (B el pie) *á dicha recta. Por el punto* A *se trazan diversas oblicuas y en sus pies se levantan perpendiculares á ellas, tomando en uno y otro sentido longitudes iguales á* AB. *Hallar y discutir la ecuación del lugar geométrico de los extremos de estas perpendiculares.*

*(Juan J. Durán Loriga).*

Solución por D. Gabriel Galan.

Los valores de las abscisas BD y BD' de los puntos E y E' que pertenecen al lugar son:

$$\left.\begin{array}{l} BD = BC + CD \\ BD' = BC + CD' = BC - CD \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X = BC + CD \\ X = BC - CD \end{array}\right\} (1)$$




Ahora: en el triángulo ABC se verifica: $BC = a \operatorname{tg} \alpha$; y en el CDE: $CD = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}$; luego las igualdades (1) toman esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} \alpha + \dfrac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \\ x = a \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \end{array}\right\} (2)$$

Además, en el triángulo CDE:

$$\gamma = a \operatorname{sen} \alpha. \quad (2)$$

Eliminando entre ésta y cada una de las (2) el ángulo $\alpha$ que fija la posición de uno de los puntos del lugar, tendremos dos ecuaciones con $x$ é $y$, que son las del lugar geométrico pedido; la primera corresponde á la rama descrita por el punto E y la segunda á la que describe el punto E'.

Para verificar dicha eliminación, expresaremos el seno en función de la tangente en la igualdad (3), lo que da:

$$y = a \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

y sustituyendo este valor de $\operatorname{tg} \alpha$ en las igualdades (2), tendremos:

$$x\sqrt{a^2 - y^2} = ay + a^2 - y^2 \ldots\ldots \text{ para la primera rama.}$$

$$x\sqrt{a^2 - y^2} = ay - a^2 + y^3 \ldots\ldots \text{ para la segunda.}$$

Son asíntotas de ambas ramas de la curva, las rectas paralelas al eje de las X cuyas ecuaciones son $y = \pm a$; tiene un punto doble sobre el eje de las Y, y dos tangentes de inflexión en los puntos en que corta al de las X . . . . .

*Cuestión 57* (Véase pág. 248) — **Solución por el Sr. Schiappa Monterio.**

(Conclusión).

Si se elimina $\rho$ y $\gamma$ entre las tres últimas ecuaciones, se obtendrá por ecuación de la superficie *anular* propuesta

$$\frac{(l \pm \sqrt{x^2+y^2-k^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

ó

$$\left.\begin{array}{r} x^4+y^4+z^4+2\,\dfrac{a^2}{c^2}\,y^2z^2+2\,\dfrac{a^2}{c^2}\,x^2z^2+2\,x^2y^2 \\ -\,2(a^2+l^2+k^2)\,x^2-2\,(a^2+l^2+k^2)\,y^2-2\,(a^2-l^2+k^2)\,z^2 \\ +\,(a^2+k^2)^2-2\,(a^2-k^2)\,l^2 \end{array}\right\} = 0 \qquad (7)$$

Estas ecuaciones representan, pues, un *núcleo vacío* al rededor del eje de las $z$ ó de la recta D.

**Casos particulares y sus confirmaciones.**

Cuando el plano que pasa por D y por el centro C de la elipse (E) coincide con el plano de las $xz$, se tendrá $l=0$, y la ecuación de la superficie se reduce á

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2} \qquad (8)$$

que representa un elipsoide de revolución cuyos meridianos tienen por semi-ejes

$$a\sqrt{1+\frac{k^2}{a^2}} \quad \text{y} \quad c\sqrt{1+\frac{k^2}{a^2}}$$

La elipse dada (E) será, pues, semejante á estos meridianos; pero, en verdad, según los datos del problema, no debemos considerar de esta superficie mas que la zona comprendida entre los planos

$$z = +c \qquad \text{y} \quad z = -c$$

la cual podrá decirse *doble*, pudiéndose considerar la otra parte de esta superficie como *parásita*.

Si el plano de la elipse (E) coincide con el plano $xz$, se tiene $k=0$, y la ecuación de la superficie engendrada será

$$(l \pm \sqrt{x^2+y^2})^2 + \frac{a^2}{c^2}\,z^2 = a^2 \qquad (9)$$

que se presenta entonces el *toro elíptico*.

En el caso en que se tenga al mismo tiempo $l=0$, $k=0$, ó cuando el centro C de (E) se halle en D, resultará

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (10)$$

ecuación de un elipsoide de revolución que tiene por meridiana la elipse dada.

*Cuestión 49* (Véase t. II, pág. 126)

*Sean* GA, OB *dos semidiámetros conjugados de una elipse;* F, F' *los focos;* $OH=\frac{OF}{\sqrt{2}}$; $OH'=\frac{OF'}{\sqrt{2}}$; K *el punto simétrico de* H' *con relación á* AB. *Demostrar:*

1.º *Que los cuatro puntos* A, B, H, K *se hallan en una circunferencia.*

2.º *Que se tiene* $\frac{KA}{KB}=\frac{HB}{HA}$.

*(C. A. Laisant).*

**Solución por el Sr. Schiappa Monteiro.**

Sean $A_0A'_0$ y $B_0B'_0$ los ejes de la elipse dada (S).

Como se sabe, *los puntos* H, H' *son los focos de una elipse* $a_0b_0a'_0b'_0$ *ó* ($\Sigma$), *envolvente de las diversas posiciones de* AB, HOMOTÉTICA Y CONCÉNTRICA *con la cónica dada* (S) *y cuya razón de homotecia es* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (*)

Consideremos el paralelogramo ABA'B' inscripto á (S) y circunscripto á ($\Sigma$); y tracemos los dos pares de rectas AH, AH' y BH, BH' que unen los vértices A, B de este paralelogramo con los puntos H, H'.

Según un teorema muy conocido, se tiene que el ángulo HAB es igual al ángulo A'BH'.

Esto sentado, para satisfacer á la primera parte de la cuestión propuesta, nos basta probar que los ángulos HAK y KBH son suplementarios.

Siendo las rectas AH' y BH' respectivamente simétricas de las AH y BK, los ángulos H'AB y BAK serán iguales entre sí, así como los H'BA y ABK. Pero, en virtud de la propiedad que acabamos de enunciar, los ángulos HAK y KBH son respectivamente iguales á los ángulos B'AB, ABA' de los vértices A, B del paralelogramo considerado; y puesto que estos dos últimos ángulos son suplementarios, también lo serán los dos primeros.

