Año II Zaragoza 15 Abril de 1892 Núm. 16

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

GEOMETRÍA DEL TRIANGULO

Algunas propiedades de los triángulos podares y de los círculos de Schoute

POR M. EMILE VIGARIÉ

I

Triángulos podares

1 Dados un triángulo ABC, se trazan por un punto P, tomado en un plano, tres rectas PA_0, PB_0, PC_0 que formen con los tres lados BC, CA, AB y en el mismo sentido, un mismo ángulo θ.

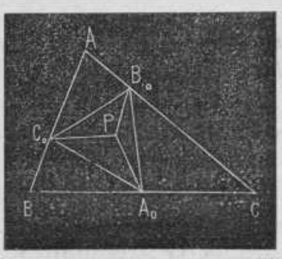
El triángulo $A_0B_0C_0$ así formado se llama el *triángulo podar oblicuo* θ de P. Cuando el ángulo θ varía, el triángulo $A_0B_0C_0$ permanece semejante á sí mismo. Los ángulos de este triángulo se hallan definidos en magnitud y en signo por las relaciones

$$(1) \quad \begin{cases} A + A_0 = \angle BPC \\ B + B_0 = \angle CPA \\ C + C_0 = \angle APB \end{cases}$$

Para poner más en evidencia el sentido de los ángulos, convendría escribir:

$$(A_0B_0, A_0C_0) + (AB, AC) = (PB, PC)$$

y análogamente para los otros dos.



En la figura adjunta las relaciones son evidentes.

Vamos á demostrarlas de una manera general.

Evaluemos (A_0B_0, A_0C_0). Se tiene:

$$(A_0B_0, A_0C_0) = (A_0B_0, A_0P) + (A_0P, A_0C_0)$$

Siendo inscriptibles los cuadriláteros $A_0P\,B_0C$, $A_0P\,C_0B$, tendremos:

$$(A_0B_0, A_0C_0) = (CB_0, CP) + (BP, BC_0) = (CA, CP) + (BP, BA)$$

pero:

$$(CA, CP) + (BP, BA) = (PB, PC) - (AB, AC)$$

de lo que resulta la fórmula general buscada:

$$(A_0B_0, A_0C_0) + (AB, AC) = (PB, PC)$$

En los casos particulares en que las rectas PA_0, PB_0, PC_0 son perpendiculares á BC, CA, AB, el triángulo $A_0 B_0 C_0$ es el *triángulo podar ortogonal* de P.

Cuando el punto P se halla en la circunferencia ABC, todos los triangulos podares se reducen á rectas (rectas de Simson).

2 Evaluemos los lados y el área del triángulo A'B'C' podar del punto P.

Los triángulos ABC, AB'C' dan

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{2R}{AP}$$

designando 2R el diámetro del círculo ABC.

Hagamos:

$$AP = \lambda, \quad BP = \mu, \quad CP = \nu$$

tendremos

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} B'C' &= a' = \frac{\lambda a}{2R} \\ C'A' &= b' = \frac{\mu b}{2R} \\ A'B' &= c' = \frac{\nu c}{2R} \end{aligned} \right.$$

ó bien:

$$a' : b' : c' = \lambda a : \mu b : \nu c$$

luego:

Los lados del triángulo podar de un triángulo P *son proporcionales á los productos de los lados opuestos del cuadrángulo completo* ABCP.

Corolario. — Los triángulos podares de cada uno de los puntos A, B, C, P con relación al triángulo formado por los tres son semejantes entre sí.

Evaluemos la superficie S' de A'B'C'.

Sea E el punto en que AP encuentra al círculo ABC. Bajemos desde P la perpendicular PF sobre BE y tracemos A'M perpendicular á B'C'.

En el triángulo BPF (fig. 2.ª) se obtiene:

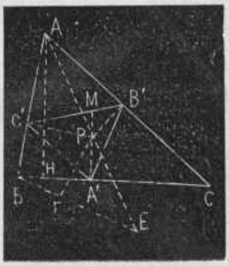


Fig. 2.ª

$$\angle PBF = \angle BPA - \angle FEP = \angle BPA - \angle BCA = C'$$

Los triángulos rectángulos PBF, A'C'M son pues semejantes y dan:

$$\frac{A'M}{PF} = \frac{A'C'}{PB} = \frac{b}{2R}$$

Los triángulos semejantes PFE, ACH (siendo H el pie de la altura trazada desde el punto A') dan:

$$\frac{PF}{AH} = \frac{PE}{AC}$$

De donde, y teniendo en cuenta (2):

$$\frac{C'B'}{CB} \times \frac{A'M}{AH} = \frac{AP\,.\,PE}{4R^2} = \frac{S'}{S}$$

Observemos que AP . PE representa la potencia ϖ del punto P con relación al círculo circunscrito. Aquí (fig. 2), ϖ es negativa y S' positiva. Si ϖ se hace positiva (P es exterior al círculo ABC), S' se hace positiva y se tiene siempre

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{S'}{S} = -\dfrac{\varpi}{4R^2} \\[2ex] S' = -\varpi\dfrac{S}{4R^2} = \dfrac{S}{4R^2}\left(R^2 - \overline{PO}^2\right) \end{cases}$$

siendo O el centro del círculo circunscrito ABC. Luego:

El lugar geométrico de los puntos tales que sus triángulos podares son equivalentes es una circunferencia concéntrica al círculo circunscrito.

Esta proposición da todavía, como caso particular, el teorema de Simson.

Las fórmulas (3) permiten, según los datos, calcular, sea la distancia de P al centro del círculo circunscrito, sea el área del triángulo podar, sea, en fin, la potencia del punto P con relación al círculo ABC.

Se puede proponer todavía evaluar S' en función de las coordenadas normales (x, y, z) del punto P. Se tiene:

$$\frac{PB'C'}{S} = \frac{ayz}{abc};\qquad \frac{PA'B'}{S} = \frac{bxz}{abc};\qquad \frac{PA'C'}{S} = \frac{cxy}{abc}$$

sumando:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S'}{S} = \dfrac{ayz + bxz + cxy}{abc} \\[2ex] S' = \dfrac{ayz + bxz + cxy}{4R} \end{array}\right\} \quad (4)$$

De la comparación de las fórmulas (3) y (4) resulta:

$$(5) \qquad \omega = -\frac{R}{S}(ayz + bxz + cxy)$$

3. Consideremos de nuevo el triángulo podar de P y su triángulo podar de ángulo θ. Siendo semejantes estos triángulos, tendremos:

$$\frac{a_0}{a'} = \frac{b_0}{b'} = \frac{c_0}{c'}$$

Por consiguiente:

$$(6) \quad \left\{\begin{array}{l} a_0 = a\dfrac{AP}{2R} \times \dfrac{PA_0}{PA'} = a\dfrac{\lambda}{2R \operatorname{sen} \theta} = a'\dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta} \\[2ex] S_0 = \dfrac{S}{\operatorname{sen}^2 \theta} \times \dfrac{-\omega}{4R^2} = S'\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \end{array}\right.$$

Luego: ***El triángulo podar ortogonal*** A'B'C' ***es el triángulo podar mínimo.***

Aplicaciones.—Si el punto P se halla en el centro del círculo circunscrito, su triángulo podar es semejante á ABC y sus elementos lineales son la mitad.

Para tener un triángulo podar oblicuo igual á ABC sería preciso tomar *sen* $\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 30^0$.

Pudiéndose obtener los triángulos podares oblicuos por la rotación del haz (P . A'B'C') al rededor de un centro P, y pudiéndose calcular sus elementos mediante las fórmulas (6), sólo nos ocuparemos en lo sucesivo de los triángulos podares propiamente dichos.

Es fácil ver que si se toma un punto P en el plano del triángulo ABC, su triángulo podar tendrá el mismo sentido de rotación que ABC ó tendrá un sentido contrario, según que el punto P se halle en el interior ó en el exterior del círculo ABC. Diremos que en el primer caso el triángulo podar es *directo* y que en el segundo es *retrógrado*.

4 Teorema.—*Dados un triángulo* ABC *y un punto* P *cualquiera* *tomado en su plano, si se construye un triángulo* $A_1B_1C_1$ *tomando sobre* PA,PB,PC *las longitudes* PA_1, PB_1, PC_1 *tales que*

$$PA.PA_1 = PB.PB_1 = PC.PC_1 = K$$

entonces el triángulo podar de P *con relación á* ABC *es semejante á* $A_1B_1C_1$, *y recíprocamente, el triángulo podar* $A'_1B'_1C'_1$ *de* P *con relación á* $A_1B_1C_1$ *es semejante á* ABC.

