Año V Zaragoza, Junio de 1895 Núms. 54

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 242.

(Véase tomo V, página 56).

Se dan un plano P *y una recta* Δ *que le corta en* A. *Hallar la superficie que tiene por generatrices rectilíneas las mas cortas distancias de la recta* Δ *á las rectas que giran en el plano* P *alrededor del punto* B *de este plano* (problema clásico).

¿Cuál es la traza de esta superficie sobre el plano M *que pasa por* B *y perpendicular á la distancia de* B *á* Δ*?*

(*H. Brocard.*)

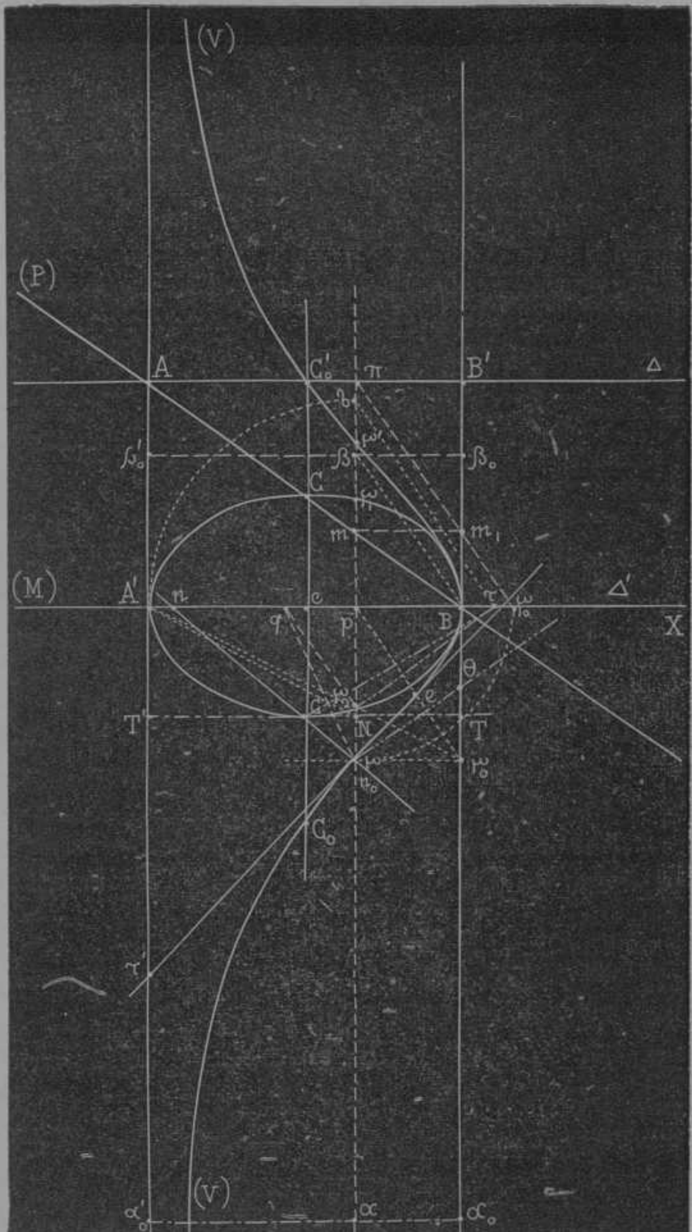
Solución por el Sr. Schiappa Monteiro (A)

Si se traza por el punto B una recta Δ' paralela á la recta Δ y por éstas se hacen pasar respectivamente dos planos (R) y (Q) perpendiculares entre sí, su intersección I cortará al plano (P) en un punto m tal, que la perpendicular $m\pi$ bajada desde este punto sobre la recta Δ será la mas corta distancia entre esta recta y la recta Bm situada en este último plano y que pase por el punto B.

Ahora, cuando los planos (Q) y (R) giran alrededor de las rectas Δ y Δ', permaneciendo continuamente rectangulares, el lugar de su intersección I será, como se sabe, una superficie cilíndrica de revolución que tendrá por sección recta el círculo de diámetro igual á la más corta distancia AA′ del punto A á la recta Δ'; y por consiguiente el lugar del punto m será una elipse (C) cuyo eje mayor 2A será la recta AB.

Según esto, la superficie buscada será un *con ide recto* (K) cuyas directrices serán la recta Δ y esta elipse.

Para hallar la ecuación de esta superficie. en coordenadas rectangulares, tomemos por planos de las XY, XZ é YZ respectivamente el plano (M), el plano determinado por las rectas Δ y Δ' y el plano que pasa por AA', paralelo al plano director (D) de esta superficie.



Esto sentado, si se hace $A'B = 2a$ y $A'A = 2b$, se pueden representar las directrices por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=2b \end{array}\right\} (1) \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{(x-2a)x}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ \dfrac{x}{2a}+\dfrac{z}{2b}=1 \end{array}\right\} (2)$$

donde a y b son las mitades de los ejes A'B y CC' = A'A de la elipse (c), proyección de la elipse directriz (C) sobre el plano (M) ó de las XY (fig.)

Las ecuaciones de una de las generatrices rectilíneas serán:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\gamma(z-2b) \end{array}\right\} (3)$$

donde α y γ son los *parámetros arbitrarios*, ligados aquí por la relación

$$\alpha\gamma^2=(2a-\alpha) \qquad (4)$$

que eliminados entre estas tres últimas ecuaciones darán por ecuación del conoide recto buscado (K)

$$xy^2=(z-2b)^2\,(2a-x) \qquad (5)$$

Haciendo $z=o$ en esta ecuación, se tendrá para ecuación de la traza de esta superficie sobre el plano (M) ó de las XY

$$xy^2=4b^2\,(2a-x) \qquad (6)$$

Se puede también obtener la ecuación de la curva buscada (V) sin partir de la ecuación del conoide (K). Para esto, (fig.) rebatamos el plano de las rectas Δ y Δ' ó de las XZ alrededor de A'B ó del eje de las X sobre el plano (M) ó de las XY. La elipse directriz (C) se proyectará entonces según el segmento AB, y la generatriz que pasa por m se proyectará según la cuerda $p\pi$, de la elipse (c) proyección de aquella elipse en su posición primitiva.

Rebatamos esta generatriz alrededor de su proyección $p\pi$, y para esto elevemos en el punto m la perpendicular $mm_1=p\mu_1=\mu_2 p$ á esta proyección; y $\mu m_1\mu_0$ será su rebatimiento, de modo haciendo centro en p con el radio $p\mu_0$ que describe un círculo (p) cortará á $p\pi$ en los puntos μ y μ' que pertenecen á la curva buscada (V).

