Año III Zaragoza 15 Noviembre de 1893 Núm. 35

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

CONTINUACIÓN (Véase t. II págs. 195-207, y t. III, 171-250).

49. PRINCIPIOS RELATIVOS Á LA PROYECCIÓN DE LAS FIGURAS.—Uno de los recursos de gran eficacia para facilitar las demostraciones de los teoremas ó la resolución de los problemas geométricos, que en manos de Poncelet se convierte en un método general, es el procedimiento de la proyección de las figuras sobre un plano situado de una manera conveniente, de modo que la proposición:

Una figura plana cualquiera que contiene un sistema de rectas ó de curvas que se cortan en un punto, puede siempre considerarse como la proyección de otra del mismo género ú orden, en la cual el punto de intersección ha pasado al infinito y las rectas correspondientes han pasado á ser paralelas, y recíprocamente *una figura que contiene un sistema de rectas ó curvas, paralelas ó concurrentes en el infinito tiene en general por proyección en un plano cualquiera una figura del mismo género en la que las líneas correspondientes concurren en un común á distancia finita, proyección del punto del primer sistema*, constituye un principio fundamental de la teoría de Poncelet, principio cuya exactitud se reconoce en cuanto se elige como plano de proyección uno que sea paralelo á la recta que une el punto común del primer sistema con el centro de proyección, según se ve en la fig. 47.

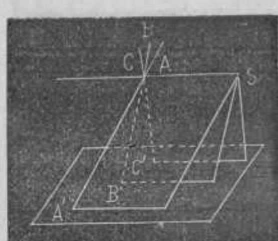


Fig 47.

Pero sobre todos tiene extraordinaria importancia y numerosísimas aplicaciones que Poncelet desarrolla en sus dos obras citadas, el siguiente: *Una figura plana cualquiera en que hay una recta y una sección cónica, puede, en general, considerarse como la proyección de otra, en que* *la recta ha pasado totalmente al infinito y la sección cónica se ha reducido á un círculo.*

Tratando, por ejemplo, del teorema de Carnot concerniente á los segmentos que los lados de un polígono ó sus prolongaciones forman en una transversal, Poncelet observa que, siendo la relación por demostrar por su naturaleza proyectiva, basta establecerla para el caso en que la transversal pasa al infinito, lo que se consigue mediante la proyección de la figura sobre un nuevo plano, pues haciéndose todos los segmentos infinitos, la relación de dos cualquiera de ellos es igual á la unidad.

Para demostrar que los lados correspondientes de un triánglo circunscripto á una cónica, y el inscripto formado uniendo con rectas los puntos de contacto del primero, se encuentran en tres puntos de una recta KL considera la curva como proyección de un círculo y KL como la proyeccion de una recta situada en el infinito; y como entonces la figura se reduce á la 48, en la que los lados *ab* y AB, *ac* y AC, *bc* y BC se encuentran en la recta en el infinito, esto se verificará también para su proyección que es la figura propuesta.

Fig. 48.

También considerando la fig. 49, en la que evidentemente las diagonales del triángulo inscripto y del paralelogramo circunscripto se encuentran en el mismo punto O medio de todas ellas como proyección de la figura formada por un cuadrilátero inscripto en una cónica y la recta que une los puntos de intersección de los lados opuestos, concluye que, para la figura general 50: 1.º *Las cuatro diagonales de los dos cuadriláteros se encuentran en un punto* P. 2.º *Que los puntos de intersección de los lados opuestos del cuadrilátero inscripto y del circunscripto se encuentran en la polar de dicho punto* P, etc.

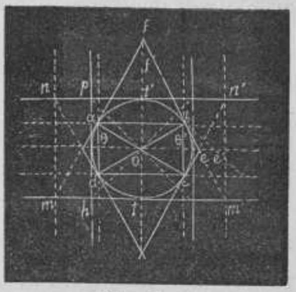


Fig. 49.

Fig. 50.

Asimismo, para demostrar que en la figura 51 los puntos O, O',... se hallan en línea recta, suponiendo la cónica y el punto *a*, reducidos respectivamente á ser un círculo y un punto en el infinito, que reduce aquella figura á la 52, deduce de esta propiedad, evidente en el caso actual, la misma propiedad para su proyección, ó sea la figura del enunciado.

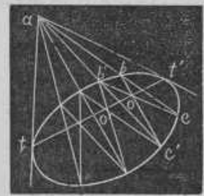


Fig. 51.

Por último, las figuras 53, 54, 55 y 56 indican al lector otros dos casos en que Poncelet emplea su método de demostración, esto es, al demostrar la propiedad de las transversales *ab'* y *a'b*, *bc'* y *b'c*, etc., que unen inversamente los puntos de intersección de los rayos de un lado con dos rectas fijas (figs. 53 y 54), consistente en que estos se hallan en línea recta, y y al demostrar (figs. 55 y 56) la propiedad de los triángulos homológicos.

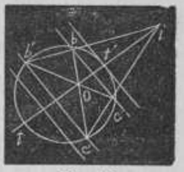


Fig. 52.

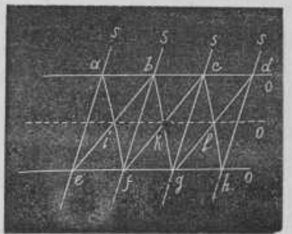


Fig. 53.

Además del principio de continuidad, de que tan importantes aplicaciones hace Poncelet con auxilio de los elementos *ideales* y en el *infinito*, objeto de la breve exposición que precede, ocupa un lugar importantísimo el principio de *reciprocidad geométrica* hoy llamado de *dualidad* á que se refieren sus teorías de las *figuras homológicas* y *polares recíprocas*, las cuales basta que citemos ahora.

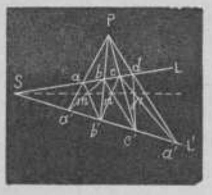


Fig. 54.

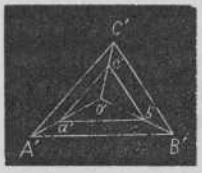


Fig. 55.

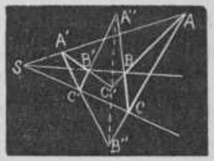


Fig 56

§ 2.º — El cálculo baricéntrico de Moebius

50. El cálculo baricéntrico de Moebius es un sistema de Geometría analítica que este eminente geómetra dió á conocer en 1827 (*), y constituye el primer sistema de coordenadas homogéneas que apareció en Alemania casi al mismo tiempo que Bobillier en Francia exponía su sistema fundado en la determinación de un punto de un plano por sus distancias á los tres lados de un triángulo fundamental, ó á

(*) Darstellung des barycentrischen Calculs und einer darauf gegründeten analytischen Geometrie (Erster Abschnitt).

las cuatro caras de un tetraedro fundamental, si el punto se considera en el espacio, sistema de coordenadas *superabundantes* (puesto que una de ellas está incluída en las restantes ó determinada por una relación que las liga

$$-aA-bB-cC=2S \quad \text{ó} \quad -aA-bB-cC-dD=3V)$$

como las llama M. Paul Serret en su *Géometrie de Direction*, donde se halla ampliamente aplicado dicho sistema á multitud de cuestiones sobre curvas y superficies.