Según las fórmulas (1) basta probar que se tiene

$$(7) \quad \begin{cases} A + A_1 = \angle BPC \\ B + B_1 = \angle CPA \\ C + C_1 = \angle APB \end{cases}$$

Estas igualdades de ángulos se demuestran fácilmente.

En efecto, se tiene:

$$\angle BPC = A + \angle PBA + \angle PCA$$

Pero $\angle PBA = \angle B_1A_1P$, porque la igualdad $PA.PA_1 = PB.PB_1$ prueba que el cuadrilátero ABB_1A_1 es inscriptible.

Por la misma razón

$$\angle PCA = \angle C_1A_1P, \text{ de modo que } A + A_1 = \angle BPC$$

Pudiendo el punto P ocupar una posición cualquiera en el plano, es preciso, para que la relación sea general, dar signos á los ángulos.

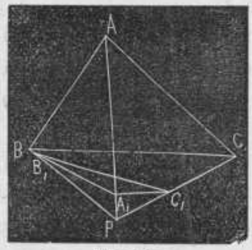


Fig. 3.ª

En la figura 3.ª es evidente que se tiene, en valor absoluto, $A + A_1 = \angle BPC$; pero si se consideran los signos, será preciso, para que la relación subsista, considerar los ángulos B_1A_1K y BPL.

Demos una demostración general.

El preciso demostrar que se tiene, en magnitud y signos:

$$(PB,PC) = (AB,AC) + (A_1B_1, A_1C_1)$$

Para el ángulo A_1, por ejemplo, se tiene:

$$(A_1B_1, A_1C_1) = (A_1B_1, A_1P) + (A_1P, A_1C_1)$$

Igualmente:

$$(AB, AC) = (AB, AP) + (AP, AC)$$

Teniendo en cuenta las relaciones que ligan entre sí los ángulos de los cuadriláteros inscriptibles, se tiene

$$(A_1B_1, A_1P) = (BB_1, BA) = (BP, BA)$$

del mismo modo

$$(A_1P, A_1C_1) = (AC, CC_1) = (AC, PC)$$

Sumemos, y resulta

$$(A_1B_1, A_1C_1) + (AB, AC) = [(BP, BA) + (BA, AP)] + [(PA, AC) + \\ + (AC, PC)] = (BP, AP) + (PA, PC)$$

De aquí la relación general que se busca

$$(A_1B_1, A_1C_1) + (AB, AC) = (PA, PC)$$

lo que demuestra el teorema enunciado.

La misma proposición puede demostrarse evaluando los lados en vez de los ángulos. Se obtiene fácilmente:

$$\frac{a'}{a_1} = \frac{b'}{b_1} = \frac{c'}{c_1} = \frac{AP.BP.CP}{2R.K.}$$

Se probaría del mismo modo que el triángulo podar de P con relación á $A_1B_1C_1$ es semejante á ABC.

Aplicaciones.—1.º Tomemos por P el punto de encuentro H de las alturas, y sean H_a, H_b, H_c los pies de éstas.

Se sabe que se tiene:

$$HA.HH_a = HB.HH_b = HC.HH_c$$

Podremos, pues, tomar $H_a\,H_b\,H_c$ por el triángulo $A_1B_1C_1$, que se confunde también con el triángulo podar de H con relación á ABC. En fin, el triángulo podar de H con relación al triángulo ortocéntrico $H_a\,H_b\,H_c$ es semejante á ABC.

Volvemos á obtener así una proposición conocida.

2.º Cuando el punto P se halla en la circunferencia ABC, su triángulo podar se reduce á la recta de Simson. Es preciso pues que los tres puntos A_1, B_1, C_1 que corresponden á A, B, C, se hallen en línea recta, lo que se verifica por ser la recta $A_1\,B_1\,C_1$ la figura inversa del círculo circunscrito.

5. Teorema.—*Sea un triángulo* ABC, *un punto* P *cualquiera tomado en su plano y el triángulo* $A_1B_1C_1$ *de que se trata. Por el punto* P *se traza una secante cualquiera, y se toman sobre esta recta dos puntos* M, M_1 *tales que*

$$PM.PM_1 = K$$

El triángulo podar de M *con relación á* ABC *y el triángulo podar de* M_1 *con relación á* $A_1B_1C_1$ *son inversamente semejantes.*

Si consideramos los dos triángulos MBC, y $M_1B_1C_1$ se hallarán en el caso del teorema anterior (§ 4), luego:

$$\text{ang.}^o\ BMC + \text{ang.}^o\ B_1M_1C_1 = \text{ang.}^o\ BPC$$

Ahora, si se considera el triángulo $M_a\,M_b\,M_c$ podar del punto M, se tiene según las fórmulas (1)

$$\angle M_a + A = \angle BMC$$

igualmente

$$M'_a + A_1 = A_1M_1C_1$$

siendo $M'_a\,M'_b\,M'_c$ el triángulo podar del punto M_1; y sumando,

$$M_a + M'_a + A + A_1 = BMC + B_1M_1C_1 = BPC$$

Pero hemos visto que

$$A + A_1 = BPC;$$

luego

$$M_a + M'_a = O$$

Los ángulos M_a y M'_a son por consiguiente iguales y de signos contrarios, y lo mismo sucede respecto á M_b y M'_b, M_c y M'_c.

Los triángulos podares $M_a\,M_b\,M_c$, $M'_a\,M'_b\,M'_c$ son pues inversamente semejantes.

6. Triangulos podares de dos puntos inversos.—*Definición.*—El señor coronel Mathieu *(Nouvelles Annales de Mathématiques, 1865)* ha llamado *puntos inversos* á dos puntos P, P_2 que se hallan situados en rectas trazadas por los vértices de un triángulo y simétricas respecto á las bisectrices correspondientes. Estos puntos se han llamado así porque las coordenadas normales $(x_1\ y_1\ z_1)$ del uno son inversamente proporcionales á las coordenadas $(x_2\ y_2\ z_2)$ del otro. Se tiene

$$x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$$

7. Consideremos un punto P_1 definido por las relaciones en que las rectas AP_1, BP_1 dividen á los lados opuestos BC, CA. Diremos que dos puntos ocupan en dos triángulos diferentes la misma posición, cuando las rectas que los unen á los vértices de estos triángulos dividen á los lados opuestos en la *misma* relación.

Teorema.—*El punto* P_1 *ocupa en su triángulo podar* A'B'C' *la misma posición que su punto inverso* P_2 *en el triángulo de referencia.*

En efecto, se tiene:

$$\frac{C'P_1B'}{S} = \frac{P_1C'.P_1B'}{bc}; \qquad \frac{P_1A'B'}{S} = \frac{P_1A'.P_1B'}{ab}$$

de donde

$$\frac{C'P_1B'}{A'P_1B'} = \frac{P_1C'}{P_1A'} \times \frac{a}{c} = \frac{P_2A'_2}{P_2C'_2} \times \frac{a}{c}$$

siendo $A'_2B'_2C'_2$ el triángulo podar de P_2 con relación á ABC.

Pero

$$P_2A'_2 \times a = 2\ \text{área}\ BP_2C \qquad P_2C'_2 \times c = 2\ \text{área}\ AP_2B;$$

luego

$$\frac{C'P_1B'}{CP_2B} = \frac{C'P_1A'}{CP_2A} = \frac{A'P_1B'}{AP_2B} = \frac{S'}{S} \qquad (7)$$

Siendo iguales las relaciones de las áreas, los puntos P_1 y P_2 tienen la misma situación respectiva en A'B'C' y ABC. Se puede añadir también que P_1 tiene con respecto á A'B'C' las mismas coordenadas baricéntricas que P_2 con respecto á ABC.

Se demostraría de la misma manera que P_2 ocupa en $A'_2B'_2C'_2$ la misma posición que P_1 en ABC.

Aplicaciones.--Si P_1 es el centro de gravedad del área del triángulo ABC, P_2 es el punto de Lemoine, y se tiene la proposición conocida: *El punto de Lemoine de un triángulo es el centro de gravedad de su triángulo podar.*

Observación: No se debe creer que, recíprocamente el centro de gravedad es el punto de Lemoine de su triángulo podar, porque el punto de Lemoine K está definido por la condición de que AK divida á BC en la relación $b^2:c^2$, relación que no es independiente de los lados que se consideran.