Luego los cuatro puntos A, H, B, K se hallan en la circunferencia ($\omega$).

---

(*) La demostración de este teorema se hace muy sencilla recurriendo al círculo principal $A^0{}_0AB_1A'_0$ de la elipse (S).

Para demostrar la segunda parte de la cuestión propuesta, tenemos que considerar los dos pares de triángulos semejantes $m$AK, $m$BH y $m$AH, $m$BK que se obtienen uniendo los cuatro puntos A, H, B, K, que determinan el cuadrilátero AHBK, cuyo punto medio $m$ de la diagonal AB, punto de contacto de esta recta con su envolvente ($\Sigma$), será evidentemente su intersección con la otra diagonal HK, prolongación del vector H$m$.

La comparación de los triángulos considerados da

$$\frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{K}m} = \frac{\mathrm{HB}}{m\mathrm{B}} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{K}m}{\mathrm{KB}} = \frac{m\mathrm{A}}{\mathrm{HA}}$$

Multiplicando estas relaciones, miembro á miembro, y observando que $m\mathrm{A} = \mathrm{B}m$, se tiene

$$\frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{HA}}$$

que es lo que debíamos demostrar.

NOTA.—Si se traza el vector H$m$, y se prolonga en una longitud $m\mathrm{K}_0$ igual al mismo, el punto $\mathrm{K}_0$ se hallará en la circunferencia ($\omega$), y al mismo tiempo en una elipse ($\Sigma'$) homotética á ($\Sigma$), siendo el centro de homotecia directa el foco H' de ésta.

Determinando los puntos simétricos K' y $\mathrm{K}'_0$ de los puntos H y $\mathrm{K}_0$ con respecto á la recta AB, se tendrá otro círculo ($\omega$) que pasa por los cinco puntos A, K', B, H', K', simétricamente igual al círculo ($\omega$), con relación á esta misma recta.

El círculo generador ($m$) de la cónica ($\Sigma$) tiene el centro en $m$ y pasa por los puntos K, $\mathrm{K}_0$, $\mathrm{K}'_0$, H' tocando en K al círculo director (H) que tiene el centro en H y por radio $\mathrm{HK} = a_0 a'_0$.

Como se ve, el lugar geométrico ($\Omega$) descrito por el punto $\omega$ es uno de aquéllos desde los que se pueden trazar geométricamente normales á la elipse (*).

Es claro que esta figura nos conduce á otras propiedades, y á desarrollar algunos de los enunciados relativos á las cónicas, sobre las que insistiremos más tarde.

Podíamos llegar á la solución buscada, empleando el *método de las*

(*) Considerando la elipse ($\Sigma$) como el lugar geométrico de un punto de una recta de longitud constante que se mueve de manera que sus extremidades resbalen sobre dos rectas que se cortan en ángulo recto, ó según un ángulo cualquiera, *el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación de esta recta móvil será una circunferencia desde la que es también fácil trazar geométricamente normales á esta curva.*

Nuestro amigo, el distinguido escritor matemático señor Rodolpho Guimaraes, ha resuelto elegantemente este problema en el número 18 de EL PROGRESO MATEMÁTICO en el caso en que *equipolencias*, en vista de la interesante memoria titulada *Sur quelques propriétés focales des coniques* publicada por nuestro amigo y sabio matemático M. C. A. Laisant, autor de esta cuestión propuesta, basada naturalmente en los principios de este método, que hemos aplicado ya ventajosamente, pero no lo hacemos ahora, atendido á que hemos creído preferible el procedimiento elemental y sintético.

M. C. A. Laisant, en esta memoria ha llamado *pseudo-focos* á los focos H, H' de la cónica ($\Sigma$), con relación á su homotética (S).

En nuestra memoria titulada *Etude synthétique des coniques sous le point de vue de leur génération cyclique* (*) nos hemos ocupado también de las propiedades focales de estas curvas de una manera general, así como de algunas de las propiedades de esta figura.

*Cuestión 61* (Véase t. II, pág. 128).

*Hallar el lugar de los focos* M *de las hipérbolas que tienen un vértice* A *y una asíntota* CB *fijos* (Problema clásico). *Dar una construcción gráfica de la tangente en el punto* M.

*(H. Brocard).*

**Solución por el Sr. Schiappa Monteiro.**

Es claro que siendo el punto C el centro de una de las hipérbolas, sus *focos* M, M' serán los puntos de intersección de CA con el círculo (C) de radio CB, y que la perpendicular AO á este radio será un *eje de simetría* del lugar pedido (F).

Elijamos, pues, por ejes de las $x$, $y$ respectivamente este eje de simetría y su perpendicular A$y$; y consideremos el punto M cuyas coordenadas son AP$=x$ y PM$=y$, y hagamos OA$=a$.

