Año III Zaragoza 20 de Octubre de 1893 Núm 34

# El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

*Director: D. Zoel G. de Galdeano*

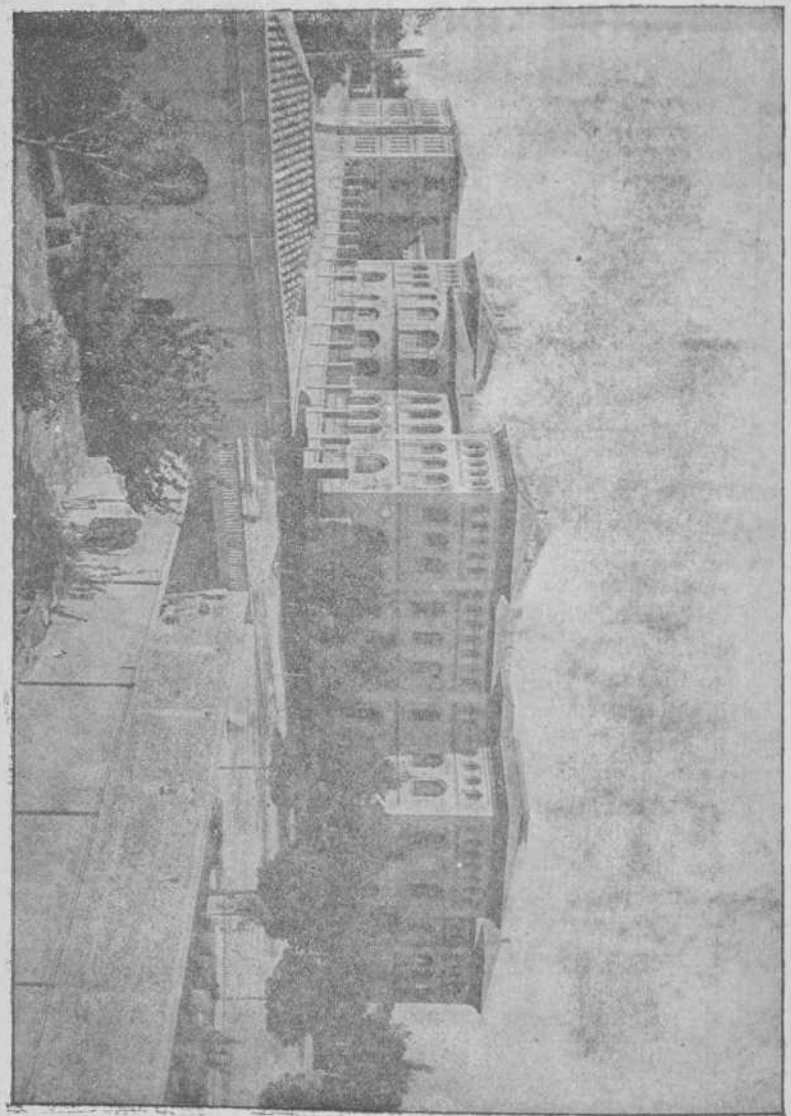
## LAS FIESTAS UNIVERSITARIAS DE ZARAGOZA
### EL ANIVERSARIO DE CERBUNA
### Y LA INAUGURACIÓN DEL EDIFICIO DE MEDICINA Y CIENCIAS

Por fin el memorable suceso con tanto interés esperado en toda la región por que se extiende el distrito universitario de Zaragoza, es una realidad.

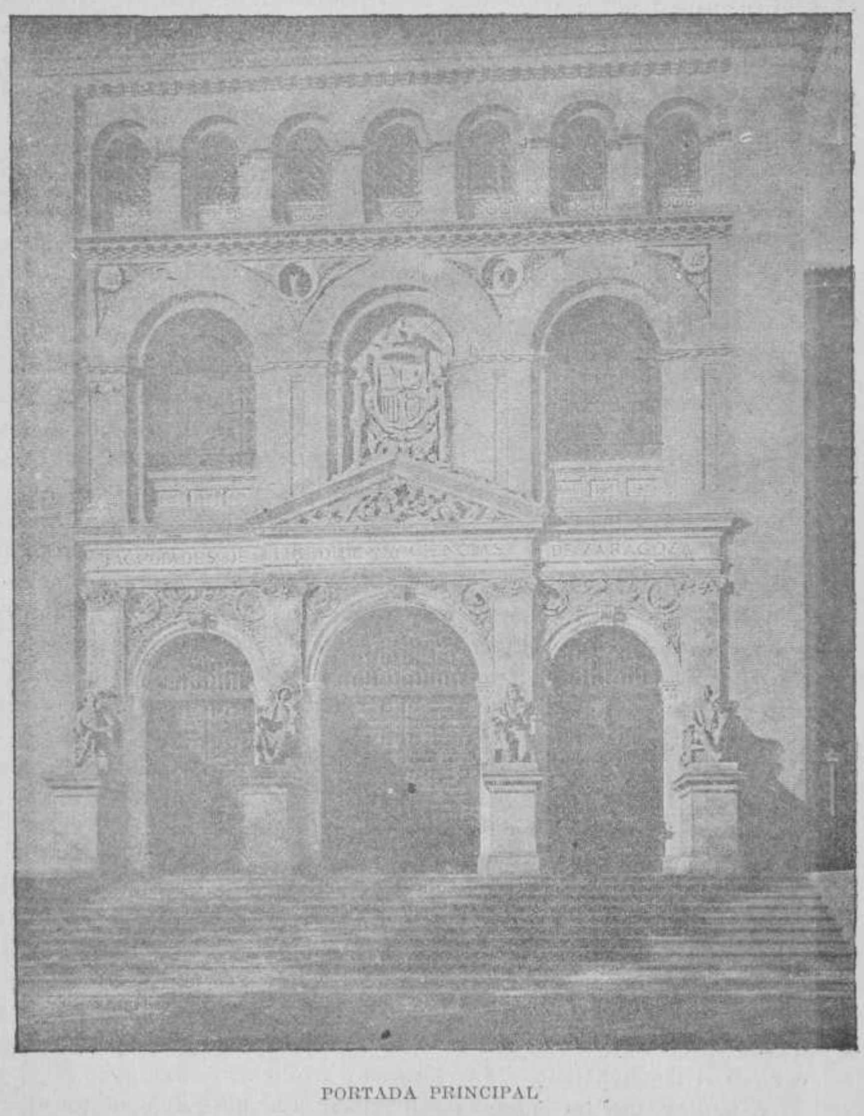
Inaugurado el edificio destinado á Medicina y Ciencias en la tarde del 18 de este mes por el Excmo. Sr. Ministro de Fomento D. Segismundo Moret y Prendergast ya el día 21, y terminadas las fiestas que se celebran en esta capital aragonesa, se continuarán los estudios de estas Facultades en las nuevas aulas.