8. Sean S'_1 y S'_2 las áreas de los triángulos podares de los puntos P_1 y P_2, vamos á calcularlas. Siendo (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) las coordenadas normales de los puntos P_1 y P_2, se tiene:

$$\frac{C'P_1B'}{S} = \frac{y_1 z_1}{bc}, \qquad \text{área}\ BP_2C = \frac{a x_2}{2}$$

Luego, teniendo presente la fórmula (7)

$$\frac{C'P_1B'}{BP_2C} = \frac{S'_1}{S} = \frac{2S x_1 y_1 z_1}{abc\, x_1 x_2}, \quad \text{igualmente} \quad \frac{S'_2}{S} = \frac{2S\, x_2 y_2 z_2}{abc\, x_1 x_2}$$

por consiguiente:

$$\frac{S'_1}{S'_2} = \frac{x_1 y_1 z_1}{x_2 y_2 z_2}$$

es decir, que:

Las áreas de los triángulos podares de dos puntos inversos son entre sí como los productos de las tres coordenadas normales de estos puntos.

Si se hace

$$x_1 x_2 = y_1 y_2 = z_1 z_2 = m^2$$

se tiene:

$$\frac{S'_1 S'_2}{S^2} = \frac{4S\, x_1 x_2 \cdot y_1 y_2 \cdot z_1 z_2}{a^2 b^2 c^2 (x_1 x_2)^2} = \frac{4S^2 m^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{m^2}{4R^2}$$

Pero según la fórmula (3), si ϖ_1 y ϖ_2 designan las potencias de P_1 y P_2 con relación al círculo circunscrito:

$$\frac{S'_1}{S} = \frac{\varpi_1}{4R^2}, \qquad \frac{S'_2}{S} = -\frac{\varpi_2}{4R^2}$$

luego:

$$\frac{S'_1 S'_2}{S^2} = \frac{\varpi_1 \varpi_2}{16R^2} = \frac{m^2}{4R^2}$$

ó bien,

$$\varpi_1 \varpi_2 = 4m^2 R^2$$

Esta última fórmula permite reconocer fácilmente la posición relativa de dos puntos inversos en el plano del triángulo de referencia. Se reproducirán así los resultados obtenidos por Steiner *(Gesammelte Werke,* tomo I, pp. 189-210 y por el coronel Mathieu *(loc cit).*

(Se continuará).

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

(CONTINUACIÓN)

Esta nueva geometría de carácter intuitivo, que ofrece á nuestra vista y á nuestra imaginación directamente el objeto, además de constituir un procedimiento gráfico que realiza lo que nuestra mente concibe, fotografiando los objetos y las relaciones que la inteligencia crea mediante su facultad constructiva y combinatoria, tiene el privilegio de ser fuente inagotable de nuevas creaciones, de poder multiplicar el objeto, por ser al mismo tiempe un método general de transformación de las figuras.

Los procedimientos por los que Monge transforma las figuras del espacio en figuras planas, mediante las proyecciones ortogonales sobre dos planos rectangulares, proporciona diseños de Geometría descriptiva que pueden traducirse en multitud de teoremas. Y estas figuras, que en general contienen rectas perpendiculares ó paralelas entre sí, pueden por la perspectiva ser transformadas en otras en las cuales dichas rectas son concurrentes y afectan posiciones relativas distintas, permitiendo transformar sus teoremas en otros más generales. Además, en muchos casos esta consideración de las figuras en el espacio facilita la demostración de los teoremas, como sucede, por ejemplo, en el caso de la homología en el espacio cuyo conocimiento se adquiere más fácilmente que si se considera en un plano, y según hace ver Chasles en su *Aperçu historique,* ofreciendo varios ejemplos de este método que llama de *Transmutación de las figuras.*

Continuando la Geometría su marcha progresiva, nuevos métodos y conceptos fundamentales se agregan, dilatando en modo considerable sus dominios.

El método de demostrar de Monge, que Chasles define haciéndolo consistir en «considerar la figura sobre la que se ha de demostrar alguna propiedad general en circunstancias de construcción general, en la que la presencia de ciertos punto, planos ó líneas, que en otras circunstancias serían imaginarios, facilita la demostración. En seguida, se aplica el teorema que se ha demostrado así, á los casos de la figura en que estos puntos, planos ó rectas son imaginarios, es decir, que se considera como verdadero en todas las circunstancias de construcción general que puede presentar la figura á la cual se refiere» inaugura una nueva fase de generalización, en la Geometría, que contrasta con los procedimientos restringuidos y de carácter individual de la Geometría antigua. Chasles halla el fundamento de este método en los dos casos que puede ofrecer una figura en su construcción, á saber, «que ciertas partes, (puntos, planos, líneas ó superficies) de las que no depende necesariamente la construcción general de la figura, pero que son consecuencias *contingentes* ó accidentales de la misma, son reales ó palpables; ó bien, que estas mismas partes no aparezcan, por haber llegado á ser imaginarias, sin dejar de subsistir las mismas condiciones generales de las figuras». (1)

Este mismo orden de ideas predomina en la Geometría de posición de Carnot, que considera las figuras en un estado de variación indefinida y continua, al pretender explicar los casos de la correlación *directa, inversa* y *compleja,* dedicándole también Poncelet extensas

(1) Aperçu historique, p. 198.

consideraciones en sus *Applications d' Analyse et de Géométrie* y en su *Traité des propriétes projectives* que le conducen á su teoría de las *secantes ideales* y de las *cónicas suplementarias* y á su principal objetivo; el establecimiento del *principio de continuidad*, al que Chasles prefiere la denominación de *método ó principio de las relaciones contingentes*, esperando que en lo futuro este principio justificado por los procedimientos del Analisis pueda algún día demostrarse *á priori* sobre la base de la consideración de lo *permanente* y lo *variable ó accidental* que dicho geómetra distingue en los varios ejemplos á que aplica sus investigaciones.

La multitud de propiedades proyectivas que constituyen el objeto de la gran obra de Poncelet, como son las relaciones que definen el centro de las medias armónicas, cuyas analogías y correspondencias con el centro de las distancias medidas expresó Mac-Laurin, la extensión al espacio de la relación de homología, la teoría de las polares recíprocas, bella y fecunda creación de aquel geómetra que le permite desenvolver ampliamente el concepto de la *reciprocidad polar*, al que dieron nuevo impulso bajo la denominación de *principio de la dualidad* los escritos Gergonne en *Nouv. Ann. de Mathém*, la obra de Steiner *Systemmatische Entwickelung des Abhängigkeit geometrischer Gestalten*, y por último las obras recientes expuestas según el método de Staudt, independiente de toda expresión ó relación numérica, contienen el conjunto de teorías y métodos que constituyen el fondo del vasto organismo de la Geometría.

La escursión que acabamos de hacer por la historia de la Geometría, desviándonos por un momento de nuestro propósito, nos ha suministrado materiales utilizables para abreviar y esclarecer las nociones preliminares que anteponemos á la exposición de nuestra obra sobre los teoremas, los problemas y los métodos geométricos.

Hemos señalado primero la amplísima generalidad ó universalidad de los métodos analítico y sintético, después hemos hallado la generalidad que revisten los métodos cartesiano, trigonométrico, etc., luego hemos pasado á otros conceptos, si bien generales, de una generalidad concretada ó subordinada á la naturaleza del objeto; y estos conceptos, como son los de polo y polar, de progresión armónica, de homología, de relaciones armónica y anarmónica, implican teorías ó métodos que constituyen sus desarrollos ó son sus aplicaciones diversas. Estos métodos y estas teorías de la ciencia son la expresión que traduce aquellos conceptos que brotan de la inteligencia y adquieren forma en la exposición didáctica, en el organismo que cada escritor construye agrupado de tal ó cual manera, conforme á uno ú otro plan los materiales aquí y allá dispersos, en el inagotable dominio de las ideas. Dichas síntesis en diversas épocas han correspondido á los conceptos intelectuales, señalando su grado de generalidad y el estado especial de la ciencia, que en sus momentos progresivos va disponiendo de procedimientos más fecundos que habilitan á la inteligencia para proceder cada vez con mayor facilidad y rapidez, conservándose siempre la ley de proporcionalidad entre la extensión de aquélla y la eficacia de los instrumentos de que ésta dispone para equilibrar la intensidad de su acción con la resistencia que el objeto le presenta y para ser asimilado bajo la forma de conocimiento.