Esto sentado, se tiene

$$AM = CB - CA \qquad (1)$$

Pero los triángulos rectángulos semejantes CBA, CAO y MAP dan

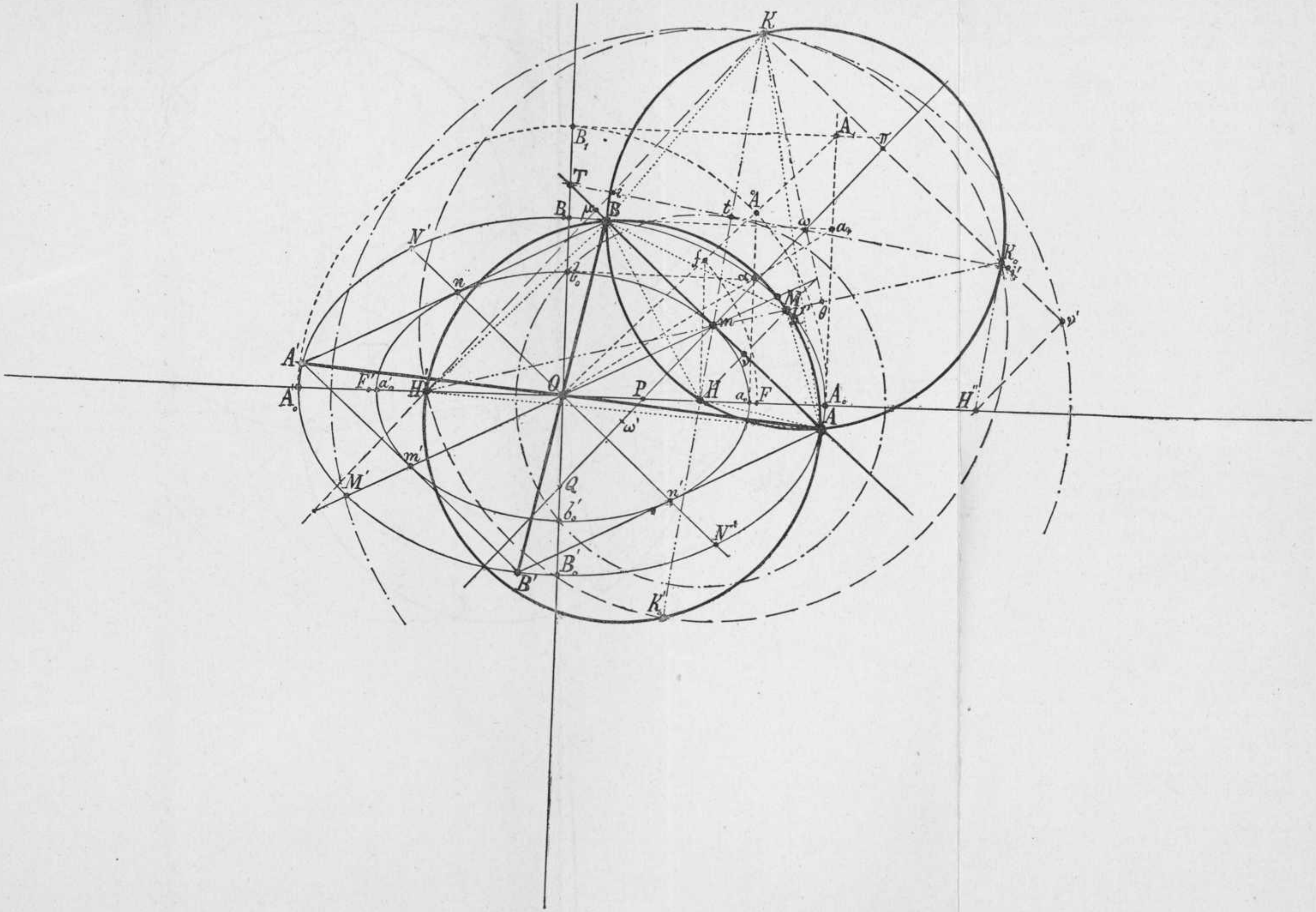
---

las dos rectas directrices son rectangulares ó los ejes de la elipse, con auxilio del teorema de Stewart.

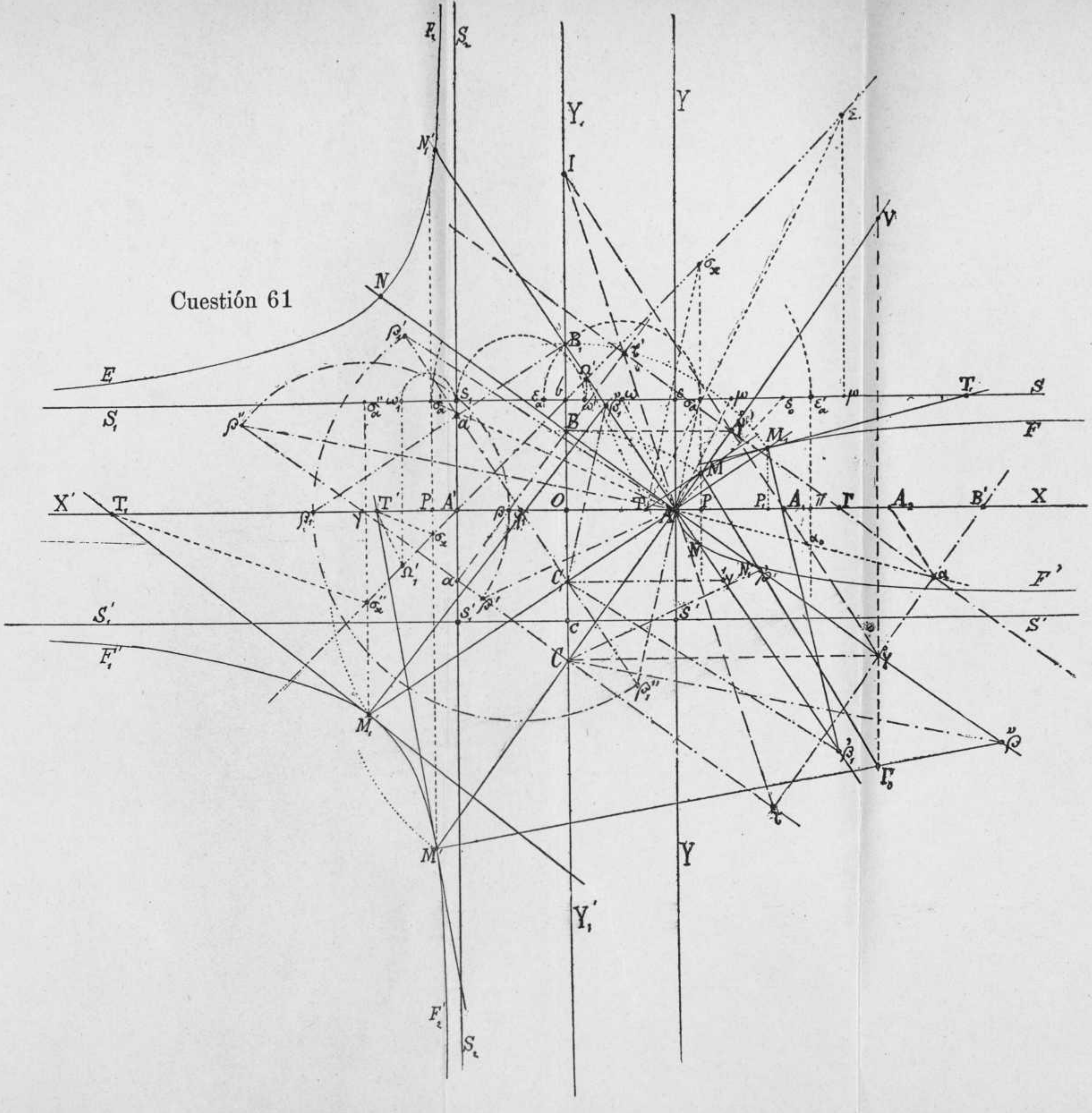
En este caso, el lugar geométrico de los centros instantáneos será una circunferencia concéntrica con la elipse ($\Sigma$), de radio igual á la suma ó á la diferencia de los semi ejes, según que el segmento generador es también respectivamente igual á la suma ó á la diferencia de estos semi ejes.