El sistema de Moebius tiene, como se sabe, por fundamento, la consideración del centro de gravedad de varios puntos ligados cada uno á un coeficiente, que hoy se llama el *centro de las distancias proporcionales*, el cual tiene la propiedad de que, cuando por A, B, C,... P se trazan rectas paralelas en cualquier dirección, y un plano cualquiera las corta en los puntos A′, B′, C′,... los segmentos paralelos AA′, BB′, CC′,... se hallan ligados por la relación

$$\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+...=(\alpha+\beta+\gamma+...)\,PP'$$

(supuesto $\alpha+\beta+\gamma+...$ distinta de cero, pues si no el centro de gravedad no existiría ó estaría en el infinito), siendo, por consiguiente,

$$\alpha A+\beta B+\gamma C+...$$

la *expresión baricéntrica* del punto P.

Esto conduce á demostrar que cuando

$$aA+bB\equiv C,$$

C (que es el centro de gravedad del sistema de puntos A y B) está en línea recta con A y B, teniendose además la relación $a:b=BC:CA$, ó lo que es igual, la expresión homogénea de la línea recta

$$aA+bB+cC=0 \quad \text{con la relación } a:b:c=BC:CA:AB,$$

y continuando las deducciones, que cuando

$$aA+bB+cC\equiv D$$

y A, B, C no están en línea recta, D se halla en el plano de los tres primeros puntos, teniéndose además la relación

$$a:b:c=\triangle DBC:\triangle DCA:\triangle DAB$$

(Pues si $a+b$ se supone distinta de cero (*), será

$$aA+bB=(a+b)Z \quad \text{y} \quad D\equiv(a+b)Z+cC$$

(*) Una de las tres sumas $a+b$, $b+c$, $a+c$ tiene por lo menos que ser nula, pues si no $a+b+c$ sería $=0$.

y por estar en línea recta C, D y Z

$$a+b:c=\mathrm{CD}:\mathrm{DZ}=\mathrm{BCD}:\mathrm{BDZ}=\mathrm{ACD}:\mathrm{ADZ}, \quad (1)$$

luego

$$\mathrm{DBZ}:\mathrm{DZA}=\mathrm{DBC}:\mathrm{DCA},$$

y por hallarse Z en la recta AB,

$$a:b=\mathrm{BZ}:\mathrm{ZA}=\mathrm{DBZ}:\mathrm{DZA}, \quad \text{y} \quad a:b=\mathrm{DBC}:\mathrm{DCA},$$

también

$$b:a+b=\mathrm{DZA}:\mathrm{DBZ}+\mathrm{DZA}=\mathrm{ADZ}:\mathrm{DBA}; \quad (2)$$

y de (a) y (b) resulta

$$b:c=\mathrm{ACD}:\mathrm{DBA}=\mathrm{DCA}:\mathrm{DAB})$$

Ó expresándose más simétricamente: Si

$$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}+d\mathrm{D}=0,$$

los puntos A, B, C, D se hallan en un plano y ligados por la relación:

$$a:b:c:d=\mathrm{BOD}:-\mathrm{CDA}:\mathrm{DAB}:-\mathrm{ABC}\ (*)$$

En fin, para el caso más general del espacio, enuncia Moebius el teorema siguiente: Si

$$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}+d\mathrm{D}\equiv\mathrm{E},$$

y A, B, C, D no se hallan en un plano, existen las relaciones

$$a:b:c:d = \text{las pirámides } \mathrm{BCDE}:\mathrm{CDEA}:\mathrm{DEAB}:\mathrm{EABC}$$

O más simétricamente: Si

$$a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}+d\mathrm{C}+e\mathrm{E}=0,$$

los puntos A, B, C, D, E se hallan ligados entre sí por la relación

$$\mathrm{BCDE}:\mathrm{CDEA}:\mathrm{DEAB}:\mathrm{EABC}:\mathrm{ABCD}=a:b:c:d:e$$

Lo que acabamos de expresar constituye el fundamento del sistema de Geometría analítica que da á conocer Moebius en su obra *Der Baricentrische Calcul*. Así: 1.º Tomando A y B como puntos fundamentales, $p\mathrm{A}+q\mathrm{B}$ es la expresión de todos los puntos de la recta que los une, correspondientes á los valores de la relación $\frac{p}{q}$

2.º Siendo ABC tres puntos fundamentales de un plano (á BC, CA, AB llama las rectas fundamentales y á ABC el triángulo fundamental), $p\mathrm{A}+q\mathrm{B}+r\mathrm{C}$ es la expresión de cada punto P del plano que corresponde á los valores de las relaciones $p:q:r$.

3.º Siendo A, B, C, D cuatro puntos, no situados en un plano, los

(*) Tanto en los segmentos AB, BC, AC como en los triángulos ABC, etc. ó en los tetraedros ABCD, etc. Moebius considera las direcciones opuestas correspondientes á los signos + y −

puntos fundamentales, AB, AC, etc., BCD, CDA, etc., y ABCD, etc. las líneas, planos y tetraedros fundamentales, $pA+qB+rC+sD$ es la expresión de un punto en el espacio determinado por los valores de las relaciones entre los coeficientes, p, q, r, s.

Las someras indicaciones que preceden son suficientes para conocer el sistema geométrico de Moebius que en la obra citada aplica á las teorías de las líneas, superficies, semejanza, afinidad, colineación, doble razón, etc.

§ 3.º—Método de la «relación anarmónica» de Chasles

51. Ya se ha tratado varias veces de las investigaciones de Chasles sobre los porismas de Euclides, cuya adivinación obtuvo basándose en los lemas de Pappus, exponiéndose cómo este geómetra llevó á cabo su empresa tomando como guía las huellas que en dichos lemas se encuentran de las teorías de las *transversales*, las relaciones *armónica, anarmónica,* etc., hasta el punto que, como dice en su obra, *Les trois livres de Porismes d'Euclide* (pág. 13), «era preciso dar previamente á las tres teorías de la *relación anarmónica,* de las *divisiones homográficas* y de la *involución* los desarrollos de que son susceptibles los gérmenes que se encuentran de ellos en los lemas de Pappus, lo que ha pretendido hacer, añade, en el *Traité de Géométrie supérieure,* obra cuyas bases forman esta teoría.»

Antes de publicar esta obra, en que Chasles reunió bajo unidad de plan, no sólo los conceptos importados de la ciencia griega, sino de los geómetras del siglo XVII, con objeto de crear la cátedra de *Geometría superior*, fundada por el Ministro de Instrucción pública en Francia, ya este geómetra había expuesto en su *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie* la importancia capital del concepto de la *relación anarmónica*, considerando como fundamental la proposición 129 de Pappus, ó sea que: *cuando cuatro rectas parten de un punto, forman en una transversal, trazada arbitrariamente en su plano, cuatro segmentos que tienen entre sí cierta relación constante*, es decir, que la relación $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ *será constante cualquiera que sea la transversal*, y á la cual Chasles dió el nombre de *relación ó función armónica.*

Además añade en la Nota IX de su *Aperçu*, destinada á dicha función, que ésta tiene otra propiedad capital, á saber, que: *Si desde un punto tomado arbitrariamente, se trazan rectas á cuatro puntos en línea recta, la función armónica de estos cuatro puntos tendrá precisamente por* *valor el que adquirirá esta función cuando en ella se sustituyan á los cuatro segmentos que la componen, los senos de los ángulos que forman entre sí dichas rectas.*

En su *Géométrie supérieure*, pues, para presentar en cuerpo de doctrina esta nueva ciencia, expone desde luego un conjunto de proposiciones sobre la *relación anarmónica* que dan origen á tres teorías que constituyen el desarrollo de un mismo teorema fundamental, ó sea las de la *relación anarmónica*, de las *divisiones y haces homográficos* y de la *involución;* dicho teorema fundamental es el arriba citado que establece la relación

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\operatorname{sen}(A, C)}{\operatorname{sen}(A, D)} : \frac{\operatorname{sen}(B, C)}{\operatorname{sen}(B, D)}$$

entre cuatro rectas trazadas por un punto y los cuatro segmentos que forman con una transversal cualquiera, y que puede servir de enlace entre las partes de una figura para establecer las relaciones que constituyen sus propiedades; y así, por ejemplo, pueden pasarse de relaciones de sistemas de cuatro puntos á otros sistemas análogos por el intermedio de otros haces, etc.