En la antigüedad, el mecanismo de las proporciones basta á los geómetras para ir acumulando verdades sobre verdades y llegar hasta proposiciones como los lemas de Pappus y los porismas de Euclides. El procedimiento tiene el carácter de la uniformidad, y se concibe perfectamente que sería suficiente para llevar á la ciencia á la altura á que la han colocado los Poncelet, Moebius, Chasles y Steiner. Acumulándose proporciones sobre proporciones, extendiéndose indefinidamente la red de construcciones auxiliares, siempre es posible recorrer en cualquier dirección el encadenamiento de la Geometría, y por tanto llegar desde los elementos de Euclides hasta las más complejas cuestiones de esta ciencia. Pero esta marcha natural de la inteligencia es susceptible de alteraciones ventajosas que abrevien su acceso hacia su objeto final, pues como en la accidentada superficie de nuestro planeta las altas cumbres permiten distinguir vastos territorios con multitud de detalles enlazados entre sí en el fondo que los contiene, hay en la ciencia algunas verdades fundamentales comparables á esos elevados puntos de vista de nuestro ejemplo que permiten dominar agrupaciones más ó menos considerables de otras verdades á ellas subordinadas y en ellas contenidas, como en los dominios de los seres orgánicos, multitud de individuos proceden de un germen en que previamente se halla contenida la posibilidad de su existencia.

Estos principios fecundos de la ciencia, poco numerosos, aparecen espaciados en la historia de la misma, y son como puntos de parada en los cuales la inteligencia reposa realizando un trabajo de gestación que la disponga para conquistar nuevas alturas.

(Se continuará) Z. G. de G.

NOTA RELATIVA Á LA PERPENDICULAR DE RECTAS Y PLANOS

El teorema fundamental relativo á esta perpendicularidad suele fundarse en la igualdad de triángulos. Paréceme qne podría tener ventaja darle base todavía más elemental que permitiese exponer esta teoría desde las primeras páginas de la Geometría, para lo cual pudiera adoptarse el siguiente sencillo plan.

Tras de las primeras definiciones relativas á la recta y al plano y á los ángulos, no solo rectilíneos sino también diedros, se definen las *rectas* y también los *planos perpendiculares* por la condición de formar entre sí dos ángulos adyacentes iguales, los cuales se llaman *rectos*.

Enseguida se demuestra que por

un punto de una recta, en un plano que pasa por ella, se puede trazar una sola recta perpendicular á la misma.	una recta situada en un plano puede pasar un solo plano perpendicular á él.

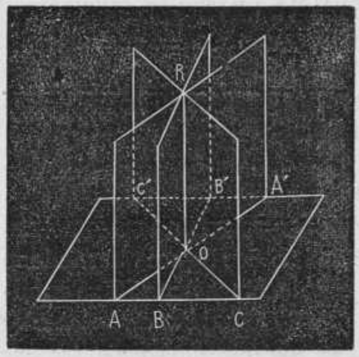
De aquí se deduce: 1.º Que dos ángulos rectos cualesquiera, ya sean los dos rectilíneos ó ambos diedros, son iguales entre sí;

2.º Que la suma de dos ángulos adyacentes es constante é igual á dos ángulos rectos, es decir, que dichos ángulos son *suplementarios*: y, por último,

3.º Que dos ángulos rectilíneos opuestos por el vértice, y también dos diedros opuestos por la arista son iguales entre sí, por tener el mismo suplemento.

Sin más antecedentes, puede demostrarse el teorema fundamental, base de los relativos á la perpendicularidad de rectas y planos en la siguiente forma: . . . .

Si una recta OR es perpendicular á otras OA y OB, que la cortan en un mismo punto O, lo será también á otra cualquiera OC situada en el plano AOB que aquéllas determinan.



Consideremos, en efecto, que el conjunto de este plano AOB y los ROA, ROB y ROC determinados por la recta OR y cada una de las tres OA, OB y OC gira al rededor de la recta OR hasta que el ángulo ROA se coloque sobre su igual ROA′, con lo cual los planos ROB y ROC se colocarán sobre sus prolongaciones ROB′ y ROC′ por la igualdad de los ángulos diedros opuestos por la arista AORB = A′ORB′ y AORC = A′ORC′. Además, por ser iguales los ángulos rectilíneos ROB y ROB′, la recta OB se confundirá con su prolongación OB′ y, por tanto, el plano AOB no habrá cambiado de posición, y la recta OC, intersección de los planos AOB y ROC se habrá colocado sobre su prolongación OC', intersección de los mismos planos: lo cual prueba que los ángulos rectilíneos ROC y ROC' son iguales, ó sea, que la recta OR es perpendicular á la COC', como pretendía demostrarse.

Demostrando este teorema, se pasa á definir lo que se entiende por recta perpendicular á un plano y por ángulo rectilíneo correspondiente á un ángulo diedro, demostrando enseguida: 1.º Que los rectilíneos correspondientes á un mismo diedro ó á diedros iguales son iguales, y recíprocamente (lo cual se prueba por superposición);

2.º Que el rectilíneo eorrespondiente á la suma de dos ángulos diedros es la suma de los rectilíneos correspondientes á los sumandos;

3.º Que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos correspondientes;

4.º Que el rectilíneo correspondiente á un diedro recto es también recto y recíprocamente:

5.º Que todo plano que pasa por una recta perpendicular á otro es perpendicular á éste.

6.º Que si dos planos son perpendiculares, la perpendicular á la intersección situada en uno de ellos es perpendicular al otro; y, recíprocamente, la perpendicular á uno de ellos en un punto de la intersección está situada en el otro plano.

. . . .

EDUARDO TORROJA.

Madrid 1.º Marzo 1892.

FONDAMENTI DI GEOMETRIE

a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare,

LEZIONI DI

GIUSEPPE VERONESE

Professore nella R. Università di Padova.

(CONTINUACIÓN)

Considerando la recta como la *figura fundamental* de la Geometría, se ocupa de la correspondencia de identidad de dos figuras basándose en la *correspondencia unívoca.* Así, por ejemplo, el teorema III se enuncia: *Dos figuras rectilíneas* ...ABCD...M.., ...A'B'C'D'...M'... *determinadas por otras figuras iguales son iguales, si se puede establecer entre sus puntos una correspondencia unívoca tal, que los segmentos rectilíneos* (y por consiguiente también las distancias) *de los puntos correspondientes sean ordenadamente iguales.*

Define enseguida la figura rectilínea determinada por dos rectas, es decir, el *par de rectas* concluyendo enseguida que «dos triángulos ABC, A'B'C' son iguales, si dos lados y el par determinado por ellos son respectivamente iguales».

Después de establecer el axioma V que da una relación entre dos formas fundamentales, continúa con una serie de teoremas relativos á la igualdad de triángulos á la de figuras formadas por dos grupos de m puntos, en el caso de ser ordenadamente iguales los segmentos rectilíneos que tienen por exioma los m puntos dados. Trata del triángulo con un lado infinitesimal, del «campo finito, infinito é infinitesimal al rededor de un punto respecto á una unidad, de la validez de algunos axiomas en el *campo finito absoluto* al rededor de un punto S, ó figura determinada por las rectas que pasan por dicho punto, de las rectas que unen un punto del campo finito con puntos en el infinito, y en fin, de los rayos ó rectas paralelos», dando la definición siguiente: «Un rayo del campo finito dícese *paralelo* á otro rayo en este campo, cuando un punto en el infinito de primer orden del segundo rayo se halla situado en el primero, admitiendo que el punto en el infinito determina la recta con todo punto del campo finito en el caso de la recta cerrada, cuando la unidad del campo finito es infinitesimal de primer orden respecto á toda recta», observando, al terminar una serie de teoremas y corolarios respecto á las rectas y rayos paralelos, que «si la recta es cerrada, por un punto del campo finito al rededor de un punto A, que tiene por unidad toda la recta, no pasa ninguna paralela á una recta dada, pues entonces no tiene razón la definición de rectas y rayos paralelos, porque no hay, respecto á la unidad dada ningún punto en el infinito».

Además, según el teorema IV: «Si la recta es abierta, cualquiera que sea la unidad del campo finito, desde el punto S se pueden conducir dos rectas paralelas á una recta dada que coinciden respecto á la unidad finita, pero no en sentido absoluto».

Con estos precedentes pasa el Sr. Veronese á tratar de *los dos sistemas generales de Geometría*, de Euclides y de Riemann.