Luego, inversamente, si se da el centro instantáneo de rotación, se determina inmediatamente la posición del segmento y del punto generador; y, por consiguiente, una de las normales trazadas por este centro á la elipse ($\Sigma$).

(*) Hemos publicado una parte de este estudio desde 1877 en el *Jornal das Sciencias mathematicas e Astronomicas*. Véase *Solución de la cuestión propuesta*, núm. 10, t. I (1887), página 174. *Recherches synthétiques et analytiques sur le cercle variable assujeti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles également donnés;* t. II (1878), págs. 54, 130, 174; t. V (1883), pág. 148; t. V (1883), pág. 103.


K
B
T
B
A
t
ω
K
N'
n
m
A'
F'
H'
O
P
H
F
A
H''
M'
m'
Q
n'
N''
B'
K'

Cuestión 61



$$CB = \frac{CA}{y} \cdot AM, \quad CA = \frac{a}{\alpha} \cdot AM \quad y \quad AM = \pm \sqrt{x^2 + y^2};$$

luego

$$\mp \sqrt{x^2 + y^2} = (x + a)\, y \tag{2}$$

ó

$$y^2 = \frac{a^2 x}{(x+2a)x} \tag{3}$$

Tal es la ecuación pedida en coordenadas rectangulares.

Esta cúbica tiene, pues, por asíntotas las rectas $sS$ y $s'S'$ paralelas al eje de las $x$ cuyas ecuaciones son

$$y = +a \quad \text{é} \quad y = -a \tag{4}$$

y la recta $A'S_2$ paralela al eje de la $y$ tiene por ecuación

$$x = -2a \tag{5}$$

Tomando el punto fijo A por *polo* y el eje OA por *eje polar*, consideremos el punto M para el que las coordenadas polares son

$$AM = \rho \quad y \quad \angle MAP = \theta.$$

Según esto, resulta

$$\rho = CB - CA \tag{1}$$

Pero los triángulos rectángulos CBA y CAO dan

$$CB = \frac{CA}{\operatorname{sen}\theta} \quad y \quad CA = \frac{a}{\cos\theta}$$

de lo que resulta

$$\rho = \pm \frac{a}{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta} - \frac{a}{\cos\theta} \tag{6}$$

ecuación polar de la cúbica (F)

*Observación.*—Como se sabe, esta cúbica clásica goza de propiedades notables, de las que sólo indicaremos las que tienen relación con el trazado elegido para la tangente ó para la normal en un punto M, ó para trazar la tangente por un punto del eje OA, desde A hasta $-\infty$, atendiendo á la restricción del sabio autor de esta cuestión, á quien no ofreceremos observaciones nuevas bajo este punto de vista, y para no prolongar inútilmente esta solución.

*Tangente* y *normal.*— La ecuación (3) da por expresión de la subnormal

$$S_t = \frac{x(x+2a)}{a} \tag{8}$$

que nos conduce fácilmente á la determinación de la tangente. Consideremos, pues, el punto M, y prolonguemos la ordenada PM hasta cortar en $s$ y $\sigma_x$ á la asíntota $s$S y á la diagonal A'$b$ del cuadrado OA'$s_1b$, determinado por esta asíntota, la asintota $s\mathrm{S}_2$ y por las rectas AO, CB.

Esto sentado, es fácil ver que se tiene

$$\mathrm{P}\sigma_a = a, \quad \mathrm{P}\sigma_x = \mathrm{AP} = x + 2a$$

De donde

$$\mathrm{S}_t = \frac{\mathrm{AP} \,.\, \mathrm{P}\sigma_x}{a} = \mathrm{TP} \tag{9}$$

Luego, para obtener el punto T, trazaremos la recta A$\sigma_a$ y por $\sigma_x$ la recta $\sigma_x$T paralela á ésta, que cortará OAX en el punto T tal, que TM será la tangente buscada.

Para la tangente en el punto M', prolonguemos análogamente la ordenada P'M' que cortará entonces $s$S y A'$b$ en los puntos $\sigma'_a$ y $\sigma'_x$, y se tendrá

$$\mathrm{P}'\sigma'_a = a, \quad \mathrm{P}'\sigma'_x = \mathrm{A}'\mathrm{P}' = -x + 2a$$

de donde
$$\mathrm{S}_t = \frac{\mathrm{AP}' \,.\, \mathrm{P}'\sigma'_x}{a} = \mathrm{T}'\mathrm{P}' \tag{10}$$

Así el punto T será la intersección del eje AO con la recta $\sigma'_x$T paralela á A$\sigma'_a$, lo que la tangente T'M'.

---

Tomemos ahora la ecuación polar (7) de la cúbica, que da para la sub-normal la expresión

$$\mathrm{S}_x = \pm\, a \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) - \frac{a \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \tag{11}$$

que conduce facilmente á trazar las normales en los extremos M, M' de la cuerda MM', cuyo punto medio C se halla en la diametral CB de (F).

En efecto: trazemos en los extremos B y C de las rectas rectangulares AB y AC las perpendiculares B$\beta a$ y C$a\gamma$, que cortan AO en los puntos $\beta$ y $\gamma$, y tendremos

$$\mathrm{S}_n = \pm\,(\mathrm{A}\gamma - \mathrm{A}\beta) - \mathrm{C}\gamma = \pm\,\beta\gamma - \mathrm{C}\gamma$$

Haciendo centro en $\gamma$, con el radio $\gamma\beta$ describamos el círculo $\beta'\beta\beta''$ ó ($\gamma$) que cortará á C$\gamma$ en los puntos $\beta'$ y $\beta''$. Unamos estos puntos al punto A por las rectas A$\beta'$ y A$\beta''$, y enseguida tracemos por C las paralelas C'$\beta$ y C''$\beta$ á estas rectas cuyas intersecciones '$\beta$ y ''$\beta$ con la perpendicular AB al vector MAM' dan respectivamente por sub-normales en los puntos M y M' los segmentos

A'$\beta$ y A''$\beta$

Se pueden también determinar los puntos '$\beta$ y ''$\beta$ trazando por C la paralela $C^0\gamma$ á AO, y tomando á una y otra parte los segmentos $'\beta^0\gamma$ y $^0\gamma''\beta$ iguales al segmento $\gamma\beta$.