Además de la citada inauguración, otro acontecimiento unido por una feliz coincidencia al primero se había de celebrar en estas fiestas universitarias, á saber, el tercer centenario de la fundación de la universidad de Zaragoza por el prior de La Seo y más tarde obispo de Tarazona D. Pedro Cerbuna.

Celebradas en la mañana del día 17 en la catedral de La Seo, con asistencia de todo el Claustro universitario, presidido por el Sr. Ministro de Fomento, las honras fúnebres del ilustre fundador de la antigua universidad en

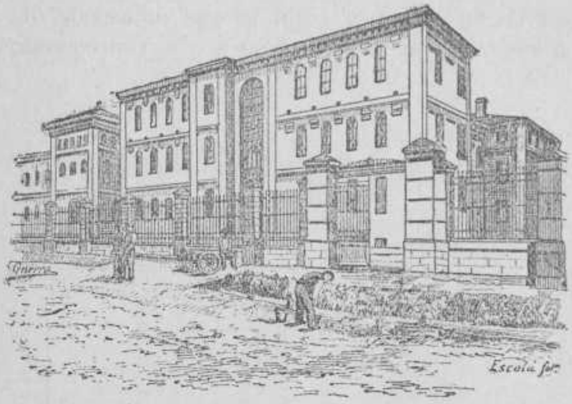


VISTA DEL EDIFICIO



PORTADA PRINCIPAL

las que el notable orador sagrado D. Florencio Jardiel, canónigo de esta catedral y discípulo de esta Universidad, al elogiar las virtudes de Cerbuna empleó también su elocuentísima palabra en enaltecer la ciencia, vertiendo hermosos conceptos de la misma.




EXTERIOR DEL HOSPITAL CLINICO

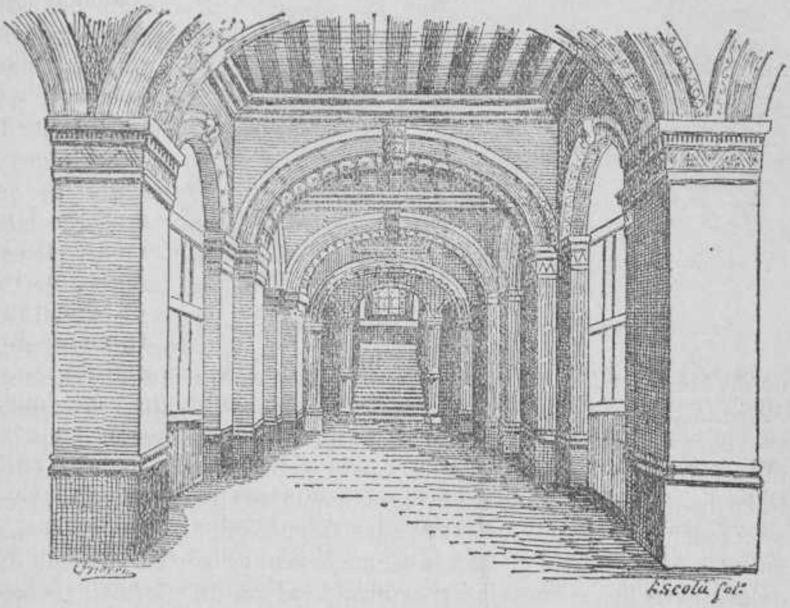
Por la tarde, en el Paraninfo del edificio antiguo, se celebró solemne fiesta académica en que los alumnos de las cuatro facultades leyeron eruditas memorias acerca del estado de las ciencias en la época de Cerbuna, descollando entre todos el alumno de Medicina Sr. García Belenguer que, pronunciando un discurso sobre la *Antigua enseñanza de Medicina en nuestra Universidad*, se reveló como un verdadero orador de hermoso estilo, pensamientos profundos, frases elegantes y riqueza inagotable de imágenes poéticas. Poco despues el Sr. Moret dejó oir su incomparable palabra, interrumpida muchas veces por los entusiastas aplausos de la concurrencia, señalando á la juventud el camino digno de ser seguido en esta vida, dándoles provechosos consejos, y dedicando al fin un glorioso recuerdo al ilustre Cerbuna, acompañado de elevados conceptos acerca del orden moral y de la ciencia que dejó honda impresión de cuantos tuvimos la dicha de escucharle.

De 1593 pasamos á 1893, es decir, de la obra de Cerbuna á la obra de Calleja que se ostenta gallarda á la par que magestuosa ante la plaza de Aragón y á orillas del río Huerva.

De tres cuerpos consta este suntuoso edificio levantado á la ciencia. El primero es el mayor y donde se instalan las facultades de Medicina y Ciencias, el segundo está destinado á Hospital clínico y el tercero es el departamento de Disección ó Anfiteatro anatómico.

Esta obra, que basta para inmortalizar el nombre de su autor el arquitecto municipal D. Ricardo Magdalena, en que predomina el estilo mudejar, deja impreso en caracteres permanentes el genio creador que supo formar aquel conjunto en que se han hermanado la concepción artística con los fines científicos á que tan hermoso palacio se halla destinado.

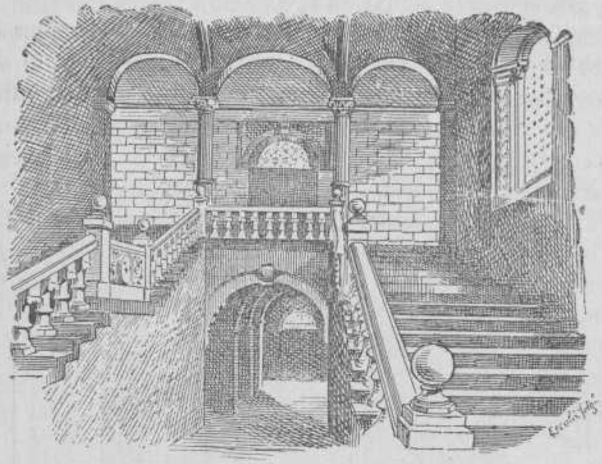
No pudiendo entrar en detalles acerca de tan notabilísima obra de arte, nos limitaremos á citar su hermosa fachada que sobresale del cuerpo del edificio, con sus cuatro estatuas sedentes que representan




VESTIBULO

personajes célebres en las ciencias aragonesas, Piquer, Servet, Jordan de Asso y Fausto Elhuyar, distinguiéndose además en numerosos medallones que rodean al edificio los bustos de los grandes hombres que han brillado en las ciencias matemáticas, físico-químicas y médicas: Descartes, Newton, Galileo, Gay-Lussac, Galeno, Bichat, etc.