«Limitando nuestra observación á un objeto rectilíneo, dice, á primera vista el objeto correspondiente á la recta se obtiene imaginando prolongado indefinidamente en uno ú otro sentido un hilo tenso, el cual parece abierto, de modo que partiendo un punto de una posición inicial A en un sentido dado, no vuelva más á la posición primitiva». Continúa manifestando que esta propiedad tiene lugar realmente dentro del campo de nuestra observación, correspondiente á una parte del campo finito alrededor del punto en que se halla el observador;

pero, añade, esto no significa que tal propiedad deba tener lugar para la recta entera.

Para exponer esta parte difícil de la ciencia el Sr. Veronese hace uso de representaciones gráficas, ofreciendo desde luego una representación de la línea, simplemente cerrada, suponiendo que el observador no puede explorar más que una parte de ella, de manera que éste puede suponerla abierta cuando realmente sea cerrada, siendo además finita en el caso de no admitir éste la realidad del infinito respecto á su unidad sensible. Pero si admite abstractamente el infinito, abstracción hecha de la realidad del mundo externo, puede imaginarse sin contradecirse, que construído todo el campo finito sobre el objeto, á partir del punto C, el objeto en este campo sea abierto, aunque abstractamente la línea correspondiente sea cerrada, en cuyo caso la unidad sensible será infinitesimal respecto á la recta entera y de un orden cualquiera dado respecto de ella.....

De estos razonamientos y los que expone el Sr. Veronese considerando la figura formada por las rectas que unen los puntos de una recta r con un punto R, exterior á ella, pasa á enunciar las tres hipótesis que corresponden, respectivamente, á los sistemas de geometría de Euclides, Lobatschewsky y Riemann, ocupándose á continuación del primero y del último, correspondientes á los casos de la recta abierta y cerrada, llamando *sistema absoluto riemanno* al sistema absoluto que resulta considerar la recta cerrada, y sistema *absoluto euclídeo* al que resulta de considerar la recta abierta en sentido absoluto.

Respecto á este sistema, enuncia el siguiente axioma práctico: *En el campo de nuestras actuales observaciones se verifica con grande aproximación la propiedad de que por un punto sólo puede trazarse una paralela á una recta dada.*

Luego trata de la *recta completa*, de sus *segmentos* y *puntos opuestos*, *segmentos complementarios* y *suplementarios*, uniendo á sus razonamientos representaciones gráficas, de las *rectas* y *rayos paralelos absolutos y relativos*, de los *rayos y segmentos paralelos en el mismo sentido y en sentido opuesto*, de las *figuras iguales en sentido absoluto y relativo*, *sistemas contínuos de figuras cualesquiera invaribles* (en el espacio general), etc.

El libro II tiene por objeto *el plano*.

Lo divide en dos capítulos destinados respectivamente al *haz de rayos y al plano euclídeo y el plano completo (ó de Riemann)*.

Si se prescinde de las consideraciones abstractas sobre el infinito y lo infinitesimal que juegan en el vasto plan trazado por el Sr. Veronese, quedan en el texto las cuestiones que constituyen un curso de

Geometría elemental, que se desprende del fondo de grandiosa generalidad sobre que el distinguido profesor de la Universidad de Padua ha edificado su obra.

Comienza por los *sectores angulares* y *ángulo de un haz de rayos;* considera el haz (Rr_∞) demostrando varias propiedades de éste que le conducen á las proposiciones relativas á la igualdad de triángulos; demuestra que: *los puntos que se hallan en rayos de un haz* (R*r*) *respectivamente á igual distancia de* R *de los puntos de la directriz* r *de* R, *se hallan situados en otra recta* r' *paralela á la primera,* desenvolviendo enseguida las propiedades del paralelógramo, las propiedades fundamentales del plano, la de la perpendicular á éste. Siguen en el § 9 *consideraciones sobre el sistema de los puntos límites absolutos en el infinito de los rayos de un haz* (R*r*) *respecto al centro* R, *ángulos formados por dos rectas paralelas con una transversal común, otras propiedades de los triángulos, figuras simétricas, circunferencia, puntos comunes de dos circunferencias en el plano, figuras congruentes,* etc.; concluyendo con la exposición de *sistemas continuos de una dimensión de figuras invariables en un plano y movimiento real de las figuras en el plano,* acompañando al texto notas que expresan el modo de proceder en el campo finito, la manera de hacer independientes ciertas demostraciones de los puntos en el infinito, y multitud de consideraciones críticas interesantísimas para el conocimiento filosófico de la ciencia.

No nos extenderemos en seguir la exposición que en el capítulo II hace considerando el *plano completo* ó de Riemann, en el que trata de los *elementos polares y perpendiculares* de la *identidad del plano al rededor de sus puntos,* de la *parte del plano respecto á una de sus rectas. Parte externa é interna de un triángulo, segmentos y distancias normales,* etc., é indicaremos, para no dar excesiva extensión á nuestro trabajo, que el capítulo III expone *otras consideraciones sobre los sistemas de Euclides, de Lobatschewsky y de Riemann,* comenzando con el axioma de las paralelas en el sistema de Lobatschewsky y terminado con la suma de los ángulos del triángulo en este sistema.

Después de exponer en el libro III la teoría de *el espacio de tres dimensiones* en forma análoga á la del plano, terminando con el *cono, cilindro, superficie esférica, movimiento real de las figuras en el espacio,* trata de las mismas cuestiones en el *espacio completo de tres dimensiones* para llevar sus últimas generalizaciones al *espacio de cuatro y de* n *dimensiones*, objeto de la parte segunda de la obra del Sr. Veronese de que nos ocuparemos más adelante.

(Se concluirá) Z. G. G.

SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE

PAR M. H. BROCARD

(Voir EL PROGRESO MATEMÁTICO, T. I, pp. 314-317, T. II, pp. 25-27, 88-93)

Le quotient est donc ..... 93114241, dont le produit par 7 est bien égal à ... 51799687.

En réalité, la division de $(n)_1$ est l'opération fondamentale; elle se présente au début de l'examen des propriétés des fractions périodiques, et tout ce que nous venons de dire confirme, vérifie ou établit le théorème de J. PLATEAU.

Les opérations qui précèdent nous ont progressivement amené à reconnaître la possibilité d'effectuer la division de deux nombres premiers entre eux, pourvu que les chiffres du quotient soient déterminés à partir de la droite. Le nombre ainsi obtenu offre une certaine analogie avec les fractions décimales.

L'essai entrepris d'abord sur les nombres $(n)_9$ étendu ensuite à tous les nombres $(n)_p$, nous montre qu'il doit pouvoir s'appliquer à des nombres quelconques.

Voici donc le problème que nous allons traîter.

Soient donnés deux nombres M, N (M > N et N impair, non multiple de 5) *premiers entre eux. On propose de calculer un multiple de* N *exactement terminé par les* p *mêmes chiffres du nombre* M *ou par un groupe désigné de ses derniers chiffres.*

Pour fixer les idées et pour montrer la filière des operations, soient les deux nombres

$$M = 158060898 \qquad N = 647.$$

Formons les 9 premiers multiples de 647

1	2	3	4	5	6	7	8	9
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823

Le nombre donné se terminant par 8, il faut prendre le multiple 2588 correspondant au chiffre 4. Le chiffre des dizaines doit être 9; il faut donc au chiffre 8 des dizaines de 2588, ajouter 1, qui se présente au multiple 1941 correspondant à 3. On aura donc

$$\begin{array}{lr} & 2588 \\ & 1941 \\ \hline \text{somme} & 21998 \\ \text{puis} & 4529 \end{array}$$

afin d'avoir 8 comme chiffre des centaines, etc., etc, La suite des opérations ayant été, croyons-nous, suffisamment expliquée dans ce qui précède, nous la transcrivons ci-après

158060898		
2588. . . .	4	chiffre terminal
1941	3	
21998		
4529	7	
474898		
5176	8	
5650898		
1941	3	
25060898		
58230.	0	puis 9
5848060898		
1941	3	
25258060898		
4529	7	chiffre initial
478158060898		

Ainsi G = 478158060898 est divisible par 647 et le quotient F est égal à 739038734.

En essayant cette méthode sur le nombre G, la division se terminerait; ce serait la règle classique, appliquée au rebours.

Maintenant, on peut se demander si l'opération pourrait être continuée au-delà des chiffres déjà obtenus au quotient F. Evidemment oui; il suffirait d'écrire des chiffres *quelconques* à la gauche du nombre donné M.