Para los puntos situados en el vector que pasa por $c$, ó que coincide con la dirección de la diagonal $Ac$ del cuadrado $AOcs'$, se tiene $\theta = 45^0$, y por consiguiente

$$S_n = -\frac{a}{\cos\theta} = -a\sqrt{2}$$

lo que muestra que las sub-normales coincidirán y tendrán por longitud común la de esta diagonal $A\,c$.

Para los puntos $M_1$ y $M'_1$, extremos de la cuerda $M_1$ y $M'_1$ correspondientes al ángulo $\theta$ menor que $45^0$, la sub-normal $A''\beta_1$ relativa al punto $M'_1$ se hallará hacia el lado opuesto á la sub-normal $A'\beta_1$ del punto $M_1$.

En virtud de la simetría de la figura, se llega á los mismos resultados considerando la variación de $\theta$ que corresponde á la parte $AN_1NF$ de la rama $FMAF'$... y á la rama $F_1N'N_1F_2$... En este caso se tendrá que considerar la diagonal $A'c$ del cuadrado $OA's'_1c$, simétrico de $A'b$ con respecto á AO.

*Observación.*—Los pares de vectores rectangulares AM, AN; $AM_1$, $AN_1$,... siendo radios homólogos de dos haces homográficos en involucion concéntricos, cuyos radios dobles son imaginarios, los pares de puntos C, B; $C_1$, $B_1$... serán puntos homólogos de dos divisiones homográficas en involución de base común, y cuyo punto central es O.

Si se hace girar alrededor de A y T permaneciendo las rectas $A\sigma_a$ y $T\sigma_x$ siempre paralelas entre sí, estas rectas engendrarán dos haces homográficos que tendrán por centro estos puntos, y por consiguiente los puntos $\sigma_a$ y $\sigma_x$ formarán, sobre las rectas $sS$ y $A'c$ dos divisiones homográficas.

Consideremos dos rayos homólogos $A\mu$ y $T\Sigma$ de estos haces, que determinan los dos puntos homólogos $\mu$ y $\Sigma$ de estas dos divisiones homográficas. Proyectando el punto $\Sigma$ en $\mu'$ sobre $sS$, los dos puntos $\mu$ y $\mu'$ serán también dos puntos homólogos de dos divisiones homográficas, pero de la misma base, y por consiguiente, el punto $\sigma_a$ será uno de los *puntos dobles* de estas dos divisiones.

Según esto, se pueden trazar geométricamente desde un punto cualquiera del eje AO, desde A hasta $-\infty$ tangentes á la cúbica.

Sea pues, T el punto desde donde se quiere trazar una tangente á la curva, siendo $s_0$ el punto de la primera división ($\mu$...) que es homólogo del punto situado en el infinito en la segunda división ($\mu'$...) y $s_1$ el punto de la segunda división que corresponde al infinito de la primera.

Determinemos el punto medio $\omega$ del segmento $s_0 s_1$ formado por estos dos *puntos límites,* así como su homólogo, y se tendrá

$$\omega\sigma_a = \pm\sqrt{\omega s_1 \,.\, \omega\omega'}\,;$$

luego, describiendo sobre el segmento $\omega s_1$ como diámetro una circunferencia, la circunferencia $(\omega)$ que tiene el centro en $\omega$ y corta ortogonalmente á la primera, cortará á $s$S en el punto doble $\sigma_a$ por el que pasa la ordenada del punto de contacto de la tangente pedida TM, y por consiguiente, su simétrica con relación á AO.

El otro punto doble $\varepsilon_a$ corresponde á una *ordenada ideal* de la curva.

Si el punto dado fuese T', el punto homólogo de $\omega$ sería $\omega'_1$ y la circunferencia $(\omega)$ que corta ortogonalmente á la circunferencia descripta sobre $s_1\omega'_1$ como diámetro, cortaría á $s$S en los puntos dobles $\sigma'_a$ y $\varepsilon'_a$ por los que pasan dos *ordenadas reales* que dan los puntos de contacto de las cuatro tangentes, que se pueden entonces trazar por este punto T' á la cúbica.

Como se sabe, el punto ${}^0\gamma$ es el *centro instantáneo de rotación* de la recta AC, y el punto $\tau$ *el punto de contacto de la parábola* $(\pi)$ envolvente de $a$C$\tau$, que tiene A por foco y la recta BOC por directriz.

Análogamente el punto ${}^0\gamma$ es el *centro instantáneo de rotación* de AB y $\tau'$ en el *punto de contacto* de esta misma parábola con la recta $a$B$\tau'$.

Los puntos ${}^0\gamma$ y ${}^0\gamma'$ son también puntos de otra parábola $(\varpi)$ que tiene por vértice el punto A y por parámetro $a$.

Por otra parte, cuando las rectas rectangulares BA${}^0\gamma$ y CA${}^0\gamma'$ giran alrededor de A, la cuerda ${}^0\gamma{}^0\gamma'$ girará al rededor del punto fijo $A_1$ ó polo de BOC, siendo AA igual á OA ó $a$.

En este caso la cuerda de contacto $\tau\tau'$ de la parábola $(\pi)$ girará alrededor de A y cortará á la cuerda ${}^0\gamma\,{}^0\gamma'$ de la parábola $(\varpi)$ en un punto I que se hallará en la directriz BOC de aquélla.

El punto $\alpha$ intersección de las normales $\tau\,{}^0\gamma\alpha$B' y $\tau'\,{}^0\gamma'\Gamma\gamma$ á la parábola $(\pi)$ describirá una parábola $(\varpi')$ que tiene $A_2$ por vértice é igual á la parábola $(\varpi)$; siendo el segmento $AA_2$ igual á $2a$ y el segmento TB' igual á $\gamma\beta$.

La parábola $(\varpi')$ será, pues, uno de los lugares desde donde se pueden trazar geométricamente normales á la parábola $(\pi)$.