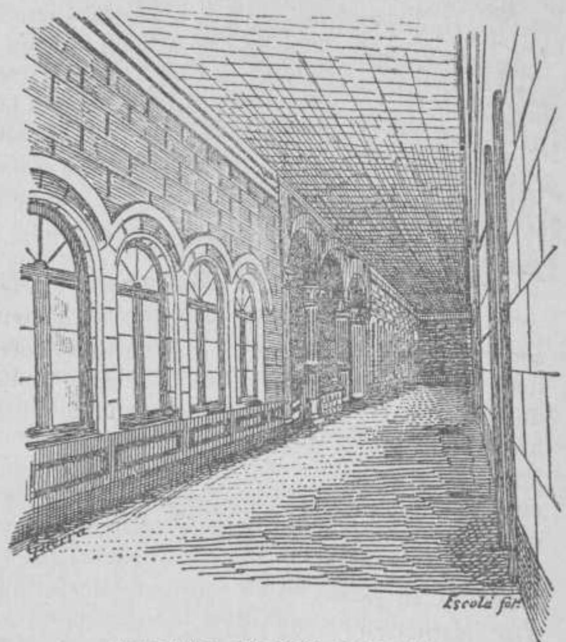
Pasado el espacioso vestíbulo, á uno de cuyos lados se halla la sala de profesores, aparece bifurcada la espaciosa escalinata principal con sus gradas de jaspe y su preciosa barandilla de piedra Fonz, con sus vistosos vidrios de colores y á los lados las estátuas de Hipócrates y Arquímedes, conduciendo al artístico salón de actos, adornado tambien con cristales multicolores que dibujan en dos de sus amplias ventanas las matronas que representan la Medicina y las Ciencias, todo combinado con elegantes molduras, medallones, escudos y artesonados varios.



BIFURCACION DE LA ESCALINATA PRINCIPAL

Tampoco entraremos en descripciones, que deben dejarse á los doctos en la materia, acerca de los laboratorios y gabinetes de Terapeútica, Histología, Histoquimia, Bacteriología, Medicina legal, Fisiología, de Química general, de Químicas inorgánica y orgánica, de Práctica de física, de Historia natural, Museos instrumental y anatómico, Observatorio meteorológico, etc., que, en general, se encuentran bien provistos; pero son dignos de citarse los valiosos ingresos que han tenido los gabinetes de Historia natural y de Física con las colecciones de ejemplares traídos de la Estación biológica de Santander consistentes en animales y plantas marinas; con los numerosos y expléndidos regalos que la activa iniciativa del Sr. Ministro secundada por la generosidad de las sociedades á que se dirijió, ha logrado recabar para las nuevas facultades. Así, la Comisión del mapa geológico ha remitido primorosos ejemplares de rocas y de minerales, algunos de ellos muy notables. El Observatorio astronómico de Madrid, una colección de instrumentos para una estación meteorológica, así como la Dirección de Comunicaciones otra de aparatos telegráficos. También han llegado los aparatos é instrumentos y biblioteca procedentes de la suprimida Escuela Politécnica de Madrid, del Museo del Dr. Velasco una colección de anatomía patológica, de la Dirección de Agricultura una colección de memorias, del ministerio de Gracia y Justicia toda la *Colección legislativa,* importantes regalos del Sr. Calleja y, en fin, un magnífico ejemplar de la monumental obra del P. Blanco *Flora de Filipinas*, que los RR. PP. Agustinos de El Escorial regalaron á los Sres. Fajarnés y Solano, y que éstos ceden generosamente á la Facultad de Ciencias, todo lo cual permitirá desde la inauguración de la enseñanza en el nuevo edificio transmitirla con el vigor y eficacia que el estado actual de la ciencia exige y llevarán á cabo con entusiasmo los dignos profesores encargados de la misma.

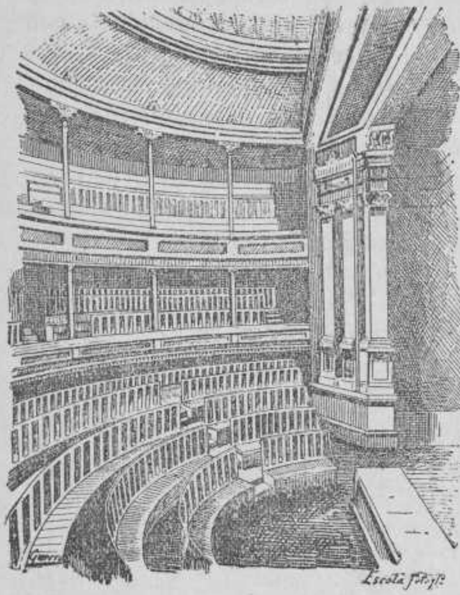
Aquellas nobles aspiraciones que hace veinte años sintieron unos cuantos profesores, doctores y licenciados de fundar estudios científicos en Zaragoza y que comenzaron con las Facultades libres de Ciencias y de Medicina inauguradas bajo los aupicios de la Diputacion provincial, hoy están convertidas en expléndida realidad. Y no puedo menos de recordar con profundísima gratitud y mencionar muy parcularmenta entre las varias enseñanzas, aquéllas de Geometría analítica y las de Cálculos diferencial é integral y Mecánica racional que me comunicaron los hoy queridisimos amigos y compañeros en este claustro D. Bruno Solano y D. Antonino García, que se distinguieron por su entusiasmo y abnegación en la enseñanza y que la prosiguieron en forma que se haya podido continuar casi sin solución de continuidad hasta la fecha [1].


CLAUSTRO DEL PISO PRINCIPAL

Pero aquella abnegación y generosidad necesitaban, para ser duraderas, una base sólida, algo que permitiera arraigar y permanecer tan nobles ideales sobre un fondo que les diera existencia real y continua.

Esta parte importantisima en la obra de establecer definitivamente y en su más alto grado de desenvolvimiento y acción las nuevas en-

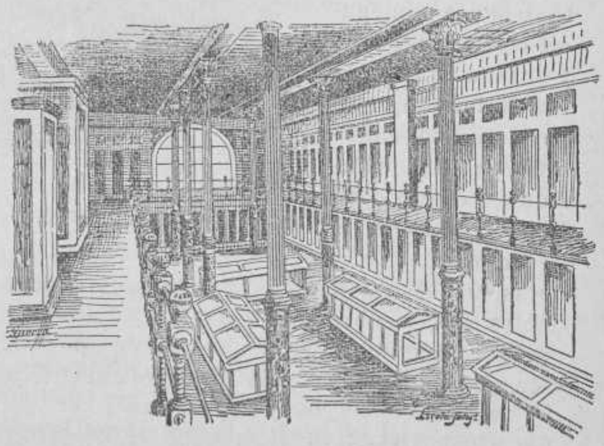
(1) Sólo han sufrido la interrupción de un año por efecto del decreto del señor Linares Rivas, suprimiendo esta Facultad el año pasado.



CÁTEDRA DE CONFERENCIAS

señanzas se debe indiscutiblemente al sabio profesor de Medicina de la Universidad Central é ilustre senador por este Claustro D. Julian Calleja, que jamás ha cesado un momento en su activa gestión por llevar á término la edificación de un local digno de las facultades de Medicina y Ciencias en esta capital, y que el día 18 de este mes vió realizarse sus nobles propósitos con la solemne inauguración del edificio.