Par exemple, soient les nombres M = 587, N = 19. On aura

587	19
57	3
133	7
1387	
152	8
16587 = 873 × 19	

Ecrivons à la gauche de M, des chiffres quelconques, 8, 7, 3, 0.... Nous aurons M′ = 190378587, N = 19, et F′ = 641598873, dont le produit par 19 est également terminé par 587.

Si on avait écrit, à la gauche de M, uniquement des zéros, on aurait obtenu pour F, les chiffres 3, 7, 8, puis, 6, 3, 7, 4, 9, 8, 7, 5,.... Ce serait donc, pour ainsi dire, l'opération correspondant à celle de la réduction en fractions décimales; mais il est intéressant d'observer, à ce sujet, que l'analogie est plus complète qu'elle ne le paraîtrait de prime abord. En effet, dans l'exemple proposé, on aurait

$$\frac{587}{19} = 30,894736842105.....$$

où l'on reconnait l'identité d'un groupe de chiffres, car en définitive, la communauté d'origine des opérations doit entraîner logiquement l'identité des résultats.

Cette identité apparaîtra encore mieux si nous prenons les nombres M précédés ou suivis d'une suite indéfinie de zéros; et si, en particulier, on suppose M = 1, l'induction amène à conclure à l'identité, à l'ordre près, des chiffres obtenus dans la division ordinaire de $\frac{1000...}{N}$ ou dans la division, inverse, de $\frac{....0001}{N}$.

Enfin, pour les raisons déjà exposées, il est évident que l'opération faite sur des séries de zéros à la gauche ou à la droite d'un chiffre autre que l'unité donnera, à l'ordre près, des résultats du même genre que ceux qui ont été obtenus précédemment sur des nombres $(n)_p$.

Ainsi, en faisant l'opération $\frac{....0001}{19}$, on obtiendra, sucessivement, les chiffres suivants:

9, 8, 7, 5, 1, 3, 6, 2, 5, 0, 1, 2, 4, 8, 6, 3, 7, 4, 9, 8, 7, 5, 1, 3.....

qui forment une suite périodique, composée des mêmes chiffres que la période de $\frac{1}{19}$ (Progreso, t. I, p. 315),

$$\frac{1}{19} = 0,052\ 631\ 578\ 947\ 368\ 421\ 052\ 6....$$

Au cours de ces remarques, nous avons rencontré naturellement toutes les particularités de la division ordinaire effectuée en partant de la droite du dividende. Il nons suffira donc de les résumer sur une dernière application numérique.

Soient par exemple les deux nombres.

$$M = 803707594131, \qquad N = 749.$$

La division ordinaire donne pour quotient 1073040846 et pour reste 477.

On peut donc essayer la division de $803707593654 = M - 477$ par 749.

On aura la suite des opérations que voici:

803707593654	749
4494. . . .	6
2996	4
34454	
5992.	8
633654	
0	0
2996	4
30593654	
0.	0
2247	3
2277593654	
5243.	7
54707593654	
0	0
749	1
803707593654	1073040846

Nous avons reproduit chaque fois les chiffres déjà obtenus aux dividendes partiels pour faciliter la vérification des résultats.

On pourrait penser que le quotient obtenu dans l'opération ainsi modifiée de la division de deux nombres quelconques ne doit pas beaucoup différer de celui que donne la règle ordinaire; mais il n'en est rien; l'identité se retrouve seulement dans les chiffres des produits du diviseur par les quotients, mais les chiffres des deux quotients sont complètement différents.

On ne pourra donc tenter la nouvelle division que si l'on est assuré d'avance de sa possibilité, qui naturellement aura exigé un essai préalable au moyen de la règle classique.

La question de la division par la droite ne semble donc pas aboutir à un résultat pratique, mais elle fournit du moins la détermination du second facteur d'un produit dont on connait les derniers chiffres.

Ainsi, en reprenant les nombres donnés, on aura les opérations suivantes:

803707594131	749
6741	9
749	1
14231	
749	1
89131	
3745	5
3834131	
2996	4
33794131	
1498.	2
183594131	
4494	6
4677594131	
5243	7
57107594131	
2996	4
356707594131	
2247	3
2603707594131	
5992	0 puis 8
601803707594131	803476245119

Il reste donc, comme vérification, à faire le produit du diviseur par le quotient:

$$
\begin{array}{r}
803476245119 \\
749 \\
\hline
7231286206071 \\
3213904980476 \\
5624333715833 \\
\hline
601803707594131
\end{array}
$$

On voit que le produit n' est pas égal à M, mais qu'il se termine exactement par les mêmes chiffres.

On pourra traiter et résoudre pareillement la question suivante qui est, en realité, une variante de celle qui vient d'être étudiée:

Quels doivent être les chiffres des dizaines B *et des unités* A *d'un nombre pour que le produit de celui-ci par un nombre* 10 d + u *soit également terminé par* 10 d + u ? (on écartera la solution évidente A = 0, A = 1.).

Ainsi se trouvent confirmés, pas une méthode absolument spéciale, tous les résultats obtenus en Arithmétique dans la théorie de la division ordinaire et dans l'étude des proprietés des fractions périodiques.

Ce moyen, un peu indirect, ne sera sans doute pas appelé à prendre place dans l'enseignement classique; mais il aura fourni du moins le sujet d'une *Récréation arithmétique* probablement nouvelle et qui nous a semblé digne de l'attention de nos lecteurs.

NOTA SOBRE LA CONSTRUCCION DE UNA NORMAL Á LA ELIPSE

por el oficial de ingenieros

D. RODOLPHO GUIMARAES

Demostramos en la página 19 de t. II de este periódico que es siempre posible trazar una normal á la elipse por los puntos que se hallan en las circunferencias de radios $a - b$ y $a + b$.

Debemos ahora observar que existe un punto en la circunferencia de radio $a - b$ tal, que la normal trazada por él pasa por el punto de *desviación máxima* (1).

En efecto, estando definido este punto por la coordenada (2)

$$x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \qquad y = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

la normal en este punto será

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = \frac{c^2}{\sqrt{a+b}}$$

(1) Denominación dada por nuestro ilustrado amigo M. Maurice d'Ocagne.

(2) Véase M. d'Ocagne, *Quelques propriétés de l'ellipse; déviation, écar normal (Nouv. Ann de Mathém* 3.ª serie 1888, y *De la déviation dans l'ellipse* (*idem* T. V, 1886).

y los segmentos que esta normal intercepta sobre los ejes de la elipse tienen por valores

$$\mathrm{ON} = \frac{c^2}{\sqrt{a(a+b)}}, \qquad \mathrm{ON'} = \frac{c^2}{\sqrt{b(a+b}}$$

y por consiguiente

$$\mathrm{NN'} = \frac{c^2}{\sqrt{ab}}$$

Si unimos el centro O de la elipse á un punto cualquiera D de NN', tenemos que del teorema de Stewart resulta

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 . \overline{\mathrm{DN}}^2 + \overline{\mathrm{ON}}^2 . \overline{\mathrm{DN}}^2 = \overline{\mathrm{NN'}}^2 . \overline{\mathrm{OD}}^2$$

y si OD es perpendicular á NN', tenemos

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 . \overline{\mathrm{ON'}}^2 = 2\, \overline{\mathrm{OD}}^2 . \overline{\mathrm{NN'}}^2$$

por consiguiente

$$\mathrm{OD} = a - b \quad \text{y} \quad tg \angle \mathrm{DOA} = tg \angle \mathrm{NON'} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

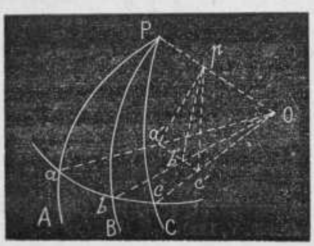
expresión que fija la posición del punto considerado D con respecto á los ejes.

UN TEOREMA DE GEOMETRÍA ESFÉRICA

POR D. ATANASIO LASALA

Catedrático del Instituto de Bilbao

I. *Si tres arcos de círculo máximo concurrentes en* P (fig. 1.ª) *se cortan por otro arco de círculo máximo en tres puntos* a, b, c, *se verifican las relaciones*



$$\frac{sen\, ba}{sen\, bc} : \frac{sen\, \mathrm{P}a}{sen\, \mathrm{P}c} = \frac{sen\, \mathrm{BA}}{sen\, \mathrm{BC}}$$

$$\frac{sen\, ca}{sen\, cb} : \frac{sen\, Pa}{sen\, Pb} = \frac{sen\, CA}{sen\, CB} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{sen\, ac}{sen\, ab} : \frac{sen\, \mathrm{P}c}{sen\, \mathrm{P}b} = \frac{sen\, \mathrm{AC}}{sen\, \mathrm{AB}}.$$

Demostremos la primera.