El punto medio $\alpha_0$ del vector A$\alpha$ igual á la cuerda ${}^0\gamma\,{}^0\gamma$, describe otra parábola que tiene $A_1$ por vértice y $\frac{a}{2}$ por parámetro.

*Cuestión núm. 79* (Véase t. II, pág. 279).

***Construir un triángulo dados los vértices* A', B', C' *de los triángulos equiláteros construídos exterior ó interiormente.—(H. Van Aubel).***

**Solución por M. Emile Lemoine.**

Esta cuestión es la 864 (N. A. 1868, p. 191) que yo propuse y que ha sido resuelta muy elegantemente por *M. Kiepert* (Id. 1869, p. 40), y ha llegado á tener un especial interés por el lugar que ciertos puntos encontrados en su solución han obtenido en la Geometría del triángulo. Además, en el trabajo de *M. Kiepert* la cónica universalmente conocida ahora con el nombre de *hipérbola de Kiepert* ha mostrado toda su importancia, así como lo han hecho también MM. Neuberg y Brocard. Yo, asimismo, desde 1873 (Véase *Assoc. Franc.* Congrès de Lyon. p. 94) indiqué los puntos notables, estudiados entonces, por los cuales pasa esta cónica.

Puesto que la ocasión se ofrece, voy á presentar las soluciones que había encontrado cuando propuse la cuestión.

Primera solución:

Lema.—*Un triángulo equilátero* C'AB *tiene su vértice* C' *fijo,* A *se apoya sobre una recta* A'O, B sobre una recta B'O. *Determinar su posición.*

Si se construyen todos los triángulos equiláteros que tienen su vértice C' fijo, su vértice A sobre la recta A'O, el lugar de B es, como se sabe, ó como es muy fácil demostrar, una recta cuya intersección con B'O determina el punto B.

Esto sentado, volvamos al problema propuesto. Supongámoslo resuelto.

Se sabe, ó se demuestra fácilmente, que las tres rectas AA', BB', se cortan en un punto O tal, que $\angle B'OC' = \angle C'OA' = \angle A'OB = 120^0$ (*).

Luego O se halla determinado por la intersección de dos segmentos capaces de $120^0$ descritos sobre A'B' y sobre A'C'. Basta entonces colocar B como manifiesta el lema: puesto que AC'B es equilátero y C' está dado, B se halla sobre B'O, A sobre A'O.

Como se sabe también que AA'=BB'=CC', C está situado sobre C'O, etc.

El punto O es el punto notable que M. Neuberg ha llamado 1.$^{er}$ centro isógono de ABC (véase su Memoria *Sur le tetraèdre*, Bruxelles, 1884 p. 37).

Hemos supuesto que A', B', C' se hallaban al otro lado de BC, CA,

(*) Véase en la pág. 61 de este periódico. El punto M es ahora el punto O.—(Z. G. de G.)

AB que A, B, C. La hipótesis contraria se tratará de una manera enteramente análoga; AA', BB', CC' se cortarían entonces en el 2.º centro isógono. Haremos la misma hipótesis en la solución siguiente:

Segunda solución:

LEMA.— *Si se circunscribe un círculo al triángulo equilátero* AC'B *y* O *es un punto del círculo situado al lado opuesto de* AB *que* C', *se tendrá* OC' = OB + OA, proposición muy conocida y fácil de probar (*).

Se construye el punto O como en la primera solución.

Se tiene entonces:

$$OA' = OB + OC, \quad OB' = OC + OA, \quad OC' = OA + OB,$$

de lo que se deduce

$$OA = \frac{OB' + OC' - OA'}{2}, \quad OB = \frac{OC' + OA' - OB'}{2},$$

$$OC = \frac{OA' + OB' - OC'}{2}$$

y como OA', OB', OC' son conocidos, puesto que O está colocado. Los puntos A, B, C pueden ser colocados sobre A'O, B'O, C'O.

*Cuestión 69* (Véase t. II, pág. 215)

*Dados los dos valores* $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, *se pide la forma más sencilla de los números* $u_{n+1} = 1 + u_n + 2u_{n-1}$.—*(H. Brocard).*

**Solución por el SR. G. VIVANTI.**

Se obtiene por la integración de la ecuación de diferencias finitas, teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1 - \lambda_n\right), \quad \text{de donde} \quad \lambda_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$$

Los números $u_n$ gozan de las propiedades siguientes, que nos ofrecen un medio fácil de calcularlos sucesivamente.

$$u_n + u_{n-1} = 2^n - 1, \quad u_n = 2u_{n-1} + \lambda_{n-1}$$

Para establecer estas relaciones notables, se tiene siempre:

$$\lambda_n + \lambda_{n-1} = 1, \quad 1 + \lambda_n = 2 - \lambda_{n-1} = 2 + 2\lambda_{n-1} - 3\lambda_{n-1}$$

Según esto, tenemos

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + 2^n - 2 - \lambda_n - \lambda_{n-1}\right) = \frac{1}{3}(3.2^n - 3) = 2^n - 1,$$

(*) Véase *Desboves*, Questions de Géométrie, etc , pág. 64.— Z. G. DE G.

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2.2^n - 2 - 2\lambda_{n-1} + 3\lambda_{n+1}\right) = 2u_n + 3\lambda_{n-1}$$

*Errata en la cuestión 74.*— El Sr. Vivanti nos ha manifestado que el denominador del segundo miembro es igual á

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \mathrm{B}(m+1, n+1) = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \quad (*)$$

Nota acerca de la cuestión número 77 del Sr. Pirondini

por M. H. Brocard (V. t. II, pág 278).

Las relaciones enunciadas parece son consecuencias de una propiedad particular de la evolvente del círculo que se puede establecer como sigue:

Designemos respectivamente por $a$, $\rho$, R, $s$, el radio del círculo, el radio vector del punto M de la evolvente, el radio de curvatura y el arco de esta curva.

Se tiene desde luego $\rho^2 = \mathrm{R}^2 + a^2$.

Siendo $\alpha$, $\beta$ las coordenadas del centro de curvatura de una curva, en el punto $(x, y)$; se tiene por relaciones conocidas

$$x - \alpha - (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Si, pues, $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ representa la evoluta, la eliminación de $\alpha$ y $\beta$ entre las tres ecuaciones dará la ecuación diferencial de la evolvente.