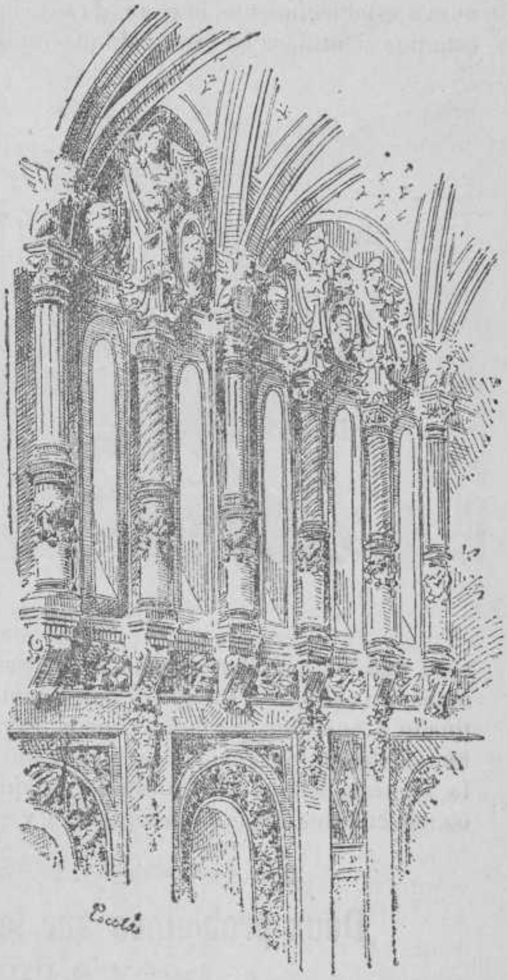
Como solo se trata aquí de daruna reseña breve decuanto ha conducido á fijar en Zaragoza los estudios de las Ciencias matemáticas y experimentales, acaso como precedente para que más tarde puedan establecerse otros estudios prácticos encaminados á promover el desarrollo de las artes y la industria de esta región, solo citaremos los momentos más culminantes de la historia del edificio desde que en 8 de Marzo de 1886, siendo Ministro de Fomento D. Eugenio Montero Rios y Director general de instrucción pública el Sr. Calleja, se pidió informe á los claustros de las facultades de Medicina y Ciencias sobre las ne-



MUSEO DE HISTORIA NATURAL

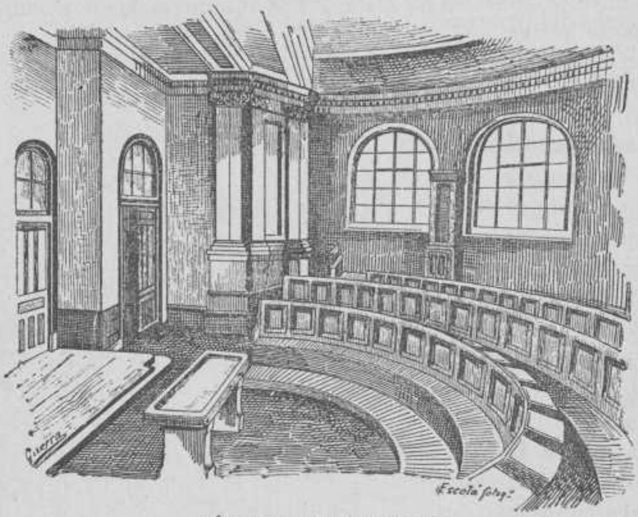
cesidades que deben llenarse en un edificio destinado á la enseñanza de aquéllas, acordándose las bases del programa de construccion del edificio proyectado.

En 20 de Marzo fué designado por el Ministro de Fomento el arquitecto Sr. Magdalena para proponer el proyecto y dirijir la construcción del edificio. El 13 de Noviembre, siendo Ministro de Fomento D. Carlos Navarro Rodrigo, se sacaron á subasta las obras. En 4 de Enero de 1887 quedó hecha la adjudicación de la subasta á favor de D. Juan Pruneda, el 14 de Marzo comenzaron los trabajos de construcción, colocándose el 21 del mismo mes la primera piedra del edificio, extraída de la antigua Universidad.



DETALLE DEL SALON DE ACTOS

Reanudada la enseñanza de la Facultad de Ciencias en 1.º de Septiembre último (despues de la interrupción sufrida en virtud del decreto de 26 de Junio del año pasado, según se dió cuenta en la página 217 del tomo II de este periódico) por el actual Ministro de Fomento Excmo. Sr. D. Segismundo Moret y Prendergast, que además ha agregado á la sección de Ciencias físico-químicas la de Ciencias físico-matemáticas y ha contribuído á enriquecer, con valiosos donativos como arriba se expresó, los gabinetes y la biblioteca del nuevo establecimiento, la gran obra de la instalación definitiva de los estudios científicos ha arraigado profundamente en esta región arago-



CÁTEDRA DE ANATOMÍA

nesa, con los caracteres de un hecho permanente, á contar desde el momento en que se inauguró solemnemente el suntuoso palacio destinado á aquéllos, y sólo nos queda, para terminar, dirigir á cuantos han contribuído á realizar la grande obra, recientemente inaugurada, la modesta felicitación nuestra á la que seguramente han de asociarse cuantos aman la prosperidad y el progreso de la Patria.

Z. G. DE G.

# Deux problèmes sur les progressions

PAR M. G. GILLET

PROFESSEUR Á L'ECOLE ABBATIALE DE MAREDSOUS

**I.** Etant donnée une progression arithmétique indéfinie

$$a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots$$

de raison $r$, on forme la série

$$u_0\ u_1\ u_2\ u_3 \ldots\ldots$$

dont le terme général a pour valeur

$$u_p = a_{kp} + a_{kp+1} + a_{kp+2} + \ldots\ldots + a_{k'p}$$

$k$ et $k'$ étant des constantes. Calculer la somme S des $n$ premiers termes de cette série.

Posons pour abréger $\quad k' + k = 2\lambda,$

$$k' - k = 2\mu;$$

nous aurons successivement

$$u_p = \frac{1}{2}(a_{kp} + a_{k'p})(2\mu p + 1),$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{kp} = a_0 + kpr \\ a_{k'p} = a_0 + k'pr \end{array}\right\} \frac{1}{2}(a_{kp} + a_{k'p}) = a_0 + \lambda pr,$$

$$u_p = (a_0 + \lambda pr)(2\mu p + 1) = (2\mu p + 1)a_0 + p(2\mu p + 1)\lambda r.$$

Par suite,

$$S = \sum_o^n u_p = a_0 \sum_o^n (2\mu p + 1) + \lambda r \sum_o^n p(2\mu p + 1).$$

Mais

$$\sum_o^n (2\mu p + 1) = 2\mu \sum_o^n p + (n+1) = (n+1)(\mu n + 1),$$

$$\sum_o^n p(2\mu p + 1) = 2\mu \sum_o^n p^2 + \sum_o^n p = \frac{1}{3}\mu n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4\mu n + 2\mu + 3);$$

Conséquemment:

$$S = (n+1)(\mu n + 1)a_0 + \frac{1}{6}n(n+1)(4\mu n + 2\mu + 3)\lambda r$$

*Cas particuliers.*—Si $k=1$, $k'=2$, on a $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$; la série se réduit à

$$a_0 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3 + a_4) + \ldots\ldots + (a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots + a_{2n}).$$

Elle a pour somme

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)a_0+\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)r=\frac{1}{2}(n+1)(a+2)a_n$$

Si de plus, les termes de la progression donnée se réduisent à leurs indices, on obtient:

$$(1+2)+(2+3+4)+(3+4+5+6)+.....+(n+\overline{n+1}+\overline{n+2}+.....+2n)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)(n+2).$$

**Cette relation donne la solution de la QUESTION 121, proposée par MR. CATALAN.**

Si l'on prend $a_p=2p+1$, on trouve:

$$1+(3+5)+(5+7+9)+(7+9+11+13)+...+(\overline{2n+1}+\overline{2n+2}+...+\overline{4n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(2n+1).$$

**II.** On peut se proposer de résoudre le problème précédent lorsque la progression arithmétique $a_0\, a_1\, a_2...$ est remplacée par une progression géométrique $b_0\, b_1\, b_2...$ de raison $q$. Dans ce cas, et en conservant toutes les autres notations employées ci-dessus, on obtient:

$$u_p=b_0q^{kp}\left[1+q+q^2+.....+q^{2\mu p}\right]=\frac{1-q^{2\mu p+1}}{1-q}\,\mathrm{b}_0\,q^{kp}.$$

$$\mathrm{S}=\sum_o^n u_p=\frac{b_0}{1-q}\sum_o^n q^{kp}-\frac{b_0}{1-q}\sum_o^n q^{(2\mu+k)p+1}.$$

D'ailleurs,

$$\sum_o^n q^{kp}=\frac{1-q^{nk+1}}{1-q^k}$$

$$\sum_o^n q^{(2\mu+k)p+1}=\frac{1-q^{n(2\mu+k)+1}}{1-q^{2\mu+k}}\cdot q.$$

Par suite

$$(1-q)\,\mathrm{S}=\frac{1-q^{nk+1}}{1-q^k}\,b_0-\frac{1-q^{n(2\mu+k)+1}}{1-q^{2\mu+k}}\,b_1.$$

*Cas particulier.*—Lorsque $k=1$, $k'=2$, on obtient:

$$b_0+(b_1+b_2)+(b_2+b_3+b_4)+\ldots\ldots+(b_n+b_{n+1}+\ldots\ldots+b_{2n})$$

$$=\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2}b_0-\frac{1-q^{2n+1}}{(1-q)(1-q^2)}b_1.$$

## CUESTIONES RESUELTAS

### CUESTIÓN 121.

(Véase t. III, pág. 112)

*A qué es igual la suma de los progresiones*

$$1+2,\ 2+3+4,\ 3+4+5+6, \ldots\ n+\overline{(n+1)}+\overline{(n+2)}+\ldots+2n$$

(*E. Catalán*).

Solución por D. Cecilio Jiménez Rueda

Escríbanse las progresiones sumandos, unas debajo de otras en esta forma; y súmense verticalmente:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & n + (n+1) + (n+2) + \ldots\ldots & (2n-2) & + & (2n-1) & + & 2n \\
+ & (n-1) + \quad n + \ldots\ldots & (2n-4) & + & (2n-3) & + & 2(n-1) \\
+ & (n-2) + \ldots\ldots & (2n-6) & + & (2n-5) & + & 2(n-2) \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\
+ & & 3 & + & 4 + 5 & + & 6 \\
+ & & & & 2 & + 3 + & 4 \\
+ & & & & & 1 + & 2 \\
\hline
\end{array}$$

$$= n+2n+3n+\ldots\ldots+(n-1)n+n.n+(n+1)n =$$

$$= n\big(1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1)\big)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

Solución por el alumno D. Ricardo Caro

La suma de los $n+1$ términos últimos es

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+2n=\frac{3n(n+1)}{2}=\frac{3n^2+3n}{2}=\frac{3}{2}(n^2+n)$$

Si en esta igualdad damos á $n$ los valores, 1, 2, ... $n$, y sumamos las igualdades resultantes, tendremos la suma pedida igual á

$$\frac{3}{2}(1+2+3+\ldots\ldots+n+1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)$$

Conocemos el valor de la suma de primeras y segundas potencias de los $n$ primeros números, que es

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

luego la suma pedida es

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2},$$

siempre entero, pues uno ó dos factores del numerador, son pares.

Solución por el Sr. Sollertinsky

Se tiene

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots\ldots+2n=\frac{3n(n+1)}{2},$$

y se sabe que

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Luego la suma buscada es $=\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$

Solución por el Sr Retali

La progresión propuesta es de segundo orden; las primeras diferencias forman una progresión aritmética cuyo primer término es 6 y cuya razón es 3. Haciendo en la fórmula conocida

$$S=na_0+\binom{n}{2}d_1+\binom{n}{3}d_2$$

$a_0=3$ , $d_1=6$ , $d_2=3$, se obtiene para la fórmula buscada

$$s=3n^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

Solución por D. Jorje Luzón de las Cuevas

La progresión de lugar $p$

$$p.\overline{p+1}\;p+2\ldots\ldots 2p$$

dá para la suma de sus términos

$$\frac{3p\,(p+1)}{2}$$

de donde la de las $n$ progresiones será

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{3p\,(p+1)}{2} = \frac{3}{2} \sum_{p=1}^{p=n} p\,(p+1)$$

La suma de los productos dos á dos de los términos consecutivos de una progresión de $(n+1)$ términos está representada por la fórmula

$$\sum_{q=1}^{q=n} a_q\, a_{q+1} = \sum_{q=1}^{q=n} a_q{}^2 + r \sum_{q=1}^{q=n} a_q \quad (*)$$

así

$$\frac{3}{2}\sum_{p=1}^{p=n} p\,(p+1) = \frac{3}{2}\Big[1^2+2^2+\ldots+n^2+1+2+\ldots+n\Big]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{n\,(n+1)}{2}\right]$$

y efectuando simplificaciones

$$\frac{3}{2}\sum_{p=1}^{p=n} p\,(p+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{2}$$

que resuelve la cuestión.

**Solución por el alumno D. Enrique Mackay Monteverde**

Se tiene

$$m + \overline{m+1} + \overline{m+2} + \ldots\ldots 2m = \frac{3m\,(m+1)}{2}.$$

Luego la suma pedida es

$$S = \frac{3}{2}\Big[1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots\ldots + (n-1)\,n + n\,(n+1)\Big]$$

---

(*) Es muy facil obtener esta fórmula. Basta, á partir del segundo término poner cada uno en función del anterior y multiplicar cada igualdad por el término anterior á su primer miembro.

pero

$$\frac{1}{2}\left[1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-1)\,n+n\,(n+1)\right]=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

por ser el $n^{\text{simo}}$ número piramidal; luego, por último

$$S=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

CUESTIÓN 101

(Véase t. III, pág. 40).

*Se dan dos rectas rectangulares que se cortan en* O. *El punto* A *está sobre la una, el punto* B *sobre la otra.* Se tiene $\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=L^2$

*La envolvente de* AB *es*

$$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=L^{\frac{2}{3}}$$

OA *es eje de las* x, OB *el de las* y. *Estudio de la curva.*

*(E. Lemoine.)*

Solución por el Sr. Lemoine (E).

M. Brocard ha dado de esta cuestión una solución muy elegante que ha deducido de consideraciones generales, y nada hay que añadir á esto.

Yo deseo solamente dar aquí una solución especial que había encontrado.

La idea de buscar en esta envolvente no se me había ocurrido porque, si con los mismos datos se tiene $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=L^2$, se halla una curva muy conocida y de numerosas propiedades. (Envolvente de una recta de longitud constante cuyos extremos describen dos rectas rectangulares).

Sea $OA=\lambda$, $OB=\mu$. Es preciso determinar la envolvente de la recta que tiene por ecuación

$$\mu x+\lambda y=\lambda\mu \qquad (1)$$

con la condición $$\lambda^2-\mu^2=L^2 \qquad (2)$$

y de (1) y (2) se deduce respectivamente

$$x\,\frac{d\mu}{d\lambda}+y=\lambda\,\frac{d\mu}{d\lambda}+\mu \qquad (3) \qquad\qquad \lambda-\mu\,\frac{d\mu}{d\lambda}=0 \qquad (4)$$

de (3) y de (4) se obtiene

$$(x - \lambda)\frac{\lambda}{\mu} = \mu - y \quad \text{ó} \quad \lambda x + \mu y = \lambda^2 + \mu^2 \qquad (5)$$

falta eliminar $\lambda$ y $\mu$ entre (1), (2), (5)

de (1) se obtiene
$$\lambda = -\frac{\mu x}{y \mu} \qquad (6)$$

sustituyendo en (5) este valor de $\lambda$, se tiene, después de haber dividido por $\mu$ y quitando el denominador

$$-x^2(y - \mu) + y(y - \mu)^2 = \mu x^2 + \mu(y - \mu)^2$$

ó desarrollando y reduciendo

$$y^3 - 3y^2\mu + 3\mu^2 y - \mu^3 = x^2 y$$

de donde

$$y - \mu = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \quad \text{ó} \quad \mu = y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)$$

y, según (6)

$$\lambda = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)$$

sustituyendo en (2) estos valores de $\lambda$ y $\mu$, se tiene:

$$x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^2 - y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = L^2$$

ó
$$x\left(^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = L^2 \quad \text{ó en fin} \quad x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$$

que se puede poner también bajo la forma

$$\frac{1}{27}(L^2 + x^2 - y^2)^3 = L^2 x^2 y^2$$

### CUESTIÓN 83.

(Véase tomo II, pág. 280).

*Sobre los lados de un triángulo* $A_1A_2A_3$ *se construyen exteriormente los triángulos equiláteros* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_1$ *é interiormente los triángulos equiláteros* $A_2b_1A_1$, $A_3b_2A_2$, $A_1b_3A_3$. *Sean* $I_1$, $I_2$, $I_3$, $i_1$, $i_2$, $i_3$ *los centros de estos triángulos.*

1.° a) *Si se prolonga* $B_3i_2$ *en una longitud* $i_2N = B_3i_2$, *el triángulo* $B_1Ni_2$ *es equilátero.* b) *Construir el triángulo* $A_1A_2A_3$, *dados los puntos* $B_1$, $I_2$, $B_3$.

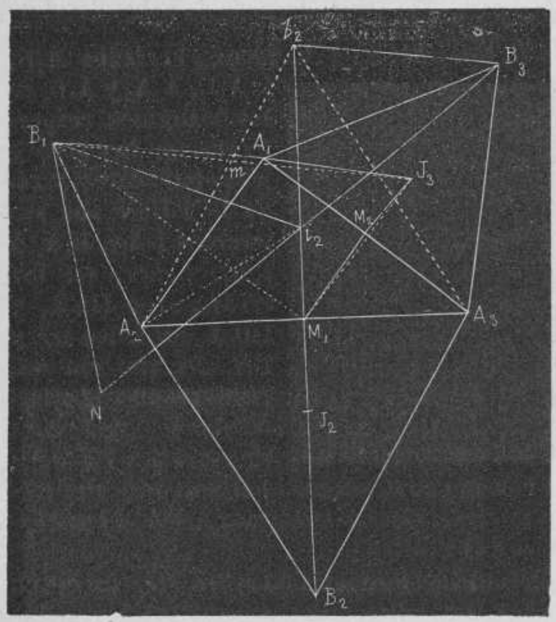
2.° a) *El punto* $I_3$ *es el medio de las rectas* $A_1A_2$ *é* $I_3B_1$ *son los vér-*

*tices de un triángulo equilátero.* b) *Construir el triángulo* $A_1A_2A_3$, *dados los puntos* $I_1$, $B_2$, $I_3$.

*(H. Van Aubel).*

Solución por el Sr. Sollertinsky.

Se sabe que el segmento $B_3b_2$ es igual y paralelo á $A_1B_1$; luego el triángulo $i_2b_2B_3$, después de un giro de 120° llegará á coincidir con $i_2A_2B_1$. Por consiguiente $i_2B_3 = i_2B_1$ y $\angle B_1i_2N = 60^0$, de donde el triángulo $B_1i_2N$ es equilátero. *b*). Según esto, el punto $i_2$ es el centro del triángulo equilátero construido sobre $B_1B_3$.




Luego, dados los puntos $B_1$, $B_3$ se puede construir $i_2$; pero $A_2$, $A_3$ son los vértices de los triángulos equiláteros construidos sobre $J_3i_2$ y $A_1$ el vértice del construido sobre $A_2B_1$ ó sobre $A_3B_3$.

2.° *a*) Sean $M_1$ y $M_2$ los medios de $A_2A_3$ y $A_3A_1$. En los triángulos $J_3M_2M_1$, $J_3A_1B_1$ los lados $J_3M_2$ y $J_3A_1$, $M_2M_1$ y $A_1B_1$ tienen la misma razón $\frac{1}{2}$ y comprenden el mismo ángulo de $60^0$.

Luego lo mismo se verifica en sus terceros lados $J_3M_1$ y $J_3B_1$, de donde, siendo $m$ el medio de $J_3B_1$, el triángulo $J_3mM_1$ es equilátero. *b*) Por consiguiente, dados los puntos $B_1$, $J_3$, $J_2$, se puede construir $M_1$. Se toma en seguida el simétrico $i_2$ del punto $J_2$ con relación á $M_1$; se construyen, en fin, los triángulos equiláteros sobre $i_2J_2$ y sobre $A_2B_1$.

### CUESTIÓN 87

(Véase t. II, pág. 312).

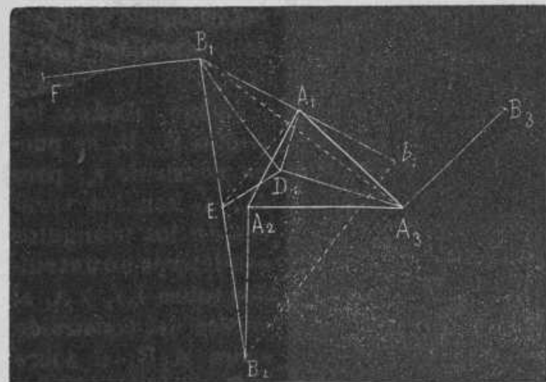
*Sean* $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_1$ *los cuadrados construídos ex-*

*teriormente, sobre los lados de un triángulo* $A_1A_2A_3$ *y* E *el medio de* $B_1B_2$: a) *Demostrar que, si sobre* $EB_1$ *se construye el triángulo* $EDB_1$ *rectángulo en* D *y tal, que* $B_1D = 2ED$, *el triángulo* $A_1DA_3$ *será directamente semejante al triángulo* $EDB_1$ (*). b) *Construir el triángulo* $A_1A_2A_3$, *dados los vértices* $B_1, B_2, B_3$ *de los cuadrados construídos sobre sus lados.*

(H. Van Aubel).

**Solución por el Sr. Sollertinsky**

Sea $b_1$ el simétrico de $B_1$ con relación á $A_1$. Siendo los lados $A_2B_1$ y $A_2b_1$, $A_2A_3$ y $A_2B_2$ de los triángulos respectivamente iguales y perpendiculares, sucede lo mismo con sus terceros lados $B_1A_3$ y $b_1B_2$; luego, en los triángulos $DEA_1$ y $DB_1A_3$ los lados DE y $EA_1$ del uno son respectivamente perpendiculares y dos veces menores que los lados $DB_1$ y $B_1A_3$ del otro. Por consiguiente, sucede lo mismo con sus terceros lados $DA_1$ y $DA_3$: es decir, que el triángulo $A_1DA_3$ es rectángulo en D y tal, que $DA_3 = 2DA_1$.




*b*). Sea $B_1F$ el lado del cuadrado construído sobre $EB_1$. Se tienen así dos figuras, $DB_1FE$ y $DA_3B_3A_1$, directamente semejantes, y de las que se conoce la primera y dos puntos D y $B_3$ de la segunda.

Se pueden, pues, construir sin dificultad los otros dos puntos $A_3$ y $A_1$ de la figura, y los puntos $A_1$ y $B_1$ determinarán el punto $A_2$.

## CUESTIÓN 104

(Véase t. III, pág. 71).

*En cada punto* M *de la evoluta de una elipse se traza la tangente* AMB *que encuentra á los ejes de la curva en los puntos* A *y* B. *Hallar el lugar del punto* D *de esta tangente tal, que* BD=AB.

(*H. Brocard.*)

(*) Se entiende por polígonos directamente semejantes, polígonos que pueden convertirse en homotéticos por una simple traslación, sin giro, de uno de ellos en el plano.

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

La evoluta de una elipse puede considerarse como la proyección ortogonal de una hipocicloide de cuatro retrocesos. Pero esta última curva está envuelta por una recta $A'B'$ de longitud constante, cuyos extremos resbalan sobre dos rectas rectangulares, y se sabe que cada punto $D'$ de la recta móvil describe entonces una elipse. Luego, no cambiando la proyección la relación de los segmentos de una recta, se concluye que todo punto $D$, que divide á $AB$ en una razón constante (igual á $-\frac{1}{2}$ en la cuestión), describe una elipse.

### CUESTIÓN 82

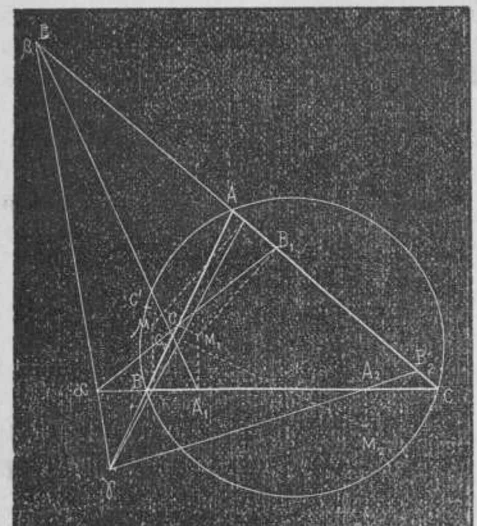
(Véase tomo II, página 279).

*Sean* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *y* $A_2$, $B_2$, $C_2$ *las proyecciones de dos puntos* $M_1$ *y* $M_2$ *sobre los lados de un triángulo* $ABC$. *Si estos puntos se hallan en una misma cónica y el punto* $M_1$ *permanece fijo, ¿cuál es el lugar descripto por* $M_2$?

(*J. Neuberg*).

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

Para que las proyecciones de los puntos $M_1$ y $M_2$ estén en una misma cónica, es necesario y suficiente que los lados opuestos del exágono $A_1A_2B_2B_1C_1C_2$ se hallen en una misma recta.




Sean $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ los puntos en que $B_1C_1$, $C_2A_1$, $A_2B_2$ encuentran respectivamente á $BC$, $CA$ y $AB$; $C'$ el punto diametralmente opuesto á $C$ en la circunferencia $ABC$.

Dado el punto $M_1$, se obtiene desde luego el punto $\alpha$, y por este punto se traza una transversal cualquiera $\alpha\beta\gamma$.

La intersección de $A_1\beta$ y $AB$ dará el punto $C_2$ correspondiente.

Después, si se hace girar $A_2B_2$ alrededor de $\gamma$, la intersección $\mu$ de las perpendiculares en $A_2$ y $B_2$ describirá una curva.

Siendo homográficas las divisiones $A_2$, $B_2$, esta curva es una hipérbola que tiene sus asíntotas perpendiculares á BC y CA, y que pasa por C y C'. Esta hipérbola encuentra á la perpendicular levantada en $C_2$ siempre *en dos puntos*, reales ó imaginarios. Cada uno de estos puntos es una posición de $M_2$.

Pero cuando el punto $\gamma$ se aleja al infinito, la hipérbola degenera en dos rectas. La recta CC' es la del infinito, y por consiguiente, uno de los puntos correspondientes $M_2$ se aleja también al infinito.

Así, toda perpendicular á AB encuentra al lugar de $M_2$ siempre en tres puntos de los que uno está en el infinito.

*El lugar de* $M_2$ *es*, pues, *una cúbica cuyas asíntotas son perpendiculares á los lados de* ABC *y que pasa por los vértices de* ABC, *por los puntos* A', B', C' *diametralmente opuestos á estos vértices sobre el círculo de* ABC *y por el inverso de* $M_1$.

La cúbica pasa también por $M_1$, cuando los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son homológicos.

CUESTIÓN 108

(Véase t. III, pág. 71).

*El cociente de* $(2m-1)!$ *por* $m!\,(m-1)!$ *es siempre un número par, excepto cuando* m *es una potencia de* 2.

(*Wolstenholme*).

Solución por el Sr. Sollertinsky. (B).

En el producto $m!$ hay $m_1$ números pares, y se tiene

$$m_1 \leqq \frac{m}{2}$$

El producto de estos números pares será igual á

$$2^{m_1}.\, m_1!$$

Si el producto $m_1!$ contiene $m_2$ números pares, se tendrá

$$m_2 \leqq \frac{m_1}{2}$$

y estos números darán $\quad 2^{m_2}.\, m_2!$

Se tendrá enseguida $\quad m_3 \leqq \dfrac{m_2}{2}$

. . . . . . . .

$$m_p \leqq \frac{m_{p-1}}{2}$$

$$1 \leqq \frac{m_p}{2}$$

Haciendo $\quad S = m_1 + m_2 + \ldots + m_p + 1,$

se tendrá $\quad m! = 2^s . N$

designando N′ un número impar.

Ahora, sumando las desigualdades, se tendrá

$$S \leqq \frac{m-1}{2} + \frac{S}{2}$$

de donde $\quad S \leqq m - 1$

Se tendrá la igualdad $S = m - 1$ con la sola condición de que todos los números $m, m_1, m_2, \ldots m_p$ sean pares; entonces el número $m$ es una potencia de 2. En todos los demás casos se tendrá $S < m - 1$.

Pero el producto $(2m-1)! = 2.4.6.\ldots(2m-2).1.3.5.\ldots(2m-1)$

$$= 2^{m-1}(m-1)!.1.3.5.\ldots(2m-1)$$

de donde

$$\frac{(2m-1)!}{(m-1)!\,m!} = \frac{2^{m-1}1.3.5.\ldots(2m-1)}{m!} = 2^{m-1-S}N',$$

designando N′ un número impar.

## CUESTIONES PROPUESTAS

**146.** Demostrar que

$$(a+b)^n = a^2[(a+b)^{n-2} + 2b(a+b)^{n-3} + \ldots + (n-1)^{n-2}] + nab^{n-1} + b^n$$

*(Juan J. Duran Loriga)*

**147.** Siendo $D_1, D_2, I_3, i_4$ los medios de los lados $A_1B_2$, $A_2A_3$ y los centros de los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre el lado $A_3A_4$ é interiormente sobre el lado $A_4A_1$ de un cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$, la recta $I_3i_4$ será igual y paralela al diámetro $D_2M$ del círculo circunscripto al triángulo equilátero construido sobre $D_1D_2$.

*(H. Van Aubel).*

**148.** Dadas tres circunferencias (A), (B), (C) situadas de una manera cualquiera en un plano, construir un triángulo semejante á un triángulo dado T, cuyos vértices *a, b, c* se hallan en estas circunferencias, no empleando más que los recursos de la Geometría elemental.

*(A. Schiappa Monteiro).*

**149.** Discutir y resolver la ecuación

$$4x \cos x + (3x^2 - 4) \operatorname{sen} x = 0$$

*(Vecchio).*

**150.** Sea S la intersección de la simediana AS del triángulo ABC con el círculo circunscripto. Sobre la mediana OA del triángulo se toma AD=AD'=AS.

Si el punto A describe una elipse que tiene B y C por focos,

1.º La perpendicular DE sobre OD envuelve una elipse coaxial.

2.º Siendo E el punto de contacto de DE, todo punto del segmento AE describe una elipse, y la recta AE es la normal de una de estas curvas.

3.º La intersección F de las tangentes en A y E es el centro de curvatura, en A, de la hipérbola que tiene B y C por focos; este punto F recorre una curva que tiene la ecuación de la forma

$$\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\beta^2}{y^2}=1.$$

Si el punto A describe una hipérbola que tiene B y C por focos,

1.º La perpendicular D'E' sobre OD' envuelve una hipérbola coaxial.

2.º Siendo E el punto de contacto de D'E', todo punto del segmento AE' describe una hipérbola, y la recta AE' es la normal de una de estas curvas.

3.º La intersección F' de las tangentes en A y E' es el centro de curvatura en A de la elipse que tiene B y C por focos; este punto F' recorre una curva que tiene la ecuación de la forma

$$\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\beta^2}{y^2}=1.$$

*(Sollertinsky).*

**151.** La mediatriz (*) del lado BC de un triángulo ABC encuentra á CA y AB en B',C'. Sean C'', B'' las proyecciones de estos puntos sobre AB y AC. Demostrar que

1.º La recta B''C'' pasa por el medio M de BC y por el centro del círculo de los nueve puntos de ABC.

---

(*) La perpendicular levantada en el punto medio de BC.

2.º Siendo H el ortocentro de ABC, las bisectrices de los ángulos BHC y BAC se encuentran en B″C″.

(*Sollertinsky*).

**152.** Sea M un punto cualquiera del círculo circunscripto al triángulo equilátero ABC. Demostrar que las rectas que unen este punto á los medios de los arcos subtendidos por los lados, encuentran á estos lados sobre el diámetro del círculo paralelo á la recta de Simson del punto M.

(*Sollertinsky*).

**153.** Sean A, B, C tres puntos en línea recta, B entre A y C. Se trazan sobre AC, á un mismo lado, perpendiculares AA′ = BC, CC′=AB y al otro lado de AC la perpendicular BB′= AC.

Demostrar que el ángulo de Brocard del triángulo A′B′C′ es constante.

(*J. Neuberg*).

**154.** Dados cuatro puntos A, B, C, D de una manera cualquiera en un plano, se trazan las rectas AD, BC, que se encuentran en E, después la recta que une los centros de gravedad G, G′ de los triángulos ABC y ACD; sean A′, B′, C′, D′, M los puntos de encuentro de GG′ con AB, BC, CD, DA, AC. Demostrar que en magnitud y signo se tendrán las relaciones:

*a*) $$\frac{GG'}{A'G} = \frac{EB}{CB} \cdot \frac{DA}{CA}, \quad \frac{G'G}{C'G'} = \frac{CB}{EC} \cdot \frac{ED}{DA}$$

*b*) $$\frac{GG'}{B'G} = \frac{ED}{EA}, \quad \frac{GG'}{D'G'} = \frac{EB}{EC}$$

*c*) $$\frac{MG}{MG'} = \frac{CB}{EC} \cdot \frac{EA}{AD}.$$

(*H. Van Aubel*).

**155.** Siendo C′ el punto medio del lado AB de un triángulo ABC, si se prolonga el lado BC una longitud CA′ = BC y el lado CA una longitud AB′ = 2CA, el triángulo MNP que tiene por vértices los medios de AA′, BB′, CC′ será equivalente al triángulo ABC.

(*H. Van Aubel*).

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.