Otros conceptos, como son los que conciernen á los *signos* de los ángulos y segmentos, á las entidades *imaginarias* y á la *dualidad* predominan en la sistematización que lleva á cabo Chasles en su tratado de Geometría.

Así, sus procedimientos de demostración se apoyan en proposiciones que implican el principio de los signos, que introduce sistemáticamente en la exposición de su obra, de manera que una sola proposición (la arriba citada) que expresa la igualdad de dos funciones anarmónicas de segmentos y de senos, forma la base de toda su obra y permite introducir el principio de los signos.

En cuanto á los objetos imaginarios, *puntos, líneas* ó *cantidades*, observa que no entran explícitamente en los razonamientos, hallándose representados por *elementos* siempre reales que pueden servir para determinarlos, de igual manera que en la Geometría analítica, las raíces de una ecuación no entran por sí en los cálculos, hallándose representadas colectivamente por los coeficientes, así la consideración de *dos puntos imaginarios* en una recta, equivale á admitir que los dos *datos* ó *elementos* que determinan á aquéllos, á saber, su *punto medio* y el *rectángulo* de sus distancias á un origen común, dan lugar á una expresión *imaginaria* de las distancias de estos puntos al origen, ó bien que la ecuación de segundo grado suficiente para representarlos tiene sus raíces imaginarias. De esta manera consigue Chasles introducir en su Geometría con la noción explícita de las imaginarias demostraciones tan rigurosas y tan generales como las de la Geometría analítica, empleando proposiciones que se refieren á propiedades *absolutas* ó *permanentes* de las figuras y no tan sólo á las propiedades *contingentes*.

Expuestas en la primera sección de la obra las teorías de la *relación anarmónica*, de las *divisiones homográficas* y de la *involución*, derivadas todas ellas de un solo teorema fundamental, como desenvolvimiento de un concepto que hace resaltar la unidad en el fondo variable constituído por dichas teorías, las demás secciones están destinadas á aplicaciones varias de esta doctrina de la relación anarmónica, al triángulo, cuadrilátero y en general á los polígonos, á la descripción de la recta por puntos, á los centros de las distancias medias y de las medias armónicas, etc., al establecimiento de sistemas de coordenadas que conducen á las transformaciones de las figuras que originan las *figuras homográficas* y *correlativas*.

Esta rigurosa unidad que se observa en la Geometría de Chasles, basada en el único concepto de la relación anarmónica referida á las figuras rectilíneas, se conserva aún, cuando se trata del círculo y de las secciones cónicas.

En cuanto al círculo, que es el objeto de la 4.ª sección de la Geometría superior, le basta establecer los dos teoremas fundamentales sobre la *relación anarmónica de cuatro puntos de una circunferencia* y sobre la *relación anarmónica de cuatro tangentes* á la misma, de modo que:

cuatro puntos de una circunferencia se unen á un quinto punto cualquiera de la misma por cuatro rectas que forman un haz cuya relación anarmónica es constante.	cuatro tangentes á una circunferencia cortan á una quinta tangente cualquiera á la misma en cuatro puntos que forman un sistema cuya relación anarmónica es constante.

propiedades que permiten establecer, conforme al principio de la *dualidad*, las propiedades concernientes á la circunferencia como ya se establecieron las que se referían á puntos situados en línea recta á la par de las que se referían á rectas concurrentes en un punto.

Finalmente, en virtud de que la relación anarmónica, tanto de un haz de cuatro rectas como de cuatro puntos en línea recta, permanece invariable en las proyecciones, y de ser las secciones cónicas perspectivas ó proyecciones centrales del círculo base de un cono, los principios de la relación anarmónica de cuatro puntos ó de cuatro tangentes al círculo se extienden al caso en que éste se ha sustituído por una cónica, y así en su *Traité des sections coniques*, Chasles establece los dos principios fundamentales arriba citados para el caso del círculo, y con sólo ellos desenvuelve la teoría de estas curvas.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 129.

(Véase t. III, pág. 191)

Inscribir en un segmento (ó sector) circular un rectángulo de perímetro dado.

(SOLLERTINSKY)

Solución por el SR. SCHIAPPA MONTEIRO.

Consideremos desde luego la inscripción del rectángulo en un segmento, y enseguida en un sector circular.

Caso del segmento circular.

Supongamos el problema resuelto, y sea $rr_1r_2r_3$ (fig. 1) el rectángulo de perímetro dado $2p$ inscripto en el segmento svs' del círculo C también dado.

Sean m y m_1 los puntos medios de los lados rr_3 y r_1r_2 de este rectángulo ó de sus intersecciones con el diámetro vv' del círculo C perpendicular á éstos; y sobre las prolongaciones de dichos lados tomemos los segmentos rn y r_1n_1 iguales á mr, y se tendrá el rectángulo mnn_1m_1 igual al rectángulo inscripto pedido, ó tal que se tenga el semi-perímetro

$$mn+nn_1=p.$$

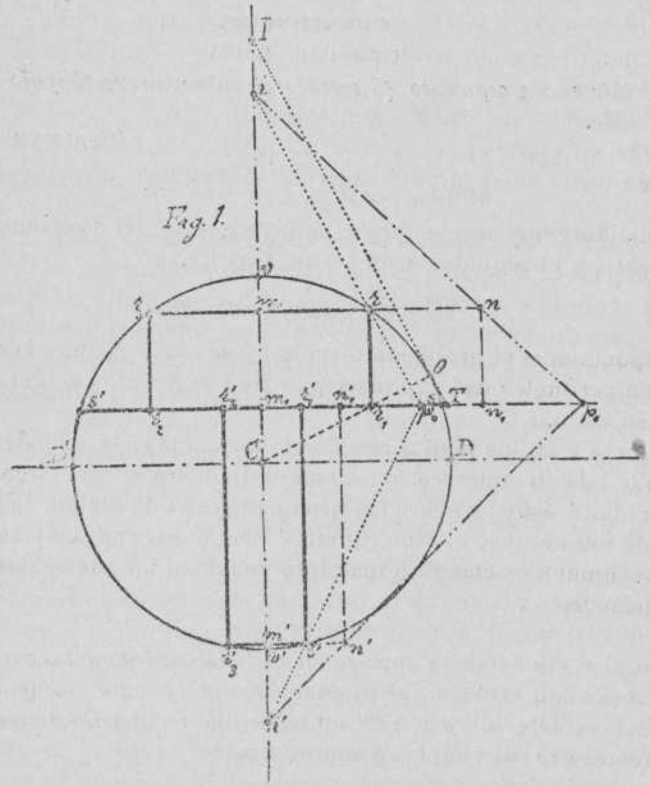
Así el vértice n debe pertenecer al *lugar de los puntos cuya suma de las distancias á las rectas rectangulares* sm_1s' y vm_1v' *sea igual á* p, es decir, *á la hipotenusa* p_0 i *de un triángulo rectángulo isósceles* p_0m_1i *cuyos catetos* m_1 p_0 y m_1 i *son iguales á* p.

Luego el vértice r del rectángulo pedido $rr_1r_2r_3$ se encuentra también *en la mediana* $i r \mu_0$.

De esto resulta que para obtener uno de los vértices r del rectángulo buscado $rr_1r_2r_3$, se tomarán en la cuerda ss_1 y en el diámetro vv' del círculo (C), á partir de su intersección m_1, los segmentos $m_1\mu_0$ y m_1i respectivamente iguales á $\frac{1}{2}p$ y á p, de modo que el segmento rectilíneo $i\mu_0$ cortará al arco del segmento circular dado svs' en este punto r, y el rectángulo que se busca $rr_1r_2r_3$ quedará determinado.

Tomando el segmento $m_1i' = -m_1i$ sobre m_1v, y trazando el segmento $i'\mu_0$, la intersección r' de éste con el arco del segmento svs', suplementario del primero, se tendrá el rectángulo $r'r'_1r'_2r'_3$ inscripto en este segundo segmento circular.

Discusión.—Como se ve, solamente los puntos de intersección r y



r' de la circunferenia (C) con los segmentos rectilíneos μ_0i y μ_0i' situados entre el punto μ_0 y cada uno de los puntos i, i' ó situados sobre estos segmentos, dan las soluciones relativas á los segmentos circulares suplementarios srs' y $sv's'$, puesto que si estos puntos de intersección r y r' se hallasen sobre la prolongación de estos segmentos rectilíneos, sucedería lo mismo á los puntos correspondientes n y n'

sobre los segmentos rectilíneos $p_0 i$, $p_0 i'$; y entonces se tendría *la diferencia de las distancias de estos puntos á las rectas rectangulares* vv' *y* ss' *igual* á p, en vez de su suma, según los datos del problema.

Es claro que para cada uno de los segmentos circulares puede haber *dos soluciones, una ó ninguna*, según que cada uno de éstos corte á los segmentos rectilíneos correspondientes $\mu_0 i$ y $\mu_0 i'$ *en dos, en un punto ó no les corten.*

Como se sabe, uno de estos segmentos rectilíneos puede tocar al arco del segmento circular correspondiente; y á su punto de contacto corresponderá igualmente una sola solución, y este contacto tendrá lugar al mismo tiempo sobre estos dos segmentos circulares, cuando sean iguales ó se reduzcan á semicírculos.

Se pueden también determinar los límites de p entre los que el problema tiene solución para cada uno de los dos segmentos circulares.

En efecto, si se considera el segmento svs' y se le traza la tangente IθT paralela á la mediana $\mu_0 i$ del triángulo rectángulo im_1p_0 que determina sobre la cuerda ss' del círculo (C) el segmento rectilíneo m_1T, se reconoce que para que haya solución, el semiperímetro deberá tener los valores de los segmentos $m_1 v$ y $2m_1$T ó SS', según que el punto de contacto θ se halle en el segmento IT ó en su prolongación, ó bien coincida con el punto s.

Se llega á resultados análogos para las soluciones relativas al segmento $sv's'$.

Caso del sector circular.

Supongamos asimismo el problema resuelto, y sea $rr_1r_2r_3$ (fig. 2) el rectángulo de perímetro $2p$ inscripto en el sector Csvs' del círculo (C).

Por el vértice r tracemos $\rho r \rho_3$ paralela al radio Cs y que corte en el punto ρ_3 al diámetro vv' perpendicular á la cuerda ss'. Esto sentado, sobre las prolongaciones de los lados $\rho_3 r$ y Cr_1 del paralelogramo rr_1Cρ_3 equivalente al rectángulo pedido $rr_1r_2r_3$, y trazándose desde los extremos del lado Cρ_3 las perpendiculares $\rho_3 q$ y Cq_1, se obtiene el rectángulo qq_1Cρ_3; y puesto que se tiene

$$q\rho_3 + qq_1 = p,$$

el vértice se hallará en la hipotenusa $p_0 i$ de un triángulo rectángulo isósceles p_0Ci cuyos catetos son iguales á p. Así, el punto medio t de $q\rho_3$ se hallará al mismo tiempo en la mediana $\mu_0 i$ de este triángulo y en el cateto rr_1 del triángulo rectángulo buscado.

Luego trazando en p_0 la perpendicular $p_0 p$ á CD y que corte al ra-

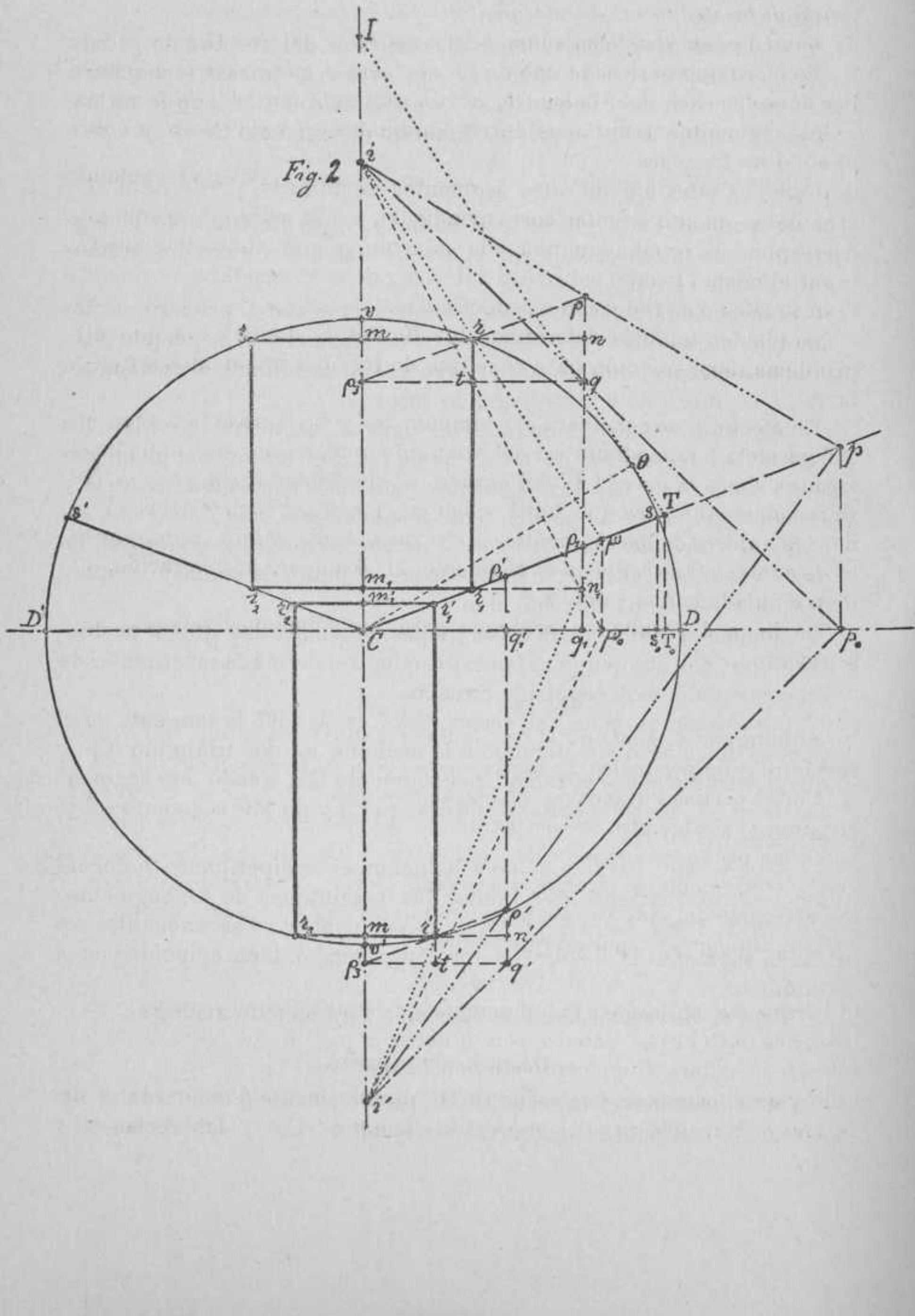


Fig. 2

dio Cs en p, la recta ip pasará por ρ, y la recta $ir\mu$ será la *mediana* del triángulo iCp.

Desde entonces, para obtener el vértice r del rectángulo pedido $rr_1r_2r_3$ situado sobre el arco svs' del sector, se trazará el diámetro vCv' perpendicular á la cuerda ss', y el diámetro DCD′ que le es paralelo, tomando sobre el primer diámetro el segmento $Ci=p$ y sobre el segundo el segmento $C\mu_0=\frac{1}{2}p$, y en el punto μ_0 de ésta levantando la perpendicular $\mu_0\mu$ que corte al radio Cs, y en fin, trazando el segmento μi, su intersección r con el arco svs' será el vértice del rectángulo pedido $rr_1r_2r_3$.

Si se considera el sector $Csv's'$ suplementario del primero, se tomará el segmento $Ci'=-Ci$ sobre Cv', y trazando el segmento $\mu_0 i'$, la intersección r' de éste con el arco $sv's'$ determinará el rectángulo $r'r_1'r'_2r'_3$ inscripto en este segundo sector.

Discusión.—Considerando, como para el segmento circular, los puntos de intersección de los arcos de los dos sectores suplementarios $Csvs'$ y $Csv's'$ con los segmentos rectilíneos correspondientes μi y μi, se reconoce que se pueden tener *dos soluciones*, *una* ó *ninguna*, según que haya *dos de estos puntos de intersección*, *uno* ó *ninguno*. Es claro que estas líneas, pudiéndose tocar, el punto de contacto responderá también á una sola solución.

Se pueden también hallar los límites de p entre los que el problema es posible, siguiendo el mismo camino relativo á la inscripción de un rectángulo en el segmento circular.

Consideremos, pues, el sector $Csvs'$, y sea $I\theta T$ la tangente en el punto θ de su arco svs' paralelo á la mediana μi del triángulo iCp, y que determine sobre el radio Cs el segmento CT, siendo los segmentos Cs_0 y CT_0 las proyecciones de este radio y de este segmento sobre el diámetro DCD′.

Según esto, para que haya solución, el semiperímetro p deberá tener respectivamente por límites las magnitudes de los segmentos Cv y $2CT_0$ ó $2Cs_0$, según que el punto de contacto θ se encuentre sobre el segmento IT ó sobre su prolongación, ó bien coincida con el punto s.

Para el otro sector $Csv's'$ la discusión será en todo análoga.

Observación general.

Si se hace mover la recta DCD′ paralelamente á la cuerda ss' del círculo (C), el punto C recorrerá el diámetro vCv' y las rectas sC y

s'C girarán alrededor de s y s', de lo que resulta que *el sector isósceles homocéntrico* $Csvs'$ se transformará en un *sector isósceles excéntrico* con relación al círculo (C), y en el que se puede también inscribir un rectángulo de perímetro dado $2p$, empleando construcciones análogas á las precedentes.

Cuando el punto C se halle en línea recta con los puntos s y s', *el sector isósceles circular* se reduce á un segmento circular, y se volverá á las construcciones ya presentadas para este caso, que, como se ve, es un caso particular del que acabamos de considerar.

Como se sabe, la inscripción del rectángulo en un sector circular, y por consiguiente, como caso particular, en un segmento, puede hacerse con el empleo del álgebra, pero de una manera menos sencilla, y para esto juzgamos innecesario continuar.

Se puede todavía extender el problema y las construcciones respectivas á los casos de los *sectores ó segmentos elípticos, hiperbólicos* y *parabólicos* en que el diámetro vv' se convertiría en un diámetro conjugado á la cuerda ss', pudiendo el punto C tener una posición cualquiera sobre este diámetro.

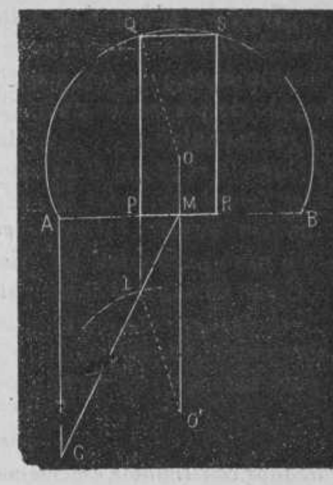
En este caso, se tendría un paralelogramo de perímetro dado $2p$ inscripto en estos sectores ó segmentos, y cuyos lados serían paralelos á estas rectas conjugadas el cual llegaría á ser un rectángulo cuando vv' fuese un eje.

Desde entonces los triángulos auxiliares p_0m_1i (fig. 1) y p_0Ci (fig. 2) *rectángulos é isósceles* cuando vv' es eje, serán solamente isósceles en el caso general.

Podríamos reducir mucho la solución de la cuestión propuesta por el sabio matemático Sr. Sollertinsky, considerando la inscripción del rectángulo en el segmento ó sector circular, como un caso particular de su inscripción en un *sector isósceles circular excéntrico*, presentando solamente la solución para este caso; pero no lo hemos hecho, teniendo presente la redacción de este problema que parece indicar que el ilustre autor deseaba que éste fuese el orden por seguirse en la solución.

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

En la perpendicular en A á la cuerda AB se toma AC=AB, y en la perpendicular del centro O sobre AB se toma $OO'=p$, siendo $2p$ el perímetro dado.



Sea D el punto en que la circunferencia descrita desde O′ con el radio OA encuentra á la recta CM que une C al medio M de AB.

La perpendicular del punto D sobre AB encuentra á la cuerda y al arco del segmento en los vértices P y Q del rectángulo buscado, y su tercer vértice R será el simétrico de P relativamente á M.

Se tiene, en efecto,

$$DP=2PM=PR$$

Luego

$$QP+PR=QP+DP=OD=OO'=p$$

CUESTIÓN 131.

(Véase tomo III, página 191).

Establecer la siguiente identidad

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2) \\ =(x^2y\mp xz^2)^2+(xy^2\mp yz^2)^2+(xyz\pm x^2z\pm y^2z)^2$$

en donde los signos se corresponden.

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro A).

Consideremos la fórmula

$$(a^2+b^2+c^2)(A^2+B^2+C^2) \\ =(aA+bB+cC)^2+(aB-bA)^2+(aC-cA)^2+(bC-cB)^2 \ldots \quad (1)$$

que muestra que una suma de tres cuadrados multiplicada por otra da, en general, una suma de cuatro cuadrados.

Esta fórmula se deduce de la siguiente dada por Euler:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(A^2+B^2+C^2+D^2)=\left\{\begin{array}{l}(aA+bB+cC+dD)^2 \\ \qquad +(aB-bA+cD-dC)^2 \\ +(aC-bB-cA+dB)^2 \\ \qquad +(aD+bC-cB-dA)^2\end{array}\right\} \quad (2)$$

para mostrar que un producto ~~una suma~~ de cuatro cuadrados da una suma de cuatro cuadrados, y haciendo $d=0$ y $D=0$.

Como se sabe, esta fórmula de Euler es un caso particular de otra dada por Lagrange y otras fórmulas análogas para grados superiores.

Esto sentado, podemos transformar fácilmente la (1) en la siguiente:

$$(a^2+b^2+c^2)(A^2+B^2+C^2)$$
$$=(aC\mp cB)^2+(bC\mp cA)^2+(cC\pm bA\pm aB)^2+(aA-bB)^2 \ldots \quad (3)$$

de la que resulta la identidad buscada, haciendo

$$a=x,\quad b=y,\quad c=z \quad \text{y} \quad A=yz,\quad B=xz,\quad C=xy.$$

En este caso, se tendrá $aA-bB=0$, y por consiguiente la (3) muestra que para estos valores de a, b, c; A, B, C *la suma de tres cuadrados, multiplicada por una suma de tres cuadrados, será igual á la suma de tres cuadrados.*

CUESTIÓN 139

(Véase tomo III, página 192).

La suma de los cuadrados de las rectas que unen los centros de los cuadrados construidos exteriormente sobre los lados opuestos de un cuadrilátero y los centros de los cuadrados construidos interiormente, sobre éstos mismos lados es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales del cuadrilátero.

(H. VAN AUBEL).

Solución por el SR. D. A. SCHIAPPA MONTEIRO.

Sean ABA'B' el cuadrilátero dado, y E, E' los centros de los cuadrados ABB_1A_1, $A'B'B_1'A_1'$, construídos exteriormente sobre los lados opuestos AB y A'B'; y sean I, I' los centros de los cuadrados ABB_2A_2, $A'B'A_2'A_2'$ construídos interiormente sobre estos mismos lados.

Es evidente que los puntos A, E, B, I y A', E', B', I' determinan dos cuadrados que tienen por centro los puntos M, M' medios de AB, A'B', lo que nos conduce á demostrarque

$$\overline{EE'}^2+\overline{II'}^2=\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2 \ldots \quad (1)$$

es decir que: *dados dos cuadrados cualesquiera, la suma de los cuadrados de las distancias* EE', II' *de dos pares de vértices opuestos, es igual á la suma de los cuadrados de las distancias* AA' y BB' *de los otros pares de vértices opuestos* A, A' y B, B' *tomados de una manera análoga al primer par.*

Luego si por los vértices del cuadrado A'E'B'I' se trazan las rectas $A'a'$, $E'e'$, $B'b'$, $I'i'$, respectivamente equivalentes á las semidiagonales AM, EM, BM, IM del cuadrado AEBI, se tendrá el cuadrado

$a'e'b'i'$, determinado igualmente por las rectas Ma', Me', Mb', Mi' trazadas por el centro M de este último cuadrado, y respectivamente equipolentes á las rectas AA', EE', BB', II'. Según esto, nos vemos en el caso de considerar solamente el cuadrado $a'e'b'i'$ y el punto M, y demostrar que: $\overline{Me'}^2+\overline{Mi'}^2=\overline{Ma'}^2+\overline{Mb'}^2$, es decir, que *dado un cuadrado* a'e'b'i' *y un punto* M, *la suma de los cuadrados de las distancias* Ma', Mb' *de este mismo punto á dos vértices opuestos* e', i' *es igual á la suma de los cuadrados de las distancias á los otros vértices* a', b' (*).

Ahora, los triángulos $e'Mi'$ y $a'Mb'$, teniendo común la mediana MM', dan:

$$\overline{Me'}^2+\overline{Mi'}^2=2\,\overline{MM'}^2-2\,\overline{M'i'}^2 \qquad (3)$$

y

$$\overline{Ma'}^2+\overline{Mb'}^2=2.\,\overline{MM'}^2+2.\,\overline{M'a'}^2 \qquad (4)$$

pero se tiene $Me'=M'a'$; luego

$$\overline{Me'}^2+\overline{Mi'}^2=\overline{Ma'}^2+\overline{Mb'}^2 \qquad (2)$$

ó

$$\overline{EE'}^2+\overline{II'}^2=\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2 \qquad (1)$$

Observación.—Asimismo se reconoce que: *La suma de los cuadrados de las rectas que unen los centros de los cuadrados construidos exteriormente sobre los lados opuestos de un cuadrilátero, á los centros de los construidos interiormente sobre los mismos, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados del cuadrilátero.*

Igualmente se vé que *la cuestion propuesta puede extenderse á la geometría del espacio, considerando un cuadrilátero alabeado* ABA'B' *y los dos planos paralelos trazados por dos lados opuestos* AB *y* A'B', *y construyendo en estos planos y sobre cada lado, un par de cuadrados* ABB_1A_1, ABB_2A_2 y $A'B'B_1'A_1'$, $A'B'B_2'A_2'$.

CUESTIÓN 138

(Véase tomo II, página 192).

Demostrar que

$$\frac{y}{1+a}+\frac{y+a}{(1+a)^2}+\frac{y+2a}{(1+a)^3}+\dots+\frac{y+(n-1)a}{(1+a)^n}=\frac{y+1}{a}-\frac{y+1+na}{a(1+a)^n}$$

deduciendo como inmediata consecuencia el conocido resultado

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n}$$

(*) Es claro que este teorema tendrá también lugar cuando el punto M se halle fuera del plano del cuadrado, es decir, cuando sea el vértice de una pirámide que tenga por base este cuadrado.

ó bien

$$1.2^{n-1}+2.2^{n-2}+3.2^{n-3}+.....+(n-1)2^1+n.2^0=2(2^n-1)-1$$

(Juan J. Duran Loriga)

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro (A).

Poniendo la expresión dada bajo la forma

$$\frac{y}{1+a}\left[1+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}+....+\frac{1}{(1+a)^{n-1}}\right]$$
$$+\frac{a}{(1+a)^2}\left[1+\frac{2}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}+....+\frac{n-1}{(1+a)^{n-2}}\right] \quad (1)$$

y observando que, como se sabe, se tiene

$$1+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}+....+\frac{1}{(1+a)^{n-1}}=\frac{1+a}{a}-\frac{1}{a(1+a)^{n-1}} \quad (2)$$

y
$$1+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}+....+\frac{1}{(1+a)^{n-2}}$$
$$=\frac{(1+a)^{n-1}-1}{a^2(1+a)^{n-3}}-\frac{n-1}{a(1+a)^{n-2}}=\frac{(1+a)^2}{a^2}-\frac{1+na}{a^2(1+a)^{n-2}} \quad (3)$$

resulta que la expresión (1) se reduce á

$$y\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a(1+a)^n}\right]+\frac{1}{a}-\frac{1+na}{a(1+a)^n}$$

luego

$$\frac{y}{1+a}+\frac{y+a}{(y+a)^2}+\frac{y+2a}{(1+a)^3}+....+\frac{y+n-1)a}{(1+a)^n}=\frac{y+1}{a}-\frac{y+1+na}{a(1+a)^n} \quad (4)$$

Haciendo $y=a=1$, se tendrá

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+....+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n} \quad (5)$$

ó $$1.2^{n-1}+2.2^{n-2}+3.2^{n-3}+....+(n-1)2^1+n2^0=2(2^n-1)-n \quad (6)$$

CUESTIÓN 135

(Véase tomo III, página 192).

Dado el eje focal de una cónica, solamente en posición, un punto de ésta y el centro del círculo osculador en este punto, determinar los focos.

(C. Jiménez Rueda).

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro (A).

Designemos M y γ el punto dado y el centro de curvatura correspondiente, y sea N la intersección del radio de curvatura $M\gamma=\rho$ con la dirección indefinida XX′ del eje focal.

Representando por R la proyección de la normal MN=N sobre uno de los radios vectores desconocidos, ó el radio de curvatura en los vértices focales igualmente desconocidos, la expresión del radio de curvatura es

$$\rho=\frac{N^3}{R^2} \tag{1}$$

Según esto, si en el punto N se levanta la perpendicular RNR′ á la normal, y sobre el radio de curvatura $M\gamma$ como diámetro se describe, una circunferencia (C), ésta cortará dicha perpendicular en los puntos R y R′ tales, que las rectas MR y MR′ cortarán á XX′ en los puntos f y f' que serán los focos buscados.

En efecto, se tiene

$$MR^2=\rho\,.\,N \quad \text{y} \quad MR=\frac{N^2}{R}$$

de lo que resulta la expresión (1)

Observación.—Se obtiene también directamente el centro de la cónica (Σ), si lo tiene.

Para esto, se traza la perpendicular γr á XX′, que cortará á RR′ en el punto r, de modo que Mr cortará á XX′ en un punto O, que será el centro buscado.

Podríamos entrar en ciertas investigaciones sobre esta cuestión propuesta y su recíproca, pero hemos creido preferible reservarlo para una *Nota sobre la solución de la cuestión 65*, que presentaremos bien pronto.

CUESTIÓN 137

(Véase tomo III, página 192).

La suma de los cuadrados de las rectas que unen entre sí los centros de los cuadrados construídos exteriormente sobre los tres lados de un triángulo, es igual á la suma de los cuadrados de estos lados más seis veces el área de este triángulo.

(H. Van Aubel).

Solución por el Schiappa Monteiro (A.)

Sean AA_1B_2B, BB_1C_2C y CC_1A_2A los tres cuadrados construídos exteriormente sobre los tres lados AB, BC y CA del triángulo ABC y cuyas diagonales se cortan respectivamente en los puntos M, N y P, desde los cuales se bajan, sobre estos tres lados, las perpendiculares MuO, NvO, PtO que las encuentran en u, v, t y se cortan en O, centro del círculo circuncripto (O) á este triángulo.

Esto sentado, consideremos los triángulos AMP, BMN y CNP que dan

$$\overline{MN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BN}^2 - 2 . BM . BN . \cos MBN$$
$$\overline{NP}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{CP}^2 - 2 . CN . CP . \cos NCP$$
$$\overline{PM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AM}^2 - 2 . AP . AM . \cos PAM$$

de donde

$$\overline{MN}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{BC}^2}{2} + AB . BC . \cos ABC$$
$$\overline{NP}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{2} + \frac{\overline{CA}^2}{2} + BC . CA . \cos BCA$$
$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{CA}^2}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2} + CA . AB . \cos CBA$$

y por consiguiente

$$\overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 6 \text{ área } ABC$$

CUESTIÓN 60

(Véase tomo III, página 128).

Un círculo de radio constante tiene siempre su centro en una elipse, y desde el centro de ésta se trazan tangentes. Hallar el lugar de los puntos de contacto. Casos particulares.

(*H. Brocard.*)

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro.

Sea O el centro y OA$=a$, OB$=b$ los semiejes de la elipse dada (E) sobre la que se considera un punto cualquiera C como centro del círculo móvil (C) de radio constante r, cuyas tangentes trazadas por O son Ot, Ot'.

Elijamos este punto por polo y la recta OA por eje polar, haciendo

$$OC=\delta,\ OtOt'=\rho,\ \angle COA=\omega,\ \angle COt=t'OC=\theta,\ \angle t'OA=\alpha$$

Esto sentado, para un punto cualquiera t del lugar pedido se tiene

$$\rho^2 = \delta^2 - r^2 \qquad (1)$$

Pero para el punto C de la elipse se tiene

$$\delta^2 = a^2b^2 \frac{1+\mathrm{tg}^2\omega}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\omega} \tag{2}$$

luego

$$\rho^2 = \frac{b^2(a^2-r^2)+a^2(b^2-r^2)\mathrm{tg}^2\omega}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\omega} \tag{3}$$

Siendo el ángulo ω igual al $\alpha \pm \theta$, se tendrá

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\theta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\theta} \tag{3}$$

y observando que $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{r}{\rho}$, resulta

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\rho\,\mathrm{tg}\alpha \pm r}{\rho \mp r\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Reemplazando este valor de $\mathrm{tg}\omega$ en (3) y reduciendo, se tendrá para la ecuación polar del lugar buscado (T)

$$\rho^4 \pm 2z \frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho^3 + \frac{(a^2+b^2)r^2-a^2b^2}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\rho^2$$
$$\pm 2r^3 \frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho + z^2 \frac{z^2(a^2+b^2\mathrm{tg}^2\alpha)-a^2b^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha} = 0 \tag{6}$$

Para obtener los puntos de intersección de la curva con el eje polar haremos $\mathrm{tg}\alpha = 0$, y resulta

$$\rho^4 + \frac{(a^2+b^2)r^2-a^2b^2}{b^2}\rho^2 + a^2r^2\frac{r^2-b^2}{b^2} = 0 \tag{7}$$

de lo que se obtiene

$$\rho^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{a^2+b^2}{b^2}r^2 \pm (a^2 - \frac{a^2-b^2}{b^2}r^2\right] \tag{8}$$

ó

$$\rho = \mp \frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2} \tag{9}$$

y

$$\rho = \mp r\sqrt{-1} \tag{10}$$

Estos son los dos pares de valores de ρ que dan dichos puntos de intersección.

La expresión (9) manifiesta que habrá dos puntos de intersección ó *puntos dobles* β, β' siempre que se tenga $b > r$.

Para $\mathrm{tg}\alpha = \infty$ la ecuacion (6) se reduce á

Si se hace $r=0$, resulta

$$\rho^4 + \frac{(a^2+b^2)r^2 - a^2b^2}{a^2}\rho^2 + b^2r^2\frac{r^2-a^2}{a^2} = 0 \tag{11}$$

y por consiguiente

$$\rho^2 = \frac{1}{2}\left[b^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}r^2 \pm \sqrt{\frac{a^2-r^2}{a^4}b^4 + \left(\frac{a^2+6b^2}{a^2}r^2+6b^2\right)r^2}\right. \tag{12}$$

correspondiendo al signo $+$ del radical dos *puntos dobles reales* α, α, para los valores de r menores que a, los cuales son los puntos de intersección de la curva (T) con el eje menor de la elipse (E)

Dejando la discusión de la ecuación de la curva, atendida la restricción de la cuestión propuesta, podemos considerar ya la segunda parte de dicha cuestión.

Casos particulares.

Cuando se tiene $a=b=\mathrm{R}$, la elipse (E) se convierte en un círculo, y la ecuación (6) da

$$r^2 = \mathrm{R}^2 - r^2 \tag{13}$$

Si se hace $r=0$, resulta

$$\rho^2 = \delta^2 = a^2b^2\frac{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{2}$$

ecuación polar de la elipse dada.

Para $r=b$ resulta

$$\rho^4 \pm 2b\frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho^3 + b^4\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\rho^2$$

$$\pm 2b^3\frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho - b^4\frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}^2a}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha} = 0 \tag{14}$$

y en este caso las expresiones (9) y (10 correspondientes á $\mathrm{tg}\alpha=0$, se convertirán en

$$\rho^2 = 0 \tag{9$'$}$$

y

$$\rho^2 + b^2 = 0 \quad ó \quad \rho = \pm b\sqrt{-1} \tag{10$'$}$$

Se ve que en este caso los puntos dobles realcs β y β' coincidirán con el polo O ó centro de la elipse (E) y del círculo imaginario (10)'.

En el caso en que se tenga $r=a$, resulta

$$\rho^4 \pm 2a\frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho^3 + a^4\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho^2$$

$$\pm a^3\frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha}\rho + a^4\frac{a^2-b^2}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\alpha} = 0 \tag{15}$$

y la expresión (12) correspondiente á $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ dará

$$\rho^2 = 0 \qquad (12)'$$

y

$$\rho^2 + a^2 = 0 \quad ó \quad \rho = \pm a\sqrt{-1} \qquad (12)''$$

lo que manifiesta que los dos puntos dobles reales α y α' coinciden con el polo 0; y por otra parte se reconoce que la curva expresada por la ecuación (15) no tiene de real más que este punto cuádruplo, teniendo sus ramas imaginarias.

Suponiendo $r = a = b = \mathrm{R}$, resulta

$$\rho^2 = 0 \quad (16 \qquad y \qquad \rho^2 + \mathrm{R}^2 = 0 \quad ó \quad \rho = \pm \mathrm{R}\sqrt{-1} \qquad (17)$$

Para r, igual al semiparámetro $\frac{b^2}{a}$ de la elipse (E), se tiene

$$\rho^4 \pm 2\frac{b^4}{a^2}\frac{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\alpha}\rho^3 + \frac{b^2}{a^2}\frac{(a^2+b^2)b^2-a^4}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\mp 1\frac{b^6}{a^3}\frac{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\alpha}\rho + \frac{b^6}{a^4}\frac{b^2(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2\alpha - a^4}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\alpha} = 0 \quad (18)$$

y en este caso la expresión (9), reduciéndose á

$$\rho = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (10)$$

manifiesta que los puntos dobles β y β' coinciden con los focos F y F' de esta elipse.

Observación.—La ecuación de la curva (T) en coordenadas rectangulares, tomando por ejes de las x é y las rectas OA y OB, será

$$[b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2+(a^2+b^2)r^2](x^2+y^2)-r^2[a^2(b^2-r^2)x^2-b^2(a^2-r^2)y^2]$$

$$\pm 2r\,(a^2-b^2)\,(x^2+y^2+r^2)\,xy\sqrt{x^2+y^2} = 0 \qquad (20)$$

REVISTA BIBLIOGRÁFICA

LEZIONI DI ANALISI INFINITESIMALE, del profesor *G. Peano*. v. I y II. Torino. 1893.—La obra del director de la *Rivista di Matematica* ofrece, tanto en su estructura general como en el modo de tratar diversas materias, indiscutible originalidad.

Ya en la *Nota* con que concluye su tomo II expresa que algunas cuestiones se exponen conforme á desarrollos publicados de las mismas en diferentes Revistas y Periódicos; de estas referencias citaremos la que concierne al artículo *Sulla Formula di Taylor* (Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, 1891), á la nota: *Generalizzazione della formula di Simpson* (Atti Acc. Scienza, Torino, 1892) y á la nota *Sur* *une formule d'approximation pour la rectificatión de l'ellipse* comptes-rendus des séances de l'Academie des Sciences de París, 1889).

El tomo I contiene cinco capítulos en que se trata de las *Derivadas.—Derivadas sucesivas.—Integrales.—Métodos de integración.—Series*, que terminan con el artículo sobre los *productos infinitos*, observándose en toda la obra con frecuencia el empleo de notaciones abreviadas y simbólicas que se notan también en otras obras del mismo autor.

El tomo II lo comienza el Sr. Peano con la definición del *número complejo de orden* n, tratando de los vectores, de su reducción á la forma $U=xI+yI+zK$, de su *producto* de los *números imaginarios* de las *formas geométricas*, que principia por la definición de los tetraedros *destrorso y sinistrorso* para los que se verifica la relación.

$$ABCD=-BACD=-ACBD=-ABDC,$$

haciendo un desenvolvimiento de la teoría geométrica de Grassmann (*) Así, pues, trata de las *reducciones de las formas geométricas* de 1.ª, 2.ª, 3.ª y 4.ª especie, de sus operaciones, de los *bivectores*, que representan *pares de fuerzas*, de los *trivectores*. Al artículo destinado á las formas geométricas, siguen los que tratan de *sistemas de complejos, límites, series de términos complejos* y *función exponencial de variable imaginaria*.

El capítulo siguiente trata de las *derivaciones é integraciones de los complejos*, comprendiendo las materias siguientes: Tangente á una curva, diferencial del arco, fórmula de Taylor, plano osculador, curvatura de las líneas, círculo osculador, esfera osculatriz é integración de complejos.

Sigue el capítulo titulado *Funciones de varias variables*, que comprende: Derivadas parciales y sucesivas, funciones implícitas, funciones homogéneas, máximos y mínimos, plano tangente á una superficie, parámetro diferencial, envolventes, curvatura de una superficie, parámetro diferencial, envolventes, curvatura de las superficies, integrales múltiples y fórmulas para las áreas planas. El capítulo IX y último está destinado á las *ecuaciones diferenciales*.

La enumeración que acabamos de hacer sobre las materias que trata el Sr. Peano en su nueva obra bastan, creemos, para que el lector se forme idea de las novedades interesantes que contiene y á la que se recomienda, desde luego, la competencia reconocida de su ilustrado autor. (Z. G. DE G.)

(*) De esta teoría tiene publicada el mismo autor la obra *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre*, di H. Grassmann.

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.