En el caso del círculo

$$\varphi(\alpha, \beta) = x^2 + y^2 - a^2.$$

Y se obtiene

$$a^2(dx^2 + dy^2) = (xdx + ydy)^2$$

ó más simplemente

$$xdx + ydy = ads$$

Integrando se tiene

$$x^2 + y^2 = 2a\mathrm{S} + \mathrm{C}.$$

Y si se considera la evoluta que pasa por el punto A del círculo sobre el eje OX, se tendrá $\mathrm{C} = a^2$, de donde

$$\rho^2 = 2a\mathrm{S} + a^2 \quad \text{y por consiguiente} \quad \mathrm{R}^2 = as,$$

propiedad que nos proponíamos establecer.

La 2.ª relación del enunciado 77 puede deducirse muy sencillamente de aquélla.

(*) La misma indicación se nos ha hecho por el Sr. Durán Loriga.

En efecto, designando por OB, OC, OD los radios vectores proporcionales á los números 1, 5, 7, se tendrá

$$2a\,.\,AB = \overline{OB}^2 - a^2, \quad 2a\,.\,AC = \overline{OC}^2 - a^2, \quad 2a\,.\,AD = \overline{OD}^2 - a^2.$$

Si, pues,

$$\overline{OB}^2 + \overline{OD}^2 = 2.\,\overline{OC}^2, \quad \text{se tendrá} \quad AB+AD=2AC$$

lo que prueba que C es el medio del arco BD.

Se establecerían de una manera análoga las otras relaciones enunciadas, que son otras tantas importantes contribuciones al estudio de la evolvente del círculo.

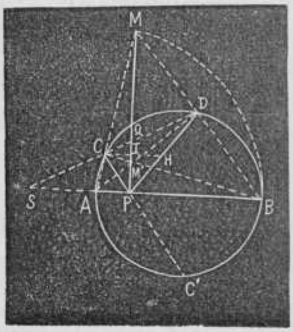
*Cuestión núm 46* (V. t. II, pág. 32).

*Dada una perpendicular* PQ al diámero AB de una circunferencia y M un punto cualquiera de esta perpendicular.

1.º Demostrar que PQ es bisectriz del ángulo CPD. 2.º Determinar la posición de M con la condición de que CP haya de ser paralela á MB (se supone á P situado entre A y B). 3.º Caso de que P se halle en la prolongación de AB.—*(J. J. Durán Loriga).*

**Solución** por D. Ricardo Caro, alumno de la Universidad de Zaragoza

1.º Hay que demostrar que $\angle CPQ = \angle QPD$.




Tracemos las cuerdas AD y BC, que serán respectivamente perpendiculares á las rectas MB y MA, puesto que los ángulos ADB y ACB están inscriptos en media circunferencia.

Tenemos, pues, que las rectas MP, AD y BC, son las tres alturas del triángulo AMB, y, por lo tanto, se encontrarán en un punto M'.

Si además trazamos la DC, prolongada hasta encontrar al diámetro en S, podremos considerar la DS como diagonal del cuadrilátero completo CM'DMAB, por lo cual será armónica la relación de los puntos DQCS, y armónico el haz PDQCS.

Ahora bien; si por C trazamos la trasversal CH, paralela al rayo PS, tendremos IC = IH, y los triángulos rectángulos HIP y IPC serán iguales, resultando finalmente

$$\angle CPQ = \angle QPD$$

según se debía demostrar.

Si M estuviera en la intersección de la perpendicular con la circunferencia, también sería cierta la proposición, puesto que tendríamos

$$\angle CPQ = \angle QPD = 0.$$

Si estuviera entre la circunferencia y el diámetro en M' por ejemplo, los puntos C y D se determinarían uniendo M' con A y con B. Las rectas AC y BD tendrían que cortarse sobre la perpendicular PQ, porque teniendo esta perpendicular los puntos M' y P comunes con la tercera altura del triángulo AMB, sería la altura misma y pasaría por el vértice M. La demostración sería la misma que en el primer caso.

Finalmente, si M se confundiera con P, el ángulo CPD valdría 180° y PQ seguiría siendo la bisectriz.

2.° BP, que es perpendicular á PQ, será bisectriz del ángulo DPC', que es adyacente al CPD, y por tanto,

$$\text{arco } DB = \text{arco } BC'$$

Sentado esto, supongamos que sea M el punto que cumple con las condiciones del enunciado, es decir, que determina CP paralela á MB, y tendremos $\angle MBA = \angle CPA$

pero este último tiene por medida los arcos

$$\frac{AB}{2} + \frac{BC'}{2} = \frac{AC}{2} + \frac{DB}{2} = \frac{AC + DB}{2} = \frac{\text{semicirc.}^{a} - CD}{2}$$

También tenemos que el ángulo AMB tiene por medida los arcos

$$\frac{AC'B}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{\text{semicirc.}^{a} - CD}{2}$$

luego $\angle MBA = \angle AMB,$

y siendo isósceles el triángulo AMB, será $AM = AB$.

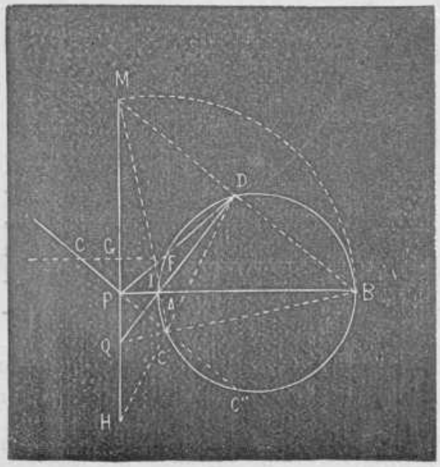
El punto M quedará, pues, determinado haciendo centro en A y cortando la perpendicular por un arco BM, de radio AB.

Siendo dado el punto P, el M quedará también determinado por la fórmula

$$PM = \pm \sqrt{4\,R^2 - \overline{AP}^2}$$

deducida del triángulo rectángulo AMP (llamando R al radio del círculo) y por ella podremos hallar dos puntos á distinto lado del diámetro, según se tome uno y otro signo, que cumplirán con las condiciones del enunciado.

3.° Supongamos ahora que P está en la prolongación del diáme-




tro y sea M el punto de la perpendicular.

La unión de M con los extremos A y B del diámetro determinará los puntos D y C', que unidos con P, dan el ángulo CPD, debiéndose demostrar que

$$\angle CPM = \angle MPD$$

Unamos B con C' prolongando la recta hasta Q, y los puntos Q, A y D resultan en línea recta. En efecto; BP y MC' son dos alturas del triángulo MQB; luego el vértice Q, el punto A de encuentro de las alturas, y el D, pie de la perpendicular á MB desde A son tres puntos de la tercera altura QD.

Consideremos ahora el cuadrilátero completo DAC'BMQ y trazando la diagonal DC'H será armónica la relación de los puntos MPQH, y por lo tanto, la de los MIAC', puesto que MH y MC' son trasversales del haz D. MIAC'.

Resulta también armónico el haz P. MIAC', y en tal caso la trasversal FGC, paralela al rayo PA, nos da FG = GC.

Los triángulos rectángulos PFG y PGC son iguales, y tenemos finalmente $\angle CPG = \angle GPF$.

Supongamos ahora que sea M el punto que cumple las condiciones del enunciado, es decir, que determina CP paralela á MB.

Siendo MP bisectriz del ángulo CPD, la AP lo será del $\angle DPC'$, adyacente del primero, resultando

$$\text{arco } FDB = \text{arco } C'C''B$$

cuya igualdad hemos de emplear luego.

Ahora bien;

$$\text{áng.}^{\circ}\ MBP = \text{áng.}^{\circ}\ BPC' = \text{áng.}^{\circ}\ BPD$$

pero el BPD tiene por medida el arco

$$\frac{DB-FA}{2} \qquad \text{(a)}$$

El ángulo AMB tiene por medida

$$\frac{C'C''B-AD}{2} \qquad \text{(b)}$$

Pero las expresiones (a) y (b) son iguales, porque si sumamos á las dos, la cantidad $\frac{FA}{2}$, nos dan respectivamente:

$$\frac{DB}{2}=\frac{FDB-FD}{2},$$

$$\frac{C'C''B-AD+FA}{2}=\frac{C'C''B-(AD-FA)}{2}=\frac{C'C''B-FD}{2};$$

luego, en virtud de la igualdad deducida antes,

$$\text{áng.}^{\text{o}}\ MBP=\text{áng.}^{\text{o}}\ AMB$$

Es isósceles el triángulo AMB, y el punto M quedará determinado gráficamente, haciendo centro en A y cortando la perpendicular por un arco MB, de radio AB.

Estando dado el punto P, el M quedará también determinado por la fórmula

$$PM=\pm\sqrt{4\,R^2-\overline{AP}^2}$$

deducida del triángulo rectángulo AMP (llamando R al radio del círculo), y por ella podremos determinar dos puntos á distinto lado del diámetro, segun se tome uno ú otro signo, que cumplirán con las condiciones del enunciado.

Cuando la distancia dada AP es igual á $AB=2R$, resultará $\overline{AP}^2=4R^2$, y la fórmula da para PM un valor cero, y cuando AP sea mayor que 2R, tendremos $4R^2-\overline{AP}^2<0^2$ y la fórmula da valores imaginarios.

Concuerdan perfectamente estos resultados con la construcción gráfica, porque en el primer caso, el arco MB será tangente en P á la perpendicular PQ, y en el segundo caso no la cortará.

---

## CUESTIONES PROPUESTAS

**76.** (*) Si O es el punto de encuentro de las rectas que unen los vértices de un triángulo ABC á los centros A', B', C' de los cuadrados construídos respectivamente sobre los lados BC, CA, AB, se tiene:

$$1.^{\circ}\ \frac{BB'}{BO}+\frac{CO}{CC'}=1;\quad 2.^{\circ}\ \frac{BO}{BB'}:\frac{CO}{CC'}=\frac{AO}{AA'};\quad 3.^{\circ}\ \frac{BO}{BB'}:\frac{CO}{CC'}=\frac{AB}{AC}$$

*(H. Van Aubel)*

(*) Por un error material dejó de publicarse en el número anterior la cuestión núm. 76

**87.** Sean $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_1$ los cuadrados construídos exteriormente sobre los lados de un triángulo $A_1A_3A_3$ y E el medio de $B_1B_2$ : *a*) Demostrar que, si sobre $EB_1$ se construye el triángulo $EDB_1$ rectángulo en D y tal, que $B_1D = 2\,ED$, el triángulo $A_1DA_3$ será directamente semejante al triángulo $EDB_1$ (*) (*b*). Construir el triángulo $A_1A_2A_3$, dados los vértices $B_1$, $B_2$, $B_3$ de los cuadrados construídos sobre sus lados.

*(H. Van Aubel).*

**88.** Discutir completamente en coordenadas rectangulares ó en coordenadas polares la curva representada por la ecuación polar

$$\rho = a \cos \omega \pm a \sqrt{12 - 15 \cos^2 \omega}.$$

**89.** Se da una circunferencia, una tangente AE, un diámetro ACB. Desde un punto D de la curva, con DB por rádio, se traza un arco de círculo que encuentra AE en los puntos E, F que se proyectan en M, M' sobre la tangente en D. Determinar todas las particularidades del lugar de los puntos M, M'. *(H. Brocard).*

**90.** Se da una circunferencia tangente á los lados de un ángulo recto. Hallar el lugar del punto de intersección de las tangentes á la circunferencia trazadas por las proyecciones de uno de sus puntos sobre las dos tangentes rectangulares dadas.

*(H. Brocard).*

**91.** Resolver las ecuaciones

$$(y-z)^2+l^2=2l(y+z),\quad (z-x)^2+m^2=2m(z+x),\quad (x-y)^2+n^2=2n(x+y)$$

*(E. Lemoine)*

**92.** Si O es el centro del círculo inscripto á un triángulo de referencia ABC; M' el punto cuyas coordenadas normales son: $\frac{1}{a(b+c)}$, etc, M'' el punto cuyas coordenadas normales son: $\frac{1}{a^2}$, etc., se tendrá en magnitud y signo

$$\frac{OM'}{M'M''} = \frac{bc+ca+ab}{4p^2}$$

La recta OM'M'' contiene el punto $\frac{b^2+c^2}{a}$, etc.

Aplicar la transformación contínua á estos resultados.

*(E. Lemoine).*

(*) Se entiende por polígonos directamente semejantes, polígonos que pueden convertirse en homotéticos por una simple traslación, sin giro, de uno de ellos en el plano.

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.