Trazando por p un plano $pa'c'$ perpendicular al radio OP de la esfera, tendremos (1)

$$\frac{sen\, ba}{sen\, bc} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{Oa'}{Oc'}, \qquad \frac{sen\, BA}{sen\, BC} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{pa'}{pc'},$$

de donde, por división,

$$\frac{sen\, ba}{sen\, bc} ; \frac{sen\, BA}{sen\, BC} = \frac{pa'}{Oa'} : \frac{pc'}{Oc'} = \frac{sen\, Pa}{sen\, Pc};$$

luego

$$\frac{sen\, ba}{sen\, bc} : \frac{sen\, Pa}{sen\, Pc} = \frac{sen\, BA}{sen\, BC}.$$

Igualmente demostraríamos las otras dos relaciones.

2. Observación.—En lugar de tres arcos concurrentes en P se pueden considerar tres planos, con una recta común PO, cortados por el plano aOc, y sustituir en las relaciones (a) los senos de los arcos por senos de ángulos diedros.

3. Antes de exponer las numerosas consecuencias que se deducen del anterior teorema fundamental, creemos necesario demostrar el siguiente

Lema.—*Dado un arco* ab, *pueden siempre marcarse en la circunferencia dos puntos tales que la razón* $\frac{\text{sen ca}}{\text{sen cb}}$ *sea igual en valor y en signo á* $\frac{\text{m}}{\text{n}}$.

Haremos, ante todo, notar que si en una circunferencia O tenemos tres puntos a, b, c, para hallar el signo de $\frac{sen\, ca}{sen\, cb}$ hay que atender á dos cosas: 1.ª al valor de cada arco ca y cb, que según sea menor ó mayor que 180° dará seno positivo ó negativo; 2.ª á la dirección relativa de los segmentos ca y cb, á partir de c; teniendo en cuenta estas dos circunstancias se ve fácilmente que si c está *entre* a y b, es decir, en el arco menor de los que unen estos puntos, ó entre los diametralmente opuestos a' y b', la razón $\frac{sen\, ca}{sen\, cb}$ es negativa, cualquiera que sea el sentido en que se cuente cada uno de los arcos, y si c está en el arco ab' ó en el $a'b$, dicha razón es siempre positiva.

Demostremos ya el lema.

Dividiendo la cuerda ab del arco dado en dos segmentos cuya ra-

(1) Véase la página 287 de este periódico.—T. I.

zón sea $\frac{m}{n}$, por medio del punto d, exterior si la razón dada es positiva, ó interior, si dicha razón es negativa, la recta Od encuentra á la circunferencia en el punto pedido c, porque

$$\frac{da}{db} : \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}b} = \frac{sen\, d\,\mathrm{O}a}{sen\, \mathrm{d}\,\mathrm{O}b} = \frac{sen\, ca}{sen\, cb};$$

pero $$\frac{da}{db} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}b} = 1;$$

luego $$\frac{sen\, ca}{sen\, cb} = \frac{m}{n}.$$

El punto diametralmente opuesto al c satisface también á la cuestión.

El teorema fundamental se verifica, como es fácil comprobar en cuanto á los signos.

Consecuencias del teorema.

4. 1.ª—*Si tres arcos de círculo máximo concurrentes en un punto* P *se cortan por dos arcos cualesquiera* abc, a'b'c', *se verifica*

$$\begin{aligned} sen\,(acb\mathrm{P}) &= sen\,(a'c'b'\mathrm{P}) \\ sen\,(abc\mathrm{P}) &= sen\,(a'b'c'\mathrm{P}) \qquad \text{(b)} \\ sen\,(cba\mathrm{P}) &= sen\,(c'b'a'\mathrm{P}) \end{aligned}$$

5. 2.ª—*El arco bisector de un ángulo interno ó externo de un triángulo esférico divide al lado opuesto en dos segmentos, cuyos senos son proporcionales á los senos de los lados que forman el ángulo.*

En el triángulo aPc, si Pb es el arco bisector del ángulo P, será $\frac{sen\,\mathrm{BA}}{sen\,\mathrm{BC}} = 1$; y en el triángulo aPb, si Pc fuera el arco bisector del ángulo externo adyacente al aPb, los ángulos CA y CB serían suplementarios y, por tanto, $\frac{sen\,\mathrm{CA}}{sen\,\mathrm{CB}} = 1$; luego las dos primeras relaciones (a) se reducen á

$$\frac{sen\, ba}{sen\, bc} = \frac{sen\,\mathrm{P}a}{sen\,\mathrm{P}c}, \qquad \frac{sen\, ca}{sen\, cb} = \frac{sen\,\mathrm{P}a}{sen\,\mathrm{P}b}.$$

La recíproca es cierta.

Caso particular. *El arco bisector del ángulo en el vértice de un triángulo issóceles encuentra á la base en su punto medio; y el bisector* *del ángulo suplementario pasa por un punto de la base situado á 90° del medio de ésta; y recíprocamente.*

6. 3.ª—*El arco trazado desde un vértice de un triángulo esférico al punto medio del lado opuesto, ó á un punto de este lado distante 90° del medio, divide al ángulo en el vértice en dos segmentos cuyos senos son inversamente proporcionales á los senos de los lados que forman el ángulo.*

En el triángulo aPc, si $ba = bc$, será

$$1 : \frac{sen\ \mathrm{P}a}{sen\ \mathrm{P}c} = \frac{sen\ \mathrm{BA}}{sen\ \mathrm{BC}} \quad \text{ó} \quad \frac{sen\ \mathrm{P}c}{sen\ \mathrm{P}a} = \frac{sen\ \mathrm{BA}}{sen\ \mathrm{BC}};$$

en el triángulo aPb, si c dista 90° del medio de ab, los arcos ca y cb serán suplementarios; luego

$$1 : \frac{sen\ \mathrm{P}a}{sen\ \mathrm{P}c} = \frac{sen\ \mathrm{CA}}{sen\ \mathrm{CB}} \quad \text{ó} \quad \frac{sen\ \mathrm{P}b}{sen\ \mathrm{P}a} = \frac{sen\ \mathrm{CA}}{sen\ \mathrm{CB}}.$$

7. 4.ª—*Si unimos el vértice de un triángulo isósceles con un punto cualquiera de la base, queda ésta dividida en dos arcos cuyos senos son proporcionales á los senos de los ángulos que el arco trazado desde el vértice forma con los lados iguales.*

(Se continuará).

VARIEDADES

Problemes de Géométrie analytique, *par E. Mosnat,* professeur agregé au Lycée de Toulon (Paris, Nony et c^ie^, 1892).

El primer tomo de esta obra estaba destinado á las cuestiones más sencillas de Geometría analítica plana. En el segundo tomo el autor trata las cuestiones más difíciles propuestas en Francia, en los concursos para la Escuela politécnica, la Escuela normal y la Agregación. Estas cuestiones se hallan clasificadas metódicamente en cierto número de capítulos precedidos cada uno de un resumen de las fórmulas empleadas en todo el capítulo.

Numerosas figuras dibujadas con suma claridad, complementan el texto.

Esta parte de la obra, generalmente descuidada por la dificultad que ofrece el establecer las curvas con bastante rigor, se trata con gran desarrollo por M. Mosnat.

La obra contiene 100 cuestiones resueltas y 600 propuestas.

American Journal of Mathematic. (Baltimore, S. Newcomb).

El número correspondiente al mes de Abril contiene:

Some theorems relating to groups of circles and Spheres, by W. Woolsey.—Application of Quaternions to Projective Geometry, by C. H. Chapman.—On the Part of the Parallactic Inequalities in the Moon's Motion which is a Function of the Mean Motions of te Sund and Moon, by Ernest W. Brown.—On the Curves wich are Self-reciprocal in a Linear Nulsystem, and their Configurations in Space, by Charles Protens Steinmetz.—A clasification of Logarithmic Systems, by Irving Stringham.

SOLUCIONES Á LAS CUESTIONES PROPUESTAS

Cuestión n.º 38 (véase t. I. pág. 295 y t. II, pág. 30.)