Ahora, los triángulos rectángulos semejantes $p\pi\mu_0$ y $m\pi m_1$ dan

$$\frac{mm_1}{p\mu_0}=\frac{m\pi}{p\pi}=\frac{m\pi}{\mathrm{BB'}} \qquad (7)$$

y en virtud de la semejanza de los triángulos rectángulos $m\mathrm{A}\pi$ y BAB', se tiene

$$\frac{m\pi}{BB'} = \frac{A\pi}{AB'} = \frac{A'p}{A'B} \tag{8}$$

de donde
$$\frac{A'p}{A'B} = \frac{mm_1}{p\mu_0} = \frac{p\mu_2}{p\mu} \tag{9}$$

ó
$$\frac{x}{2a} = \frac{p\mu_2}{y} \tag{10}$$

pero la elipse (c), da

$$p\mu_2 = \frac{a}{b}\sqrt{(2a-x)x} \tag{11}$$

luego
$$xy^2 = 4b^2\,(2a - x) \tag{6}$$

Si por el vértice A' de la elipse (c) se traza la recta $A'\mu_2$ que pasa por el punto μ_2 de esta curva, hasta su encuentro μ'_0 con la tangente $B\alpha_0$ en el vértice opuesto B, los triángulos rectángulos semejantes $A'p\mu_2$ y $A'B\mu'_0$ dan la relación

$$\frac{A'p}{A'B} = \frac{p\mu_2}{p'\mu'_0} \tag{12}$$

cuya comparación con la relación (9) muestra ser

$$p\mu_0' = p\mu = y$$

Resulta de esto que la cúbica (V) puede obtenerse aplicando á la elipse (c) la *transformación de* Mac-*Laurin.*

Según esto, si se toma un punto cualquiera μ_2 de la elipse generatriz (c) y se traza la recta $A'\mu_2\mu'_0$, que pasa por este punto y por el punto fijo A', y que por su intersección μ'_0 con la recta $B\alpha_0$ se traza la paralela $\mu'_0\mu$ al eje A'B, su intersección μ con la ordenada $p\mu_2$ de esta elipse será el punto correspondiente de la cúbica engendrada (V).

Discusión.—Para $x = 2a$ se tiene $y = o$, y por consiguiente resulta

$$\frac{dy}{dx} = \infty$$

luego el eje AA' de las y será *asíntota* de la curva.

Tiene tambien esta dos *puntos de inflexión* á distancia finita, puesto que se hallan satisfechas las condiciones que determinan la existencia de estos puntos singulares. Asi para

$$\frac{d^2y}{dv^2} = 0 \qquad \text{se tiene} \qquad xy^2 = 2ab^2$$

y á causa de esta ecuación y de la de la cúbica (6) se deduce que las coordenadas de estos puntos serán

$$x = \frac{3}{2} a, \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} b \tag{13}$$

En la figura el ángulo B'AB que la recta Δ forma con el plano (P) es menor que 45° y por consiguiente la elipse (c) tendrá por ejes mayor y menor respectivamente los segmentos $A'B = 2a$ y $CC' = AA' = 2b$.

En el caso contrario los ejes quedarán invertidos.

Esta elipse (c) se reducirá á un círculo, ó se tendrá $A'B = A'A$, ó $a = b$ cuando este ángulo sea igual á 45°, y la ecuación (6) de la cúbica quedará transformada en la siguiente:

$$xy^2 = 4a^2 (2a - x) \tag{6)'}$$

que es la ecuación de la *cúbica concoidal* estudiada por Doña María Agnesi y á la que dió el nombre de *Versiera* (*).

No entramos en mas de detalles sobre la discusión de la ecuación (b), atendido que no ofrece dificultad, y que esta ecuación establece que la curva correspondiente tiene la forma indicada en la figura y que por otra parte pertene al grupo de *cúbicas unicursales no circulares* ya bien estudiado.

Trazado de la tangente.—1.° Se puede determinar la tangente en un punto cualquiera de la curva (V) considerándola como la traza sobre el plano (M) del plano tangente al conoide en este punto.

En efecto, consideremos el punto μ de la curva y la generatriz $\pi m \mu$ relativa á este punto, así como el punto m de ésta situado en la elipse directriz (C).

Si se traza á la elipse (c) en el punto μ_2, proyección de m sobre el plano (M), la tangente $\mu_2 0$, ésta cortará á la traza $B\alpha$ del plano (P) sobre el plano M en el punto 0, que será la traza sobre este plano de la tangente en el punto m de la elipse directriz (C). Según esto, la traza del plano tangente en el punto m del conoide (K) será la recta $\mu 0$. Así la recta $\mu_2 \tau$ paralela á esta recta, y la recta A'B ó Δ' representarán las proyecciones sobre el plano (M) de dos rectas $m\Theta$ y Δ, que, con el plano director del conoide (K) determinan su *paraboloide de acuerdo* á lo largo de la generatriz $\pi m \mu$, á la cual llamaremos del pri-

(*) Véase.—*Instituzioni Analitiche* art. 238 y *Examples of the proceses of the diferential and integral calculus collected* by D. F *Gregory* 1846, p. 131.

mer sistema. Ahora, estas rectas $m\Theta$ y Δ consideradas como generatrices del segundo sistema de este paraboloide auxiliar y sus proyecciones $\mu\tau$ y Δ', cortándose en el punto τ, sucederá lo mismo á todas las proyecciones de las generatrices de este mismo sistema, puesto que el plano (M) es perpendicular al plano director (D) del primer sistema de este paraboloide; y por consiguiente la recta $\mu\tau$ será la traza, sobre aquel plano, del plano tangente al conoide en el punto μ.

Luego: *para trazar la tangente á la curva buscada* (V), *en un punto cualquiera* μ, *se traza la ordenada* μp, *y en el punto correspondiente* μ_2 *de la elipse* (*c*) *se traza la tangente* $\mu_2\theta$; *y la recta* $\mu\theta$ *que pasa por el punto de intersección* θ *de esta tangente con la tangente* $B\alpha_0$ *en el vértice* B *de esta elipse, será la tangente buscada.*

2.º Partiendo del segundo trazado de la cúbica (V), se puede también determinar facilmente la tangente en un punto cualquiera.

Para esto, tracemos por el punto dado μ la ordenada $\mu\mu_2 p$, y por el punto de intersección μ'_0 del vector $A'\mu_2\mu'_0$ la paralela $\mu'_0\mu$ *á* A'B; la intersección *e* de la tangente $\mu_0\theta$ á la elipse (*c*) y de la recta $p\mu'_0$ es tal, que la recta μe será la tangente buscada (*).

3.º La expresión de la sub-tangente, con relación al eje x, siendo

$$S_t = \frac{2a-x}{a}\,x \qquad (14)$$

dá también una construcción muy fácil de la tangente.

Consideremos, pues, el punto μ y tracemos la recta $\beta_0\beta_0'$ paralela al eje A'B de la elipse (*c*), así como la ordenada $\mu p\mu'$ de la cúbica, y sea β el punto de intersección de estas dos rectas; después tomemos $p\delta = A'p$, y por el punto δ tracemos paralelamente á la recta βB la recta $\delta\tau$ que cortando á A'B en el punto τ, determinará la subtangente $p\tau$, y por consiguiente $\tau\mu$ será la tangente que se pide.

TANGENTES TRAZADAS POR LOS PUNTOS DEL EJE Y DE LA ASÍNTOTA.— Para un punto cualquiera τ del eje A'B se tiene

$$\tau p = A'p - A'\tau = S_t \qquad (15)$$

ó haciendo
$$A'\tau = \lambda, \quad x^2 - 3ax = -a\lambda \qquad (16)$$

de donde
$$x = \frac{3}{2}\,a \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4}a - \lambda\right)a} \qquad (17)$$

(*) Véase *Essai sur la Geométrie de la règle et de l' équerre* par M. G. de Longchamps. 189?. p. 107.

Luego *el valor de la abscisa de los puntos de contacto de las tangentes,* $\tau\mu$, $\tau\mu'$ *trazadas por un punto cualquiera* τ *del eje* AB *de la cúbica* (V) *es igual á la abscisa de los dos puntos de inflexión más ó menos la media proporcional entre el semi eje* $A'c = a$ *de la elipse generatriz* (c) *y la diferencia entre la distancia* λ *de aquel punto al origen* A' *y* $\frac{9}{4}$ *de este semi-eje, según que* λ *sea mayor ó menor que* $\frac{3}{2}a$.

Se vé también que el valor de λ queda comprendido entre 0 y $\frac{9}{4}a$.

La expresión de la sub-tangente con relación al eje de las y siendo

$$S'_t = -\frac{y^2+4b^2}{2y} \qquad (18)$$

origina igualmente una construcción fácil para obtener las tangentes trazadas por un punto cualquiera τ' de la asíntota A'A á la cúbica (V).

En efecto, designando por V la distancia $A'\tau'$ del origen al punto dado τ', se tiene

$$\nu = y + \frac{y^2+4b^2}{2y} \qquad (19)$$

de donde

$$y = \frac{1}{3}\nu \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{9} - \frac{4}{3}b^2} \qquad (20)$$

valores de las ordenadas correspondientes, que solamente serán reales á partir de $\nu = 2\sqrt{3}b$.

En este límite *mínimum* le sub-tangente es igual á $\frac{4}{\sqrt{3}}b$ y corresponde á los puntos de inflexión.

Una vez determinada la ordenada, se puede, como anteriormente, trazar las tangentes que se piden.

Trazado de la normal.— Siendo la expresión de la sub-normal, con relación al eje de las x

$$S_n = -\frac{4ab^2}{x^2} \qquad (21)$$

nos conduce á la siguiente construcción de la normal.

Tracemos la ordenada μp en el punto dado, y la tangente TT' en el vértice C' de la elipse (c), así como su paralela $\alpha_0\alpha'_0$ situada á una distancia del eje Δ' igual á $2A'B = 4a$. Tracemos la recta NA' por el vértice A′ de esta elipse y por el pnnto de intersección N de $p\mu$ y TT′; y por este mismo punto la recta Nq tal, que el ángnlo pNq sea igual al ángulo pA′N, cuyo punto de intersección con A′B es q.

En fin, trazando la recta A′α por el punto A′ y por el punto de intersección α de la ordenada μp con la recta $\alpha_0\alpha'_0$, la recta qn_0 trazada por el punto q paralelamente á la primera A′α, cortará á esta ordenada en un punto n_0 que dará el segmento pn_0 igual á la sub-normal pn; y por consiguiente la normal en el punto μ será μn.

OBSERVACIÓN

Transportemos los planos coordenados paralelamente á ellos mismos, hasta que el nuevo origen sea el punto B′.

Esto sentado, hagamos

$$2a - x = x_1, \; y = y_1, \; z - 2b = z_1$$

y la ecuación (5) del conoide (K) se reduce á

$$x_1 z_1^2 = y_1^2 (2a - x_1) \qquad (5)'$$

La intersección de esta superficie con un plano (N), paralelo al plano (π) de la directriz rectilínea Δ y del eje mayor AB de la elipse directriz (C), y situada á una distancia de este plano igual á $\pm 2b$, será una cúbica (V_2) que tiene por ecuaciones

$$x_1 z_1^2 = 4b^2 (2a - x_1) \;\; \text{y} \;\; y = \pm 2b \qquad (6)''$$

luego, *la proyección de esta curva sobre el plano* (π) *ó de las* xz *será una cúbica completamente igual á la cúbica* (V) *teniendo su vértice en* A *y por asíntota* BB′.

Despues del rebatimiento del plano (π) sobre el plano (N) de la figura, esto se reduce á hacer girar la cúbica (V) al rededor del punto C, hasta que el punto B se confunda con el punto A.

En el caso de ser $a = b$, se obtiene igualmente la *Versiera* de D.ª María Agnesi.

Luego: ***El*** *conoide recto* (K) *no solamente está cortado según la cúbica que se pide* (V) *por el plano* M *y su simétrica* (M′) *con relación á la directriz rectilínea* Δ, *situadas á una distancia de ésta igual á* 2b, *sino que además por otros dos planos* (M_1) *y* (M'_1) *paralelos al plano* (π) *y situados también á esta misma distancia de éste.*

Como se sabe, *cuando un conoide tiene por directriz una curva plana cualquiera* (C), *todo plano secante* (S) *que pasa por la traza* A *de la directriz rectilínea* Δ, *sobre el plano de esta curva y paralela á la intersec-*

ción L *de este plano con el plano director* (D), *corta á esta superficie según una curva* (σ) *del mismo orden de esta directriz.*

Así, *el conoide admite un modo de generación por curvas del mismo orden de su directriz curvilínea plana.*

En nuestro caso la ecuación del plano secante (S) será

$$z = 2b = \alpha x \tag{22}$$

y según la ecuación (5) se tendrá por ecuación de la proyección de la intersección (σ) sobre el plano (XY)

$$y^2 = \theta^2 x (2a - x) \tag{23}$$

que representa una cónica.

Si se tiene $\theta = \frac{b}{a}$, esta ecuación se convierte en la de la elipse (c). Para $\theta = 1$ se tendrá la ecuación de un círculo, etc.

Hemos demostrado esta propiedad de los conoides sintéticamente y de una manera muy sencilla en nuestra *Note sur la génération du conoide circonscrit á une courbe plane au moyen de courbes du même ordre de celle ci* (*).

De igual manera demostramos allí los dos teoremas siguientes que consideramos nuevos:

1.° *Las generatrices rectilíneas de un conoide se hallan divididas en una misma razón anarmónica* λ *por las directrices* (C) *y* Δ; *por un plano secante cualquiera* (S_0) *que pasa por la traza* A *de la directriz rectilínea* Δ *sobre el plano* (P) *de la directriz curvilínea* (C) *y por otro plano* (T) *que pasa por la intersección de estos planos, y cuya traza sobre el plano director* (D) *es perpendicular á la intersección de este plano* (D) *con el plano* (P) *de la directriz curvilínea.*

2.° *Las generatrices rectilíneas de un conoide se hallan divididas homográficamente por cada serie de pares de planos conjugados* (S_0), (T) *que se cortan sobre el plano* (P) *de la directriz curvilínea* (C) *y que pasa por dos rectas de las que la una tiene la misma traza y la misma proyección que la directriz rectilínea* Δ *sobre este plano, la otra tiene esta misma traza y es paralela á la recta que une las trazas de la primera recta y de la directriz rectilínea sobre el plano director* (D).

Además los puntos dobles de todas estas divisiones homográficas de las generatrices están siempre sobre las directrices (C) *y* (Δ); *y los puntos conjugados á los puntos en el infinito se hallarán sobre dos curvas* (I) *y* (J) (distintas ó coincidentes) *homológicas á la directriz rectilínea.*

(*) *Journal de Sciencias mathemáticas Physicas é Naturales*, 1887, t. XLV.

CUESTIÓN 249

(Véase tomo V, pag. 104.)

Sea P *un punto cualquiera tomado en el interior del triángulo* ABC. *En el exterior de este triángulo se construyen los paralelogramos* BCDE, CAKI, ABML *en los cuales los lados* CD *y* BE, AK *y* CI, BM *y* AI *son respectivamente iguales y paralel.s á las rectas* AP, BP, CP. *Las rectas* ED, IK, LM *suficientemente prolongadas forman un triángulo* A'B'C'. *Tambien las rectas* LK,ME, DI *forman el triángulo* A"B"C".

1.º *El exágono* KLMCBI *vale seis veces el* $\triangle$ ABC.

2.º P *es el centro de gravedad de los* $\triangle$ EIL, DKM, A'B'C', A"B"C".

3.º *Los lados de los* $\triangle^s$ A'B'C', A"B"C" *son paralelos á* los *de* ABC *é iguales á los triplos de estos lados.*

4.º *Las rectas* AA", BB", CC" *pasan por los centros* X, Y, Z *de los paralelogramos* BCDE, CAKI, ABML *y se cortan un punto* J".

5.º *Las rectas* AA', BB', CC' *se cortan en un punto* J'.

6.º *Los punto* J" y J' *dividen la recta* GP *aditiva y sustractivamente en la razón 1: 3*(G *es el centro de gravedad* ABC).

(*J. Neuberg.*)

Solución por el Sr. V. Schlegel, (Hagen i/W)

La solución siguiente no supone más que los principios más simples del cálculo geométrico expuesto en este periódico, t. II, p. 281.

I. Se tiene, según las condiciones de la figura:

$$(1)\quad \begin{cases} P - B = K - A = I - C \\ P - C = M - B = L - A \\ P - A = D - C = E - B. \end{cases}$$

Sumando estas fórmulas se obtiene:

$$(2)\qquad 3P = K + M + D = I + L + E,$$

lo que expresa que P *es el centro de gravedad de los triángulos* KMD *y* ILE.

Igualmente por sustracción:

$$(3)\qquad B - C = L - K;\quad C - A = E - M;\quad A - B = I - D$$

lo que quiere decir que *las rectas que unen los vértices próximos de l.s paralelogramos son iguales y paralelos á las aristas opuestas del triángulo.*

Entonces se sigue que los triángulos A_1LK, B_1EM, C_1DI son congruentes con ABC. Ahora se tiene $A_1L = AB = LM = MB_1$; luego

$A_1L = \frac{1}{3} A_1B_1$; por consiguiente, $A_1LK = \frac{1}{9} A_1B_1C_1$. Y si se restan los tres triángulos citados del triángulo $A_1B_1C_1$, resulta que *el exágono* DEMLKI *es el séxtuplo del triángulo* ABC.

2. Sean H, Y, Z respectivamente los centros de los paralelogramos BCDE, ACKI, ABML. Entonces se tiene

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{D+B}{2} = \frac{E+C}{2} \\ Y &= \frac{K+C}{2} = \frac{I+A}{2} \\ Z &= \frac{M+A}{2} = \frac{L+B}{2} \end{aligned} \right.$$

Además:

$$(5)\qquad E-A_2=A-C, \text{ ó } E+C=A_2+A, \text{ ó}$$

Igualmente

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\,X &= A_2 + A, \\ 2\,Y &= B_2 + B, \\ 2\,Z &= C_2 + C, \end{aligned} \right.$$

lo que da el teorema: *Las rectas* AA_2, BB_2, CC_2 *pasan por los centros de los paralelogramos.*

Además resulta de (5) $A_2 = C - A + C$,
ó sustituyendo el valor $E=P-A+B$ (1):

$$A_2 = P - 2A + B + C$$

Luego:

Igualmente

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} A_2 + 3A &= P + A + B + C \\ B_2 + 3B &= P + B + C + A \\ C_2 + 3C &= P + C + A + B \end{aligned} \right.$$

Luego *las rectas* AA_2, BB_2, CC_2 *pasan por el mismo punto:*

$$(8)\qquad 4I_2 = P + A + B + C \text{ (*)},$$

que es el centro de gravedad de los puntos P, A, B, C.

(*) Igualando una suma de puntos á otra ó á un solo punto, es preciso tener cuidado de que las sumas de los coeficientes sean iguales para los dos miembros de la ecuación. Por otra parte dos sumas de puntos así igualadas tienen el mismo centro de gravedad, y los coeficientes anuncian los pesos de los puntos corrrespondientes.

Y sumando las ecuaciones (7) se obtiene:

(9) $$A_2 + B_2 + C_2 = 3P;$$

luego P *es el centro del triángulo* $A_2B_2C_2$.

3. Después se tiene, análogamente á (5):

(10) $$L - A_1 = B - A, \quad \text{ó:} \quad A_1 = L - B + A,$$

ó sustituyendo el valor $L = P - C + A$ (1):

$$A_1 = P - C - B + 2A;$$

luego $$A_1 - 3A = P - B - C - A,$$

ó

Igualmente (11) $$\begin{cases} 3A - A_1 = A + B + C - P, \\ 3B - B_1 = B + C + A - P, \\ 3C - C_1 = C + A + B - P; \end{cases}$$

lo que quiere decir que *las rectas* AA_1, BB_1, CC_1 *pasan por el mismo punto.*

(12) $$2I_1 = A + B + C - P.$$

Sumando las ecuaciones (11) se obtiene:

(13) $$A_1 + B_1 + C_1 = 3P;$$

luego P *es también el centro de gravedad del triángulo* $A_1B_1C_1$.

4. Si G es el centro de gravedad del triángulo ABC, se tiene:

(14) $$3G = A + B + C.$$

Sustituyendo este valor en (8), se obtiene: $4I_2 = P + 3G$, ó

(15) $$P - I_2 = 3(I_2 - G).$$

Igualmente se obtiene de (12)

$$2I_1 = 3G - P \quad \text{ó} \quad (16) \quad P - I_1 = 3(G - I)$$

Las ecuaciones (15) y (16) expresan el hecho de que *los puntos* I_2 *é* I_1 *dividen el segmento* PG *en la proporción* 1 : 3 *y son armónicos con relación á* P *y* G.

En fin, se obtiene sumando (15) y (16): $2P = 4I_2 - 2I_1$

ó $$I_2 = \frac{I_1 + P}{2} \qquad (17)$$

lo que indica que I_2 *está situado en el medio del segmento* PI_1.

CUESTIÓN 212

(Véase tomo IV, página 2:9).

La recta que une los medios de dos lados opuest.s de un pseudo cuadrado es perpendicular á la que une los centros de los cuadrados construídos exteriormente sobre los otros dos y vale su mitad.

(*H. Van Aubel*).

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

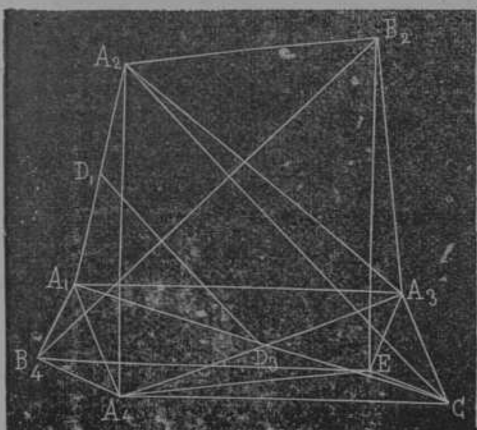
Sea O el centro de semejanza de las diagonales AB, CD de un pseudocuadrado ABCD.

Siendo estas diagonales iguales y perpendiculares, las rectas homólogas OA y OB, OC y OD lo son también. El punto O es, pues, el centro común de los cuadrados construídos interiormente sobre los lados AB, CD.

Por consiguiente, los simétricos O_1, O_2 de O con relación á AB y CD son los centros de los cuadrados construídos exteriormente sobre los mismos lados. La recta O_1O_2 es, pues, paralela y doble de la recta que une los medios de AB, CD; pero en un pseudocuadrado las dos rectas que unen los medios de los lados opuestos son iguales y perpendiculares.

Solución por el Sr. H. Van Aubel

Sean en el pseudocuadrado $A_1A_2A_3A_4$, D_1, D_3 los medios de los lados A_1A_2, A_3A_4 y B_2, B_4 los centros de los cuadrados construídos exteriormente sobre los lados A_2A_3, A_4A_1.



Construyamos los paralelogramos $A_4A_1A_3C$, $A_4A_2B_2E$.

Siendo el punto D_3 el centro del primero, la recta D_1D_3 será paralela á A_2C y valdrá su mitad. Las rectas A_2A_4, B_2A_3 siendo iguales y perpendiculares á A_1A_3, A_2B_2, los dos triángulos $A_3B_2E_1$, EA_4C tendrán dos lados iguales y perpendiculares respectivamente y semejantemente orientados; por consiguiente, el lado A_3E será igual y perpendicular á EC, y el punto E será el centro del cuadrado construído sobre A_3C.

Como A_3C es igual y paralela á A_1A_4, y B_4 es el centro del cuadrado construído sobre A_1A_4, $A_3EB_4A_1$ será un paralelogramo. Teniendo los triángulos CA_4A_2, B_2EB_4 los lados CA_4, A_4A_2 iguales y perpendiculares á B_2E, EB_4 é igual orientación, el lado CA_2 será también igual y perpendicular á B_2B_4, por consiguiente D_1D_2 será perpendicular á B_2B_4 y valdrá la mitad.

CUESTIÓN 220

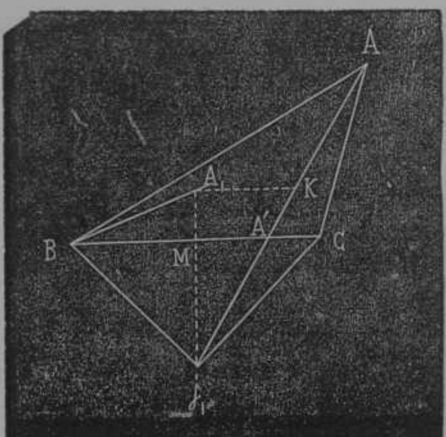
(Véase tomo IV, pag. 311.)

Si en un triángulo ABC *el ángulo* A=45°, *la recta que une el vértice* A *al centro del cuadrado construído exteriormente sobre el lado* BC *pasa por el punto de* **Lemoine** *del triángulo, y la relación de las distancias del punto* A *al punto de* **Lemoine** *y el centro de este cuadrado es igual á la tangente del ángulo de* **Brocard.**

(*H. Van Aubel.*)

Solución por el SR. SOLLERTINSKY (B.)

Sea J_1 el centro del cuadrado construído sobre BC; A′ la intersección de BC y AJ_1.



Puesto que se tiene $\angle BCJ_1 = \angle CBJ_1 = BAC$, el punto J_1 es el polo de BC con respecto á la circunferencia ABC. La recta AJ_1 es, pues, la simediana de A. Ahora, se sabe que el punto de Lemoine K es conjugado armónico del polo J_1 respecto á AA′. Luego

$$\frac{AK}{AJ_1} = \frac{KA'}{A'J_1}$$

ó designando por M_1A_1 el medio de BC y la proyección de K sobre J_1M_1

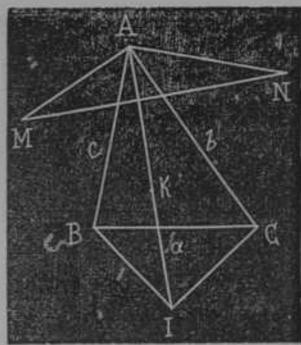
$$\frac{AK}{AJ_1} = \frac{A_1M}{MJ_1} = \frac{A_1M}{BM} = \operatorname{tg} A_1BM$$

y se sabe que $\angle A_1BM$ es el ángulo de Brocard del triángulo ABC.

Solución por el profesor del R. Ateneo de Amberes Sr. T. KLOMPERS.

La circunferencia circunscripta al $\triangle$ ABC es tangente á las rectas BI, CI, puesto que BAC=IBC=ICB=45°.

AI es, pues, una simediana del $\triangle$ ABC.



2.° Se sabe que AI es igual y perpendicular á la recta MN que une los centros de los cuadrados construídos exteriormente sobre los dos lados del $\angle$ A, y que si m es la mediana que parte de A, la distancia

$$\mathrm{A\,K} = \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}\,m.$$

Ahora, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 45°$;

$$4m^2=2(b^2+c^2)-a^2$$

$$\mathrm{AK}^2=\frac{b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \qquad 4m^2=\frac{b^2c^2\,[2(b^2+c^2)-a^2]}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$\mathrm{AK}^2=\frac{b^2c^2\,[b^2+c^2-2bc\cos 45°]}{(a^2+b^2+c^2)^2} \qquad (1)$$

$$\mathrm{MN}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{AN}^2+2\mathrm{AH.AN}.\cos 45°=\frac{b^2+c^2+2bc\cos 45°}{2} \qquad (2)$$

Dividamos (1) y (2) miembro á miembro

$$\frac{\mathrm{AK}^2}{\mathrm{MN}^2}=\frac{2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\frac{16\mathrm{S}^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{MN}}=\frac{4\mathrm{S}}{a^2+b^2+c^2}=\operatorname{tg}\omega.$$

CUESTIÓN 164

(Véase tomo IV, página 128).

Sea un tetraedro ABCD, F_a, F_b, F_c, F_d *las caras opuestas respectivamente á* A, B, C, D, *llamemos* a, b, c, a′, b′, c′, *las aristas* BC, CA, AB, DA, DB, DC. *Sea* A *el punto en que el plano bisector del ángulo diedro que tiene por arista* DA *corta á* BC.

Sea A'_1 *el punto en que el plano bisector del ángulo diedro que tiene por arista* BC *corta á* DA.

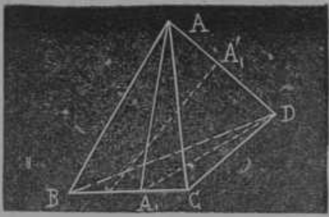
Se tiene:

$$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1}^2=\frac{(\mathrm{F}_b+\mathrm{F}_c)(\mathrm{F}_a+\mathrm{F}_d)[\mathrm{F}_a(c^2\mathrm{F}_b+b^2\mathrm{F}_c)+\mathrm{F}_d(c'^2\mathrm{F}_b+b'^2\mathrm{F}_c)] - a^2\mathrm{F}_b\mathrm{F}_c(\mathrm{F}_a+\mathrm{F}_d)^2-a'^2\mathrm{F}_a\mathrm{F}_d(\mathrm{F}_b+\mathrm{F}_c)^2}{(\mathrm{F}_a+\mathrm{F}_d)^2(\mathrm{F}_b+\mathrm{F}_c)^2}$$

(*E. Lemoine*).

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

Se sabe que el plano bisector de un ángulo diedro divide á la arista opuesta del tetraedro proporcionalmente á las caras adyacentes



Luego

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{F_c}{F_b}, \quad \frac{DA'_1}{A'_1A} = \frac{F_a}{F_d}$$

Se sabe también (teorema de Stewart) que, dividiendo el punto M al lado BC de un triángulo ABC en la razón $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$, se tiene

$$AM^2 = \frac{(m+n)(mb^2+nc^2) - mna^2}{(m+n)^2}$$

Según ésto, el triángulo AA_1D da

$$\overline{A_1A_1'^2} = \frac{(F_a + F_d)(F_a \cdot AA_1^2 + F_d A_1D^2) - a'^2 F_a F_d}{(F_a + F_d)^2}$$

y de los triángulos ABC, DBC resulta:

$$AA_1^2 = \frac{(F_b + F_c)(b^2F_c + c^2F_b) - a^2F_b F_c}{(F_b + F_c)^2}$$

$$A_1D^2 = \frac{(F_b + F_c)(b'^2F_b + c'^2F_c) - a^2F_b F_e}{(F_b + F_c)^2}$$

deduciéndose la fórmula del enunciado.

CUESTIÓN 149

(Véase tomo III, páginas 295).

Discutir y resolver la ecuación

$$4\,x \cos x + (3\,x^2 - 4) \operatorname{sen} x = o$$

(N. C. M.) (*Vecchio*)

Solución por el SR. B..OCARD (H.)

Esta ecuación propuesta en la N. C. M. ha sido estudiada en el *Giornale di Mathematiche* de Battaglini *t. X*, primer sem. 1872, por el Sr. Vecchio, pero estaba resuelta completamente en N. A. M (1856 *p.* 19 — 22). Esta ecuación, dice Terquem, se presenta en la teoría de las oscilaciones de una esfera elástica, y ha sido resuelta por Poisson (Mem. de l'Acad. de Sciences VIII. p. 220) Véase también N. A. M 187, p. 182 — 183, una nota del Sr. Hermann, sobre la separación de las raices.

Hacemos pues, aquí algunas observaciones.

La ecuacion dada resulta de la eliminación de y entre las dos ecuaciones,

$$y = tg\, x \quad , \quad y = 4 \frac{x}{4 - 3\, x^2}$$

La primera representa una curva transcendente muy conocida, formada por una serie indefinida de ramas iguales comprendidas entre las rectas $x = (2\,K \pm 1)\,\frac{\pi}{2}$ que cortan al eje de las x según un ángulo igual á $\frac{\pi}{4}$. Estos puntos son otros tantos centros de la curva.

La segunda representa una cúbica que tiene el origen por centro y admite por asíntotas las rectas $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\, 1.1547\ldots$ y que corta al eje de las x en el origen según el ángulo $\frac{\pi}{4}$. El eje de las x es una tercera asíntota.

La ordenada de esta curva crece más rápidamente que la de la curva $y = tg\, x$ entre 0 $y\ \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente no hay mas punto común que el origen, que es el punto de contacto.

Para $x = \frac{2}{\sqrt{3}} + \varepsilon$, y es igual á $-\infty$, y para $x = +\infty$, $y = o$ (lim. $-\,\varepsilon'$)

Para $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \varepsilon$, y es igual á $+\infty$, y para $x = -\infty$, $y = o$ (lim. $+\,\varepsilon'$)

Las abscisas de la intersección de esta rama hiperbólica con las ramas de la curva $y = tg\, x$ dan los valores de x buscados.

Se reconoce de esta manera que la ecuación propuesta admite por raices aproximadas los valores $x = 2$, $\frac{6 + 2\pi}{2}$ y que los siguientes tes son cada vez mas próximos á $(K - 0)\pi$, decreciendo ε rápidamente y teniendo ε por límite.

En cuanto á las raices negativas, teniendo las dos curvas auxiliares el origen por centro, es evidente que estas raices son iguales, en valor absoluto á las positivas.

Esta investigación, segun las indicaciones anteriores no parece presentar dificultades; daremos pues los resultados hallados por Poisson.

$$x = 2{,}56343423\ldots \qquad x = 6{,}0586701\ldots$$

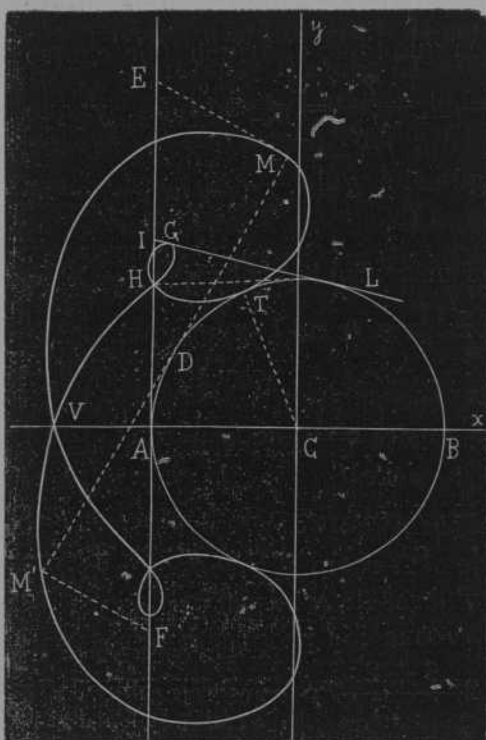
CUESTIÓN 89

Véase tomo II, página 312.

Se da una circunferencia, una tangente AE, *un diámetro* ACB. ***Desde*** *un punto* D *de la curva, con* DB *por radio, se traza un arco de círculo que encuentra á* AE *en los puntos* E, F *que se proyectan en* M, M′ *sobre la tangente. Determinar todas las particularidades del lugar de los puntos* M, M′.

Solución por el Sr. Brocard (H)

El método más sencillo para estudiar este problema nos parece que consiste en referir el círculo de radio 1 á los dos ejes rectangulares CBX, Cy y el punto D á un parámetro u que designa el ángulo BCD. Entonces se tiene para ecuaciones de MD y EM:



$$y \operatorname{sen} u + x \cos u = 1,$$

$$y - \operatorname{sen} u - \sqrt{\operatorname{sen}^2 u - 4 \cos u} = (x+1) \operatorname{tg} u$$

De la primera se puede obtener sen u, cos u, tg u y obtener bajo forma complicada la ecuación del lugar M; pero es preferible obtener u é y en función de u y operar enseguida con estos valores para deducir bastante sencillamente la forma de la curva, y reconocer que ésta se compone de dos bucles principales y de dos bucles interiores cuyos puntos notables corresponden á posiciones particulares del punto D y de la tangente DM.

$$x = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen} u \cos u \sqrt{\operatorname{sen}^2 u - 4 \cos u}$$

$$y = 2 \operatorname{sen} u - \operatorname{sen}^3 u + \operatorname{sen} u \cos u + \cos^2 u \sqrt{\operatorname{sen}^2 u - 4 \cos u}$$

Desde luego el arco mínimo LB está dado por la condición EF=0 ó EA=sen u, lo que se reduce á

$$\operatorname{sen}^2 u - 4 \cos u = 0$$

$$\cos u = \sqrt{5} - 2 = 0{,}23606... \quad u = 76^\circ 21'... = u_G$$

Para este valor de u se tiene un punto G tal, que

$$x_g = 13\sqrt{5} - 30 = 0.93122...$$

$$y_g = 2\sqrt{\sqrt{15} - 2}(8 - 3\sqrt{5}) = 1.2553...$$

Estas son las coordenadas del punto G sobre la tangente al círculo en el punto límite L. En este punto la curva (M) tiene la misma tangente que el círculo en el punto L.

La curva (M) encuentra á la recta AE en 6 puntos H, I, J y sus simétricos respecto de A. Los puntos H, J tienen por ordenadas 1 y 2 y corresponden á $u = 90^\circ$ y $u = 180.^\circ$. El punto H es un punto doble. En cuanto al punto I, la construcción directa hace ver que corresponde á un valor muy próximo de LB y muy poco superior á LB. En efecto, la condición $x = 1$ se reduce á

$$\cos u\,(\cos^2 u + \cos u - \operatorname{sen} u\sqrt{\operatorname{sen}^2 u - 4\cos u} = o$$

ó $$\cos u\,(\cos u + 1)\,(2\cos^2 u - 5\cos u + 1) = o$$

de donde $$\cos u = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = 0.219...$$

u es sensiblemente igual á $77^\circ\ 29'$, mientras que $LB = 76^\circ\ 20'$.

Para obtener los puntos T, T′ de la circunferencia en que la curva es tangente al círculo, basta observar que en estos puntos se tiene

$$1 = \cos 2\theta\,(1 + 2\cos\theta)$$

designando θ el ángulo TBC. Se tiene pues la ecuación

$$2\cos^3\theta + \cos^2\theta - \cos\theta - 1 = o$$

θ es sensiblemente igual á 34° y $u = \pi - 2\theta = 112^\circ$, ó $TCy = 22^\circ$ próximamente.

Los valores m de $\cos u$ para los que y es nulo ó máximo están dados respectivamente por las ecuaciones

$$2m^5 - 3m^4 + 2m^2 + 2m + 1 = o, \quad 5m^4 - 6m^3 + 2m + 1 = o.$$

La expresión de x, correspondiente al punto V de encuentro de las dos ramas de la curva (M) sobre Ax' está próxima á -1.691.

La curva (M) así determinada por sus puntos más esenciales, faltaría determinar la tangente en diversos puntos particulares y la situación de los puntos en que la tangente es paralela ó perpendicular á Ax, lo que dejamos á la curiosidad del lector.

CUESTIÓN 130

(Véase tomo III, página 191).

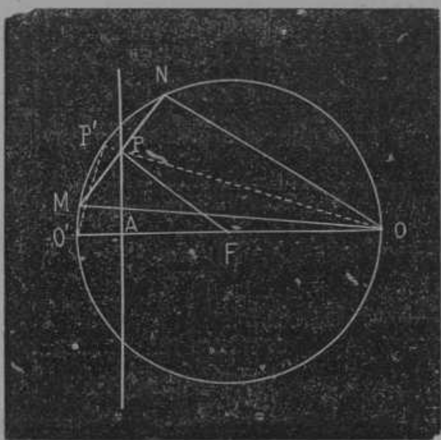
Trazada una circunferencia desde el foco F *de una parábola, encuentra á su eje en* O *y á una tangente cualquiera en* M *y* N. ***Demostrar*** *que la suma de los cuadrados de las distancias* OM *y* ON *es constante.*

(***B. Sollertinsky***).

Solución por el Sr. Sollertinsky (B).

Siendo P′ el medio de MN, se tiene

$$OM^2 + ON^2 = 2(OP^2 + PM^2)$$



Y, si la recta OP encuentra á la circunferencia en P′,

$$OP^2 = OP.OP' - OP.PP'$$
$$= OP.OP' - PM^2$$

Luego $OM^2 + ON^2 = 2.OP.OP'$

Pero el punto P, como proyección del foco F, se mueve sobre la tangente AP en el vértice de la parábola. Por consiguiente siendo O′ el otro extremo del diámetro OF, se tendrá (á causa de las antiparalelas AP, O′P′);

$$OP.OP' = OA.OO'; \text{ luego } OM^2 + ON^2 = 2OA.OO' = \text{const.}$$

CUESTIÓN 242

(Véase tomo V página 56)

Un punto M *se mueve sobre el lado* BC *de un triángulo* ABC; *sean* P, Q *sus proyecciones sobre* AC, AB.

Las rectas BP, CQ *se cortan en un punto* D. ***Demostrar*** *que* D *se mueve sobre una cónica* Σ_a *que toca en* B *y* C *á las alturas* BB′, CC′ *del triángulo* ABC. Σ_a *pasa por el simétrico de* A *con relación al medio de* BC. ***Hallar*** *la tangente en este punto y el centro de* Σ_a.

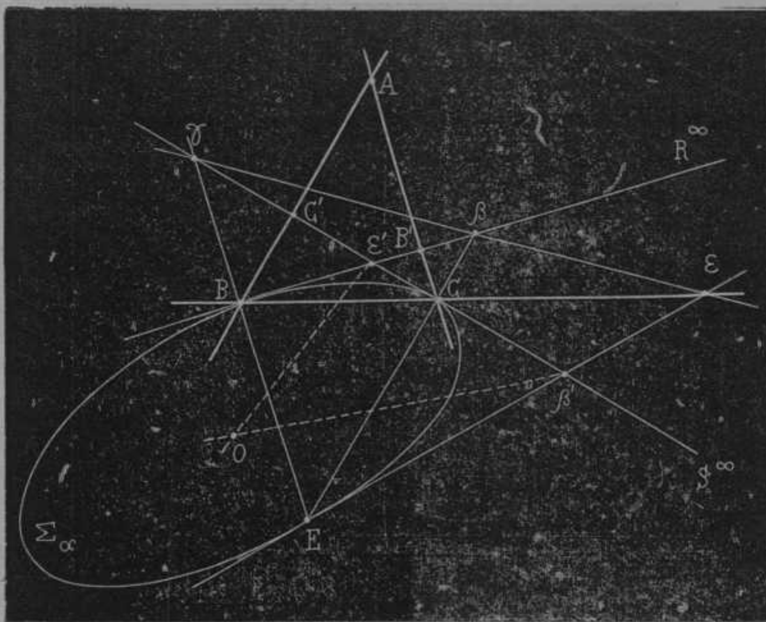
(*J. Neuberg.*)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Si R^∞, S^∞ con los puntos en el infinito de MP, MQ, los dos haces de rayos S^∞(Q,...) y R^∞(P,....) son perspectivos (porque tienen por sección común la punteada (M....) y por esto proyectivos; los dos haces B(P,....) y C (Q,....) son pues también proyectivos y el lugar del punto D es una cónica Σ_a que pasa por B y por C.

Al rayo BC, según que se considera como perteneciente al primero ó al segundo haz, corresponde en el otro el rayo CC′ ó también el rayo BB′. La cónica Σ_a toca pues á BB′ á B y á CC′ en C.

Cuando M va al infinito, sobre BC, los puntos Q, P van al infinito



respectivamente sobre las rectas AB y AC y por esto Σ_a pasa por el punto E simétrico de A respecto al centro del segmento BC.

Designemos con γ la intersección de | CC′ | con | BE |
» » β » » » | BB′ | » | CE |
» » ε » » » | $\beta\gamma$ | » | BC |

La recta ($E\varepsilon$) será la tangente á Σ_a en el punto E. Finalmente, para obtener el centro de Σ_a falta determinar el punto de intersección de las dos rectas que unen los puntos medios de los segmentos BC y CE respectivamente con los polos ε' y β' de las rectas | BC | y | CE |

CUESTIÓN 230

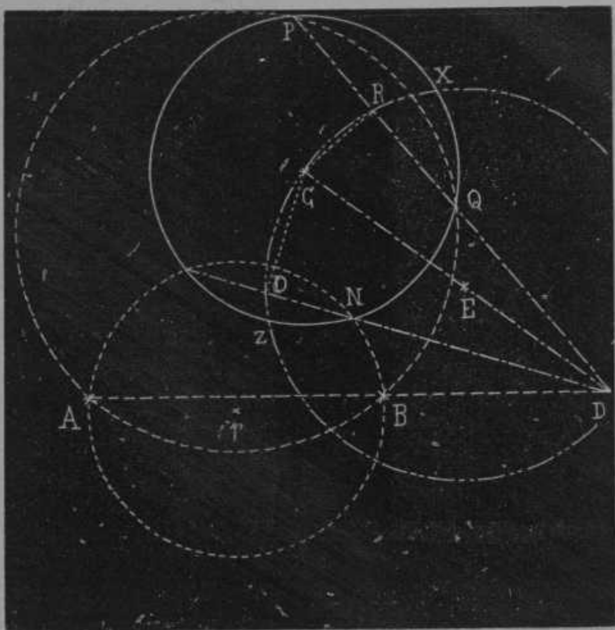
(Véase t. IV. página 312)

Bien conocido es el procedimiento clásico para resolver el problema de trazar una circunferencia que pase por dos puntos A y B y sea tangente á otra circunferencia C: Se pide resolver este problema en el caso en que la recta AB y la cuerda interceptada en C por la circunferencia auxiliar no se cortan en los límites del dibujo.

(*Juan J. Durán Loriga.*)

Solución por el Sr. Fritz, profesor en el Instituto de Gerona.

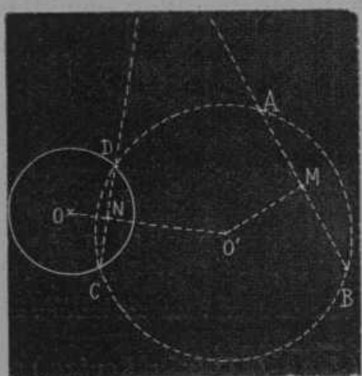
Uniendo el centro C con los O y R (en que la circunferencia E corta á las cuerdas prolongadas MN y PQ) los ángulos formados en O y R serán rectos poa inscritos que abrazan el diámetro CD. Luego



los puntos O y R son los *medios* de las cuerdas MN, PQ y el arco XCZ el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia C que prolongadas pasan por D.

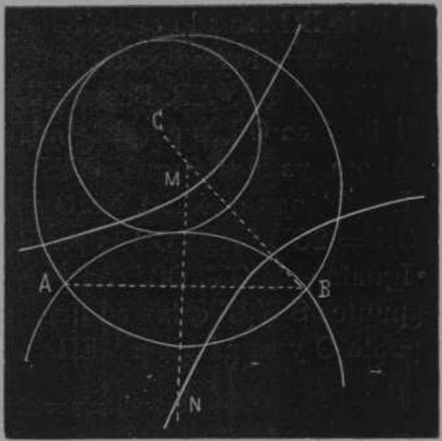
Dos de estos puntos y el C bastarán para determinar la circunferencia E aunque el punto D salga de los limites del dibujo.

Solución por el Sr. Luzón de las Cuevas (D. J.)



La cuestión queda reducida por la construción ordinaria á trazar una tangente á la circunferoncia O, desde el punto de encuentro de AB y CD. El punto de contacto está en la circunferencia determinado por O' y los pies M y N de las perpendiculares á AB y CD, según la elegante solución que dió á este último problema el comandante de Ingenieros señor Beyens publicada en una revista extranjera.

Solución por el Sr. CARO (D. R.)



Este problema, en el caso del enunciado, puede considerarse como caso particular del círculo tangente á otros tres, con solo suponer iguales á cero, los radios de dos círculos.

Trácese sobre CB una hipérbola, tomando estos puntos como focos, y cuya diferencia de valores sea el radio de C. La perpendicular levantada en el punto medio de AB, determinará sobre la hipérbola los M, N que son los centros de las dos soluciones (V. t, 3.° página 169).

CUESTIÓN 152.

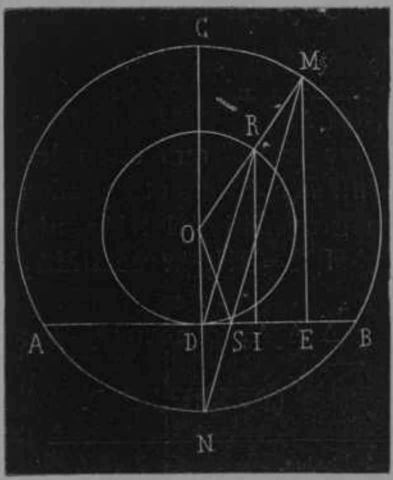
(Véase tomo III, página 295).

Sea M *un punto cualquiera del círculo circunscripto al triángulo equilátero* ABC. *Demostrar que las rectas que unen este punto á los medios de los arcos subtendidos por los dados, encuentran á estos lados sobre el diámetro del círculo paralelo á la recta de Simson del punto* M.

(*B. Sollertinsky.*)

Solución por el SR. BROCARD (H).

Actualmente tengo ocasión de recordar que la geometría de la recta de Simson (ó de Wallace, segun el *Intermédiaire des mathématiciens*, t. I, 1894, p. 174) ó de la línea pedal del triángulo, y de su envolvente, la hipocicloide de tres retrocesos, se reduce á esta propiedad muy sencilla:



Proyectar desde un punto R de la circunferencia llamada de los nueve puntos (ó de Euler) sobre un lado ABC del triángulo, ó tomar, sobre este lado, el doble DE del segmento DI interceptado por la línea proyectante RI y por la altura CD que le es paralela. La recta ER que une este nuevo punto E al primero R, es la línea pedal.

En el caso del triángulo equilátero el círculo de Euler es tangente al lado BC tomado como base.

Tracemos el círculo de centro O y de radio, OM = 2. OR. Sea N el medio del arco AB. Bastará demostrar que si MN encuentra á AB en S, la línea OS es paralela á ER.

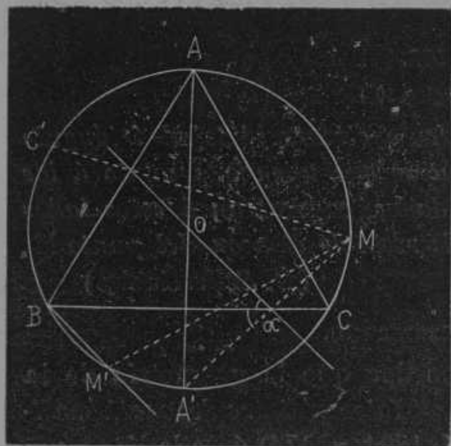
Ahora, ya el triángulo OSN es isósceles.

Los triángulos DRO, NMO son isósceles y semejantes, OM = 2.OR = ON = 2OD luego OS es paralela á ER.

Igualmente OS′, OS″ son paralelas á ER, y se deduce de esto que los puntos $S_1 S'_1 S''$ estan en línea recta y que la recta SS′S″ pasa por el punto O y es paralela á ER.

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

Si la perpendicular de M sobre AC encuentra á la circunferencia en M′, la recta de Simson del punto M es paralela á BM′.



Sea α el punto en que la recta que une M al medio de A′ del arco BC encuentra al lado BC.

Siendo MM′ y CA′ paralelas, se tiene $\smile$ CM = $\smile$ A′M′ de donde

$$\angle CBM' = \left(\smile \frac{CA' + A'M'}{2} = \right.$$

$$= \smile \frac{A'B + CM}{2} = \angle B\alpha A' = \angle O\alpha B$$

Luego Oα y BM′ son paralelas.

CUESTIONES PROPUESTAS

253. Sean H_1, H_2, H_3, los medios de las rectas que unen los vértices exteriores de los cuadrados construídos sobre los tres lados de un triángulo $A_1A_2A_3$ y G el centro de gravedad del triángulo $H_1H_2H_3$. Si se prolonga GH_1 en una longitud $H_1M = GH_1$, la recta MA_1 será perpendicular á H_2H_3 y valdrá su tercio.

(Este teorema servirá para construir el Δ $A_1A_2A_3$ conociendo los puntos H_1, H_2, H_3).

(*H. Van Aubel*).

Zarag.— Imp. de C. Ariño Coso 100 bajos.