Sobre la hipotenusa BC de un triángulo rectángulo ABC; ó en su prolongación, se toma un punto cualquiera D. Demostrar la relación

$$\overline{AB}.^2\,\overline{DC}^2 + \overline{AC}.^2\,\overline{DB} = \overline{BC}.^2\,\overline{AD}^2$$

(N, C, M) *(H. Van Aubel).*

Aplicación del teorema de Stewart á su resolución por el Sr. Guimaraes:

La expresión que traduce el teorema de Stewart, es de un modo general.

$$\overline{AB}^2.\,CD \pm \overline{AC}^2.\,BD = \pm BC\left(\overline{AD}^2 + BD.\,CD\right)$$

considerando el signo $+$ ó $-$, según que el punto D está en BC ó en su prolongación.

Si multiplicamos ambos miembros por $BC = BD + DC$, y desarrollamos, resulta

$$\overline{AB}^2.\,\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2.\,\overline{BD}^2 \pm BD.\,CD\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2.\,\overline{AD}^2$$

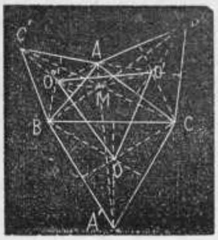
Pero, si el triángulo es rectángulo, como en el caso actual, se tiene

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

luego $$\overline{AB}^2.\,\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2.\,\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2.\,\overline{AD}^2,$$

ya esté el punto en el lado BC ó en su prolongación.

Cuestión núm. 33 (Véase t. I, pág. 295)



Los centros de los triángulos equiláteros construidos, ya exterior, ya interiormente sobre los tres lados de un triángulo, son los vértices de un nuevo triángulo equilátero.

(N. C. M.) *(H. Van Aubel).*

1.ª Solución por D. Angel Bozal, alumno de la Universidad de Zaragoza.

Sean O, O′, O″ los centros de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo dado ABC.

Se sabe que las tres rectas AA′, BB′, CC′ concurren en un punto M, siendo los tres cuadriláteros AMBC′, AMCB′, MCA′B inscriptibles, según se demostró en la pág. 61 al resolver la cuestión 34.

Por consiguiente:

$$OC = OM,\ O'C = O'M;\ OB = OM,\ O''B = O''M,\ O''A = O''M,\ O'A = O'M;$$

luego OO′ es $\perp$ á CM, OO″ es $\perp$ á BM, O′O″ es $\perp$ á AM.

Los ángulos del triángulo OO′O″ son pues, suplementos de los ángulos de 120° formados por las rectas AM, BM, CM; luego son de 60°, y, por consiguiente, el triángulo es equilátero.

2.ª Solución. Se demuestra que AA′ = BB′ = CC′ considerando los triángulos ACA′ y BCB′, ABA′ y CBC′ que son iguales respectivamente por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido.

Pero se tiene además

$$CO = \frac{BC\sqrt{3}}{3},\quad CO' = \frac{AC\sqrt{3}}{3},\quad BO'' = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$$

De las dos primeras resulta que los triángulos OCO′ y CBB′ tienen dos lados proporcionales que forman ángulos iguales á C + 60°, pues

$$OCO' = BCA + OCB + ACO' = BCA + 30° + 30° = C + 60°;$$

y de la misma manera

$$BCB' = BCA + ACB' = C + 60°;$$

luego los triángulos mencionados son semejantes, y nos dan

$$OO' = \frac{BB'\sqrt{3}}{3}$$

Aplicando estas consideraciones á los triángulos OBO″ y CBC′, resulta

$$OO''=\frac{CC'\sqrt{3}}{3} \text{ y } O'O''=\frac{AA'\sqrt{3}}{3},$$

y como hemos demostrado que $AA'=BB'=CC'$, también $OO'=OO''=O'O''$, y el triángulo es equilátero.

CUESTIONES PROPUESTAS

49. Sean OA, OB dos semi-diámetros conjugados de una elipse; F, F′ los focos; $OH=\frac{OF}{\sqrt{2}}$, $OH'=\frac{OF'}{\sqrt{2}}$; K el punto simétrico de H′ con relación á AB. Demostrar:

1.º Que los cuatro puntos A, B, H, K se hallan en una circunferencia.

2.º Que se tiene $\frac{KA}{KB}=\frac{HB}{HA}$.

(C. A. Laisant).

50. Le dan en un mismo plano un triángulo ABC y un punto D. Sobre las rectas indefinidas AD, BD, CD se determinan tres puntos variables A′, B′, C′ por la condición que los triángulos A′BC, B′CA, C′AB sean equivalentes.

1.º Los lados del triángulo A′B′C′ envuelven tres parábolas P_a, P_b, P_c.

2.º Estas parábolas tienen dos tangentes comunes, es decir, se verifica dos veces que los puntos A′, B′, C′ se hallan sn línea recta. Hallar el punto de intersección de estas tangentes.

3.º Hallar los focos y las directrices de las parábolas P_a, P_b, P_c.

(J. Neuberg)

51. Una transversal *d* corta á los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC en los puntos A′ B′ C′. Por A′ se traza una paralela á AB, por B′ una paralela á BC, por C′ una paralela á CA; estas tres rectas forman un triángulo A″B″C″.

Hallar la envolvente de la recta *d*, los lugares de los puntos A″, B″, C″, y los lugares de los puntos de intersección de las rectas AA″, BB″, CC″, ó de las rectas AC", BA", CB", cuando el triángulo A"B"C" tiene una área dada.

(J. Neuberg).

52. Se dan dos rectas rectangulares OA,OB y un punto C, por el que se hace pasar una secante variable ACB, Se describe la circunferencia que tiene AB por diámetro.

1.° Se traza la cuerda MCN perpendicular á AB.

Hallar el lugar de los puntos M, N.

2.° Se traza en B la tangente sobre la que se proyectan los puntos M, N en S, T. Hallar el lugar de los puntos S, T.

(H. Brocard).

53. Demostrar que si se une un punto cualquiera C de una circunferencia O con los extremos de un diámetro AB y se trazan las bisectrices interiores de los ángulos, ACO y OCB obtenidos los cuatro segmentos p, q, r y s del diámetro verifican la relación

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{s^2}{r^2} = 4$$

(J. J. Durán Loriga).

54. Dos perpendiculares indefinidas AY y BZ á una recta giran al rededor de sus piés A y B en sentido contrario y con velocidades doble la una de la otra. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección y discutirla.

(J. J. Durán Loriga).

55. Se tiene una recta indefinida XY y una perpendicular AB (B el pie) á dicha recta. Por el punto A se trazan diversas oblicuas y en sus pies se levantan perpendiculares á ellas, tomando en uno y otro sentido longuitudes iguales á AB. Hallar y discutir la ecuación del lugar geométrico de los extrémos de estas perpendiculares.

(J. J. Durán Loriga.)

56. Se dan dos rectas rectangulares OA, OB y un punto C, por el que se hace pasar una secante variable ACB. Se describe la circunferencia que tiene AB por diámetro.

1.° Se traza la cuerda NCN perpendicular á AB. Hallar el lugar de los puntos M, N.

2.º Se traza en B la tangente sobre la que se proyectan los puntos M, N en S, T. Hallar el lugar de los puntos S, T.

(H. Brocard.)

57. Se dan dos planos paralelos conteniendo, el uno una recta D, el otro una elipse E, cuyo uno de los ejes es paralelo á la recta D. Se pide determinar la superficie de revolución engendrada por esta elipse al girar al rededor del eje D. Casos particulares y comprobaciones.

(H. Brocard.)

58 Se dan dos planos paralelos que contienen, el uno en una recta D, el otro una parábola P cuyo eje es el paralelo á la recta D, Se pide determinar la superficie de revolución engendrada por esta parábola al girar al rededor del eje D. Casos particulares y comprobaciones.

(H. Brocard.)

59. Lugar de los focos de las cónicas que tocan dos rectas OA, OB en dos puntos dados A, B.

(H. Brocard.)

60. Un círculo de radio constante tiene siempre su centro en una elipse. Desde el centro de ésta se le trazan tangentes. Hallar el lugar de los puntos de contacto. Casos particulares.

(H. Brocard.)

61. Hallar el lugar de los focos M de las hipérbolas que tienen un vértice A y una asíntota CB fijos (Problema clásico). Dar una construcción gráfica de la tangente en el punto M.

(H. Brocard.)

62. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{v^2 + xy + y^2}{x + y} = a, \qquad \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = b$$

(R. Guimaraes.)

Nota.—Hemos recibido la solución á la cuestión 46 de D. Ricardo Caro á la 2 del Sr. Sollertinsky y las correspondientes á las cuestiones 44 y 46 del Sr. Schiappa-Monteiro, que publicaremos en el número próximo.

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos