Año III Zaragoza 15 Julio de 1893 Núm. 31

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

EL CONGRESO DE BESANZON

L'Association française pour l'avancement des sciences publica, como se dijo ya en este periódico al tratar del Congreso de Marsella (t. I, pág. 291), un tomo anual, en el cual se contienen los trabajos correspondientes á sus cuatro grupos: 1.º, ciencias matemáticas; 2.º, ciencias físicas y químicas; 3.º, ciencias naturales; 4.º, ciencias económicas, subdividiéndose en 17 secciones, á saber: 1.ª, de matemáticas, astronomía y geodesia; 2.ª, de mecánica; 3.ª, de navegación; 4.ª, de ingeniería civil y militar; 5.ª, de física; 6.ª, de química; 7.ª, de meteorología y física del globo; 8.ª, de geología y mineralogía; 9.ª, de botánica 10, de zoología, anatomía y fisiología; 11, de antropología; 12, de ciencias médicas; 13, de agronomía; 14, de geografía; 15, de economía política y estadística; 16, de pedagogía; 17, de higiene y medicina pública.

Otro de los medios adoptados para realizar sus fines es la celebración anual de congresos científicos en ciudades distintas de Francia, designadas previamente por la Asociación.

Este año se ha fijado la ciudad de Besanzon como punto donde ha de celebrarse la sesión general, que durará ocho días, bajo la presidencia de M. Ch. Bouchard, miembro del Instituto y de la Academia de Medicina; siendo también presidente de las dos secciones primeras que comprenden las Matemáticas, la Astronomía, Geodesia y Mecánica M. G. de Longchamps, profesor de matemáticas especiales en el Liceo Saint-Louis de París.

El Congreso se inaugurará el jueves 3 de Agosto próximo, y terminará el 10 del mismo mes.

Independientemente de las sesiones de las secciones y de las conferencias el Congreso comprenderá visitas científicas é industriales y excursiones. Una excursion de tres días, 11, 12 y 13 de Agosto, tendrá lugar en el Jura después de cerrarse la sesión.

En ocasión oportuna se dará cuenta de los trabajos realizados por la Asociación francesa durante el año corriente en la sección de ciencias matemáticas.

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

(CONTINUACIÓN)

35. CASO EN QUE LA BASE DE REFERENCIA ES UN ÁNGULO. —*a*) En esta base se funda el sistema de *coordenadas cartesianas*, en el que cada punto se determina por su *abscisa* y su *ordenada*.

b) En el caso de una recta se hallará ésta determinada por sus *intersecciones con los lados del ángulo* ó ejes de coordenadas (*coordenadas de la recta*).

c) También una recta se determina por su *distancia al origen y el ángulo que ésta forma con uno de los ejes* (*) (en este sistema de coordenadas, normal de Hesse, se dan la distancia al origen y el ángulo que ésta forma con uno de los ejes coordenados).

36. TRIÁNGULO DE REFERENCIA.—Ocurre en el importantísimo sistema de coordenadas *baricéntricas* ó *trilineales* el referir los puntos de un plano á un triángulo llamado de referencia, es decir, á tres puntos ó á tres rectas, determinándose un punto por las *áreas* de los tres triángulos que se forman, uniéndolo con rectas á los tres vértices (ó por cantidades proporcionales á éstas) ó por sus distancias á los tres lados (ó cantidades proporcionales á éstas).

Teniéndose un elemento de más para la determinación de un punto, las condiciones que lo determinan con relación ó los tres puntos P, P', P" han de satisfacer á una relación particular.

En efecto; sean E, E', E" los pies de las tres perpendiculares bajadas á la recta desde P, P' P" y M, M', M" las intersecciones con P'P", PP", PP', tendremos que

$$\frac{PE}{P'E'}=\frac{M''P}{M''P'}, \quad \frac{P''E''}{PE}=\frac{M'P''}{M'P}, \quad \frac{P'E'}{P''E''}=\frac{MP'}{MP''};$$

luego

$$\frac{M''P.M'P''.MP'}{M''P'.M'P.MP''}=1 \qquad [\alpha]$$

(*) Que se reduce al problema de trazar á una circunferencia una tangente paralela á una recta dada.

Si, pues, una recta está determinada por los puntos C′ y M′ (fig. 29) tomados en los lados del ángulo A, el punto A′ de intersección con el tercer lado no es arbitrario, sino que se halla determinado por la relación [α]

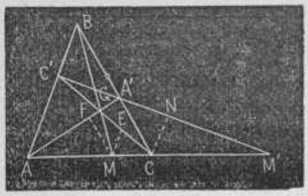


Fig. 29.

$$\frac{A'B.AC'.M'C}{A'C.C'B.M'A} = 1. \qquad [1]$$

Caso particular.—Si el punto M′ es el punto en el infinito de AC, en cuyo caso C′M′ es paralela á la base, resulta que

$$\text{por ser } \frac{M'C}{M'A} = 1, \quad \text{se tiene } \frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{AC'},$$

proposición que se deduce directamente en todos los tratados elementales.

37. Polo y polar.—En vez de trazarse la recta C′M′ podemos considerar los dos puntos A′ y C′ que dan implícitamente las rectas AA′ y CC′, y por consiguiente, su punto de intersección G.

De modo que, siempre á una misma recta C′A′ (*polar*), corresponde un punto G (*polo*).

Pero todas las construcciones y relaciones anteriores son consecuencias necesarias del trazado de la recta M′C′. Por consiguiente, si ésta pasa constantemente por M′, ó gira alrededor de este punto, á cada una de sus posiciones corresponderá un punto de la recta BM que une el vértice B (fig. 29) con el conjugado armónico de M′ con respecto á la base AC del triángulo de referencia.

Recíprocamente.—Si en vez de trazarse la recta C′A′ se toma un punto G, de éste se pasará á la recta como de la recta hemos pasado al punto.

Dicha figura tiene otra interpretación, como se sabe, considerándose móvil el triángulo C′GA′, de manera que sus tres lados giren alrededor de los polos A, C, M′ y sus vértices A′, C′ recorran las rectas BA, BC, resultando que *el tercer vértice* G *recorrerá el rayo* BD *conjugado armónico del* BM′ *respecto á los rayos* BA *y* BC.

Casos particulares.—1.º Si el punto M′ es el punto en el infinito de la base, el punto M es el pie de la mediana, y recíprocamente: Si G es un punto de la mediana, la recta C′A′ es paralela á AC′. Luego *el lugar geométrico del punto* G *cuando la recta* A′C′ *gira alrededor del punto* *en el infinito, ó cuando se traslada paralelamente á la base, es* LA MEDIANA.

2.º Cuando el punto M es tal que BM' es la bisectriz del ángulo adyacente al B, el punto G recorre la bisectriz de este ángulo, mientras A'C' gira alrededor de M'.

3.º Cuando los puntos A', C' son los pies de las alturas, al punto M' corresponde el pie M de la tercera altura.

Observación.—Estos tres puntos, cuando el triángulo es isósceles, se hallan en la altura, que además es bisectriz y mediana, y cuando el triángulo es equilátero se hallan confundidos en uno solo, que es el centro.

38. POLAR Y POLO TRILINEALES.—Pero dado un triángulo de referencia ABC y un punto M (fig. 30), no sólo está determinada la recta B'C', sino las otras dos A'B' y A'C' que resultan extendiendo la primitiva construcción, lo que nos da los tres puntos A", B", C", que en la dirección de cada lado del triángulo son los conjugados armónicos de A', B', C' respectivamente. Y aplicando la relación obtenida que constituye el teorema de Menelao, se deduce que *los tres puntos* A", B", C" *están en línea* RECTA (que es la polar de M respecto al triángulo ABC ó la *polar trilineal* de M, siendo M el *polo trilineal* de A"B"C"), así como cada uno de éstos con dos de los otros A"B'C', B"A'C', C"A'B', y en virtud de recíproco del teorema de Juan de Ceva, que las tres rectas AA', BB", CC", etc., son concurrentes.

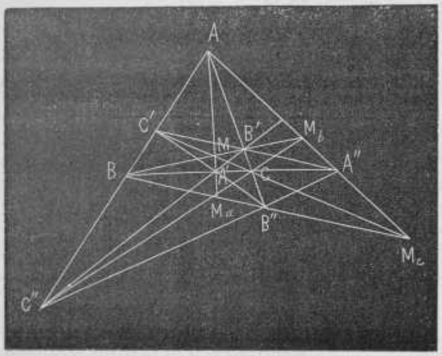


Fig 30.

Casos particulares.— Correspondiendo al pie de la mediana, según 37 (*caso part.* 1.º), el punto de intersección M' (fig. 29) de A'C' y AC en el infinito, en el caso de ser G el centro de gravedad (*centroide* del triángulo), la recta A"B"C" (fig. 30) será la línea en el infinito del plano del triángulo.

2.º Si M es el *ortocentro* H, la polar trilineal correspondiente se llama *eje órtico.*

3.º Si M es el centro I del círculo inscripto, su polar trilineal es el *eje antiórtico* de ABC.

4.º Si M es el punto K de Lemoine, la polar trilineal es la *recta de Lemoine.*

39. DETERMINACIÓN GENERAL DE LA RECTA. — Supongamos los puntos P y Q distintos de los vértices A y C. Supongamos además el punto M' fijo y el punto G determinado por cada posición de la recta M'A'C' al girar alrededor de M'. La consideración de algunos segmentos proporcionales y algunas eliminaciones de términos medios conducen á demostrar, como se sabe, que al girar A'C' alrededor de M', G engendra la recta BM, pues

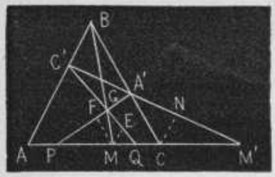


Fig. 31

$$\frac{ME}{AC'}=\frac{MQ}{AQ},\quad \frac{BC'}{ME}=\frac{BG}{BM};\quad \text{luego}\quad \frac{BC'}{AC'}=\frac{MQ}{AQ}\,\frac{BG}{GM}$$

$$\frac{MF}{CA'}=\frac{MP}{CP},\quad \frac{BA'}{MF}=\frac{GB}{BM};\quad \text{luego}\quad \frac{BA'}{CA'}=\frac{MP}{CP}\,\frac{BG}{GM}$$

$$\text{luego}\quad \frac{BC'}{AC'}\,\frac{CA'}{BA'}=\frac{MQ}{AQ}:\frac{MP}{CP};\ \text{luego}\ \frac{CM'}{AM'}=\frac{MQ}{AQ}:\frac{MP}{CP}\ (*) \qquad [1]$$

Este razonamiento demuestra la proposición recíproca del lema IV de Pappus, y se demuestra calcando el mismo razonamiento hecho en la *Geom. elem.* (pág. 229, parte 2.ª).

Allí, en efecto, de la hipótesis

$$\frac{QP}{BA}=\frac{\rho Q}{\rho B}\,\frac{RP}{RA}$$

se deduce que los puntos m, S, R están en línea recta, razonando de la manera siguiente:

Fig. 32.

$$\frac{QP}{an}\,\frac{an}{ak}\,\frac{ak}{BA}=\frac{\rho Q}{\rho B}\,\frac{RP}{RA}\quad \text{(hipótesis)}$$

$$\text{Pero}\qquad \frac{QP}{an}=\frac{mP}{ma},\quad \frac{an}{ak}=\frac{\rho Q}{\rho B},\quad \frac{ak}{BA}=\frac{Sa}{SA};$$

$$\text{luego}\qquad \frac{QP}{an}\,\frac{ak}{BA}=\frac{RP}{RA}\quad \text{ó}\quad \frac{mP}{ma}\,\frac{Sa}{SA}=\frac{RP}{RA};$$

$$\text{luego}\qquad \frac{mP}{mA}\,\frac{am}{XA}=\frac{RP}{RA}\quad \left(\text{pues}\ \frac{Sa}{SA}=\frac{ma}{XA}\right)$$

luego m, S, R están en línea recta. (Obsérvese que la relación [1] es la

(*) Esta relación entre los tres pares de puntos M y M', A y P, C y Q; es, como se sabe, de involución.

misma que la que expresa la proposición demostrada. Se hace esto visible sustituyendo las letras de la figura 12, a, b, S, m, ρ, Q, P, B, A, R, respectivamente, por las B, C', A', G, A, Q, M, M', C, P de la 28.)

Demostraremos la recíproca diciendo:

Sea el triángulo MBC y la transversal GA'P; se tiene que:

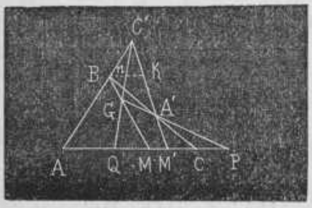


Fig. 33.

$$\frac{GM}{GB}\,\frac{A'B}{A'C}\,\frac{PC}{PM}=1$$

pero

$$\frac{GM}{GB}=\frac{QM}{Bn},\quad \frac{A'B}{A'C}=\frac{Bk}{M'C};$$

$$\frac{GM}{GB}\,\frac{A'B}{A'C}=\frac{QM}{M'C}\,\frac{Bk}{Bn},$$

y $$\frac{Bk}{Bn}=\frac{AM'}{AQ};\quad \text{luego}\quad \frac{QM}{M'C}\,\frac{AM'}{AQ}\,\frac{PC}{PM}=1$$

que es la relación de la hipótesis del lema IV.

Casos particulares.—Cuando BC es paralela á AC, ó sea, cuando el triángulo tiene el vértice en el infinito, la recta que une C' con C es paralela á BC; la relación [1] se reduce á

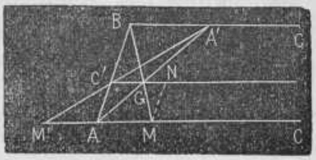


Fig. 34.

$$BC'.AM'=BA'.AC'$$

y por ser

$$\frac{C'B}{C'A}=\frac{BA'}{MA'};\quad \frac{C'B}{C'A}=\frac{BG}{GM}=\frac{BA'}{AM},\quad \text{resulta } AM=AM'.$$

En el caso de ser los puntos P y Q distintos de A y B, trazándose la MN paralela á AC' (*) el empleo de los triángulos semejantes QMN y QAC', GMN y GBC', ABG y PMG' conducirá á

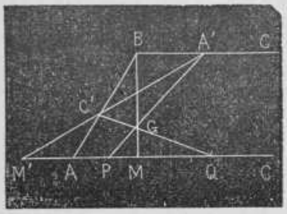


Fig. 35.

$$\frac{MN}{AC'}=\frac{MQ}{AQ};\quad \frac{BC'}{MN}=\frac{BG}{GM};$$

luego $$\frac{BC'}{AC'}=\frac{MQ}{AQ}\,\frac{BG}{GM}$$

ó $$\frac{BC'}{AC'}=\frac{MQ}{AQ}\,\frac{BA'}{PM},\quad \frac{BA'}{M'A}=\frac{MQ}{MP};\quad \text{y en fin}\quad \frac{MQ}{AM}=\frac{MQ}{AQ}$$

que es el recíproco del lema I de Pappus.

(*) La recta MN falta en la figura.

40. RECAPITULACIÓN. En resumen, vemos que los elementos de Euclides son un desenvolvimiento ó expansión del principio de la determinación de la recta:

Dos puntos determinan una recta

ó su caso particular:

Por un punto solo puede trazarse una paralela á una recta (α) ó bien: *Si una recta que encuentra á otras dos forma ángulos interiores cuya suma es menor que dos ángulos rectos, estas dos rectas, prolongadas indefinidamente, acabarán por encontrarse* (al lado en que forman los dos ángulos que juntos valen menos que dos rectos):

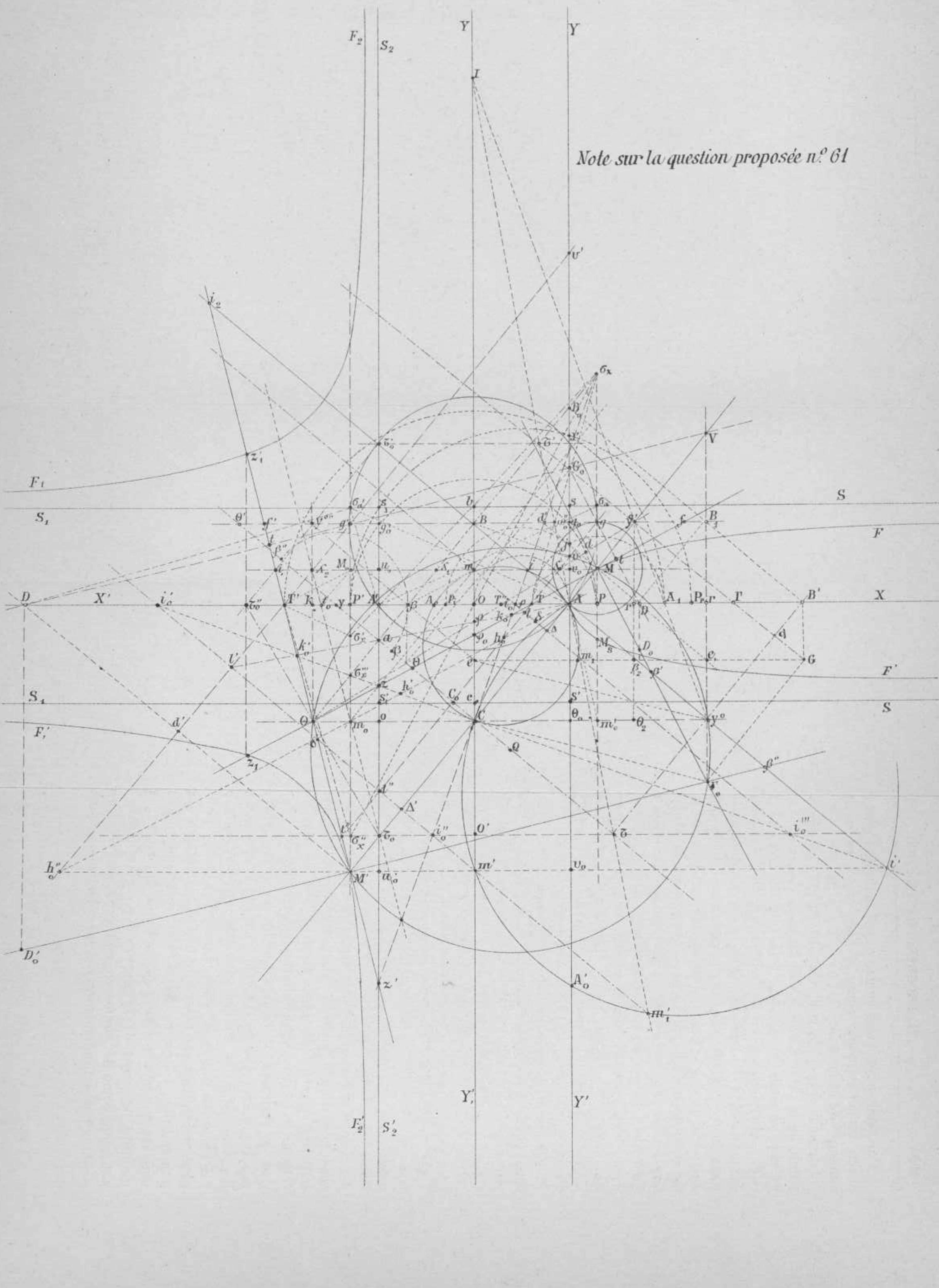
Para terminar estas generalidades sobre el sistema de la geometría euclídea, analizaremos el encadenamiento é ilación lógica de las proposiciones concernientes á la igualdad y desigualdad de segmentos, ángulos y figuras, y las consecuencias que se obtienen para el sistema general de éstas.

Basta establecer la proposición fundamental de la igualdad de figuras (prop. IV. lib. I): *Dos triángulos que tienen iguales dos lados respectivamente é iguales los ángulos comprendidos, tendrán iguales sus bases y sus otros dos ángulos*) que equivale á decir que *un triángulo está determinado por dos lados y el ángulo comprendido*) para que resulten implícitamente establecidos los demás casos de la igualdad de triángulos. Y esta conclusión se halla tácitamente establecida en los Elementos con el mero hecho de hallarse demostrados *ad absurdum* los casos correspondientes á *tres lados iguales* y á *un lado y dos ángulos* en las proposiciones VII, VIII y XVI, lo que podemos hacer ostensible reproduciendo los razonamientos arriba expuestos, pues, en efecto: Dados b, A, c, (dos lados y el ángulo comprendido) quedan determinados B, a, C (los otros dos ángulos y el tercer lado). Pero la figura (bAc) está determinada; luego al partir de la segunda figura (BaC), como las rectas que con a forman los segundos lados de los ángulos B y C están determinadas (ó son únicas), de la figura (BaC) se pasa á la figura (bAc), es decir, la determinación de aquélla lleva consigo la determinación de ésta.

También si con tres lados a, b, c está formado un triángulo, y se llama A al ángulo de b y c, la figura (abc) se confunde con la figura (bAc); pero ésta se halla determinada según la proposición fundamental, es decir, que á c y b con el ángulo A corresponde el único tercer lado a con los ángulos B y C; luego partiendo de a como base los lados b y c tienen que confundirse con los de la figura (bAc).

Así, determinada la figura (bAc), quedan determinadas las (bac), (BaC), (Aab), (Cac).

Note sur la question proposée n.º 61



que hemos estudiado en los Elementos, á saber: las relaciones anarmónica, armónica y de involución, etc., y que generalizándose y modificándose llegan hasta las teorías superiores *de las curvas y de las superficies.*

(Se continuará.)

NOTA SOBRE LA CUESTIÓN PROPUESTA NÚMERO 61 (*)

POR

el Sr. D. Alfredo Schiappa Monteiro.

Después de publicada la interesante nota por el sabio matemático M. H. Brocard (**) sobre esta cuestión, que propuso, y cuya restricción nos ha hecho limitar su estudio, no podemos ahora dejar de ocuparnos de las propiedades que habíamos omitido entonces en nuestra solución, así como de entrar en ciertos desarrollos y de presentar simplificaciones en las construcciones que hemos hallado después de a publicación de la solución, como sucede ordinariamente en trabajos de esta naturaleza.

Al mismo tiempo no podemos tampoco dejar de agradecer la benevolencia que M. Brocard nos ha dispensado y que nos anima á ocuparnos nuevamente de este asunto, á pesar de nuestros débiles recursos.

Generación de la curva.

Como se sabe, esta cúbica clásica *unicursal* (F), de la que el docor Julius Plücker se ha ocupado también de paso en su estudio general sobre las curvas de tercer orden (***), puede *engendrarse de diversas maneras*, de las cuales vamos á considerar algunas.

Por el punto M tracemos paralelamente á AA′ la recta MM_0 que corta á YY′, AB, BC, $A's_1$, M′P′ en los puntos v_0, i, m, u_0, M_0, y sean g, g_0, g'_0, g' los puntos de intersección de PM, YY′, $A's_1$, P′M′ con $B^0\gamma'$. perpendicular á BC.

Según esto, siendo los triángulos rectángulos AMi, mBi evidentemente iguales, se tendrá $MA = mB = Mg$. Para el punto M′ se tendrá análogamente $M'A = M'g'$, y los dos círculos (M) y (M′) de radios respectivamente iguales á MA, M′A cortarán ortogonalmente en los pun-

(*) Véase *El Progreso Matemático*, t. II, págs. 128, 300.

(**) Véase el mismo periódico, t. III, pág. 82.

(***) Véase *System des analitischen Geometrie*, von Dr. Julius Plücker (1835). S. 158, N. 200.

tos g y g' al círculo (B) de radio BA, de la serie de círculos que tienen por cuerda real común segmento $AA'=2a$. Luego

La cúbica (F) *puede ser engendrada por el centro de un círculo variable* (M), *que pasando por uno de los puntos límites* A *de una serie de círculos* (B), (O), (C),...., *que tienen por cuerda real común el segmento* $AA'=2a$, *corta ortogonal á uno de los círculos* (B) *de esta serie.*

Es fácil ver que *los puntos* M *y* M' *pertenecen á una parábola* (μ) *que tiene respectivamente por foco y directriz el punto* A *y la recta* Bg_0gB_1, *y por consiguiente, por vértice el punto medio del segmento* Ag_0.

Es fácil deducir la ecuación de la curva partiendo de esta generación

En efecto, se tiene

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 - \overline{AB}^2; \tag{1}$$

pero los triángulos rectángulos semejantes BAM y AOm dan

$$MB = \frac{mA}{OA} . AB$$

y reemplazando este valor en (1), resulta

$$\overline{MA}^2 = \overline{AB}^2 \left(\frac{\overline{mA}^2}{\overline{OA}^2} - 1 \right)$$

ó bien

$$\overline{MA}^2 = \frac{\overline{Om}^2}{\overline{OA}^2} . \overline{mM}^2 \tag{2}$$

Pero como se tiene

$$MA = \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad mM = x + a, \quad Om = y$$

se obtiene

$$y^2 = \frac{a^2x}{a+2x} \tag{3}$$

ecuación cartesiana de la cúbica (F).

Siendo las rectas Mv_0im, $M'm'v'_0i'$ tangentes al círculo (C), de diámetro $\tau_0A = 2.AC$ de esta serie, resulta que:

Cuando una circunferencia variable (C) *pasa por dos mismos puntos* A, A', *sus tangentes* Mm, M'm', *paralelas á la cuerda* AA' *determinada por estos puntos, cortan al diámetro* τ_0A *que pasa por uno de estos puntos* A, *en un par de puntos* M *y* M', *cuyo lugar geométrico es la cúbica* (F).

Basándose en esta generación, se tiene para el punto M

$$\overline{Mm}^2 = MA.M\tau_0 = MA\,(MA + 2.AC) \tag{4}$$

ó
$$\overline{Mm}^2 = \overline{MA}^2\left(1+2\frac{AC}{MA}\right) \tag{5}$$

expresión que, en virtud de la semejanza de los triángulos OAC y PMA, se reduce á

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MA}^2\left(1+2\frac{OA}{AP}\right) \tag{6}$$

de la cual se deduce la ecuación (3), reemplazando los valores respectivos de estos segmentos.

Si se trazan las directrices $mi_0\Delta m_1$, $m'_1m'\Delta' i'_0$ *de la hipérbola* (H) *que tiene el segmento* $\tau_0 A$ *por eje transverso y los puntos* M, M′ *por focos, estos puntos serán los polos de estas directrices con relación al círculo variable* (C) *de radio* AC, *ó lo que es igual, los pares de puntos* M, Δ; M′, Δ' *serán conjugados armónicos del par de puntos* A, τ_0.

Considerando la hipérbola equilátera (H_c), *cónica suplementaria del círculo* (C) *con relación á su diámetro* $\tau_0 A$, *los puntos* Δ *y* Δ' *serán los polos de las cuerdas principales de ésta hipérbola, que pasan por los focos* M, M′, *de la hipérbola* (H). *La longitud de estas cuerdas será igual á* 2Mm *ó á* 2AB, *y se tendrá* $CO = C\Delta = \Delta' C$.

En virtud de la igualdad de los triángulos Omi_0 y $\Delta A i_0$, se tendrá también $\Delta A = Om = Av_0 = PM$. Según esto, teniendo el círculo (m) el centro en m y el radio $mv_0 = a$, y siendo tangente á las rectas YAY′, $S_2A'S'_2$ en los puntos v_0, u_0 también será tangente al radio vector AM en el punto Δ, y, por consiguiente, de esto se concluye que:

Dada una recta YAY′ *y un punto fijo* A *en ésta, si un círculo* (m) *de radio constante* a *se mueve en su plano teniendo siempre esta recta por tangente, su radio de contacto* mv_0 *cortará á la segunda tangente* $A\Delta$, *trazada por este punto fijo en un punto* M *cuyo lugar es la cúbica* (F).

De esta última propiedad se deduce fácilmente la ecuación de la curva, puesto que se tiene

$$\overline{M\Delta}^2 = Mv_0 . Mu_0 \tag{7}$$

ó
$$(\sqrt{x^2+y^2}+y)^2 = x(x+2a) \tag{8}$$

de lo que resulta la ecuación (3).

La ecuación polar deducida de (7) será

$$\rho = \frac{a}{tg\,\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \tag{9}$$

El círculo $miACA_0$ ó (K) que tiene por diámetro el segmento Ci de la bisectriz del ángulo ACB, es decir, que está circunscripto al cuadrilátero $CmiA$ ó al triángulo isósceles CAm, puede también ser el círculo generador de la curva considerada, y por consiguiente decirse que:

Cuando un círculo variable (K) *pasa constantemente por un punto fijo* A, *y corta á una recta también fija* BC *en dos puntos* m, C, *tales que la cuerda* mc *que éstos determinan sea igual á la cuerda* AC *determinada por uno de estos puntos* C *y por el punto fijo, el lugar del punto de intersección* M *de esta cuerda con la* mi *trazada por el otro punto* m *perpendicularmente á la primera cuerda* mc *es la cúbica* (F).

Considerando las secantes Mm, MC *á este círculo, se tiene*

$$Mm\,(Mm - im) = MA\,(MA + AC) \qquad (10)$$

pero los triángulos rectángulos semejantes miB, OAB dan

$$im = AO\,\frac{Bm}{BO} = AO\,\frac{MA}{MA + MP} \qquad (11)$$

y por la comparación de los triángulos rectángulos AOC y APM

resulta
$$AC = MA\,\frac{AO}{AP} \qquad (12)$$

de dónde

$$Mm\left(Mm - AO\,\frac{MA}{MA + MP}\right) = \overline{MA}^2\left(1 + \frac{AO}{AP}\right) \qquad (13)$$

expresión que nos conduce á la ecuación (3).

Es fácil ver que los arcos Ai, im, mA_0 del círculo (K) son igules al tercio del arco AmA_0 de este círculo.

Lo mismo sucede á los arcos AC, Cm', $m'A'_0$ respecto al arco $Am'A'_0$ del círculo $Am'i'$ ó (K') relativo al punto M'.

Las bisectrices Ci *y* Ci' *del ángulo* ACm *y de su suplemento* m'CA *son las tangentes en los puntos* i *é* i' *de una parábola* (ι) *que tiene respectivamente por foco y directriz el punto* A *y la recta* OB, *pasando, por consiguiente, por los puntos* s *y* s', *y cuyo vértice es el punto medio* ψ *del segmento* OA.

Siendo los radios vectores Ai y Am de la parábola (ι) y de la cúbica (F) los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa iM es perpendicular á la directriz, resulta que:

Cuando dos radios vectores ortogonales Ai *y* AM *de una parábola* (ι) *giran alrededor de su foco A, la recta* mi *trazada por el extremo* i *de uno de estos radios vectores* Ai, *perpendicularmente á la directriz* BC, *cortará al otro radio vector* AM *en un punto* M *cuyo lugar es la cúbica* (F).

Como se vé, *la cúbica* (F) y la parábola (ι) pueden considerarse respectivamente como *las transformadas de la parábola* (ϖ) *descripta por los puntos* γ^0, $\gamma^{0'}$, *y de su directriz* BOC, *por el movimiento de las rectas* $C\gamma^0$, $B\gamma^{0'}$ *hasta tomar las posiciones* m'i, mi, *de manera que se tiene*

$$Ai' = i'm', \qquad Ai = im, \text{ ó } M'i' = i'B, \, mi = iB$$

Se puede deducir fácilmente la ecuación de la cúbica (F) partiendo de esta generación.

En efecto, el triángulo rectángulo iAM da

$$\overline{Av_0}^2 = \overline{v_0 M} . v_0 i \tag{14}$$

Y si se designa por x_0 la abscisa del punto i de la parábola (ι), su ecuación, referida á su foco A, será

$$y^2 = a^2 - 2ax_0 \tag{15}$$

de la que se deduce

$$v_0 i = x_0 = \frac{a^2 - y^2}{2a} \tag{16}$$

Según esto, la expresión (14) se reduce á

$$y^2 = x \frac{a^2 - y^2}{2a} \tag{17}$$

de lo que resulta la ecuación (3)

Las sub-tangentes cartesianas TP *y* T'P' *de la cúbica* (F), *relativas á los extremos* M *y* M' *de la cuerda giratoria* MAM', *ó de dos radios vectores* AM, AM' *de igual dirección, son iguales,*

En efecto, en nuestra solución hemos mostrado que siendo la expresión de la sub-tangente cartesiana

$$S_t = \frac{x(x + 2a)}{a} \tag{18}$$

se tenía para el punto M

$$P\sigma_a = a, \quad P\sigma_x = A'P = x + 2a$$

de donde resulta

$$S_t = \frac{AP . A'P}{a} = TP \tag{19}$$

Igualmente se tenía para el punto M'

$$P'\sigma'_a = a, \quad P'\sigma'_x = A'P' = -x + 2a$$

y por consiguiente,

$$S'_t = \frac{AP'A'P'}{a} = T'P' \tag{20}$$

Ahora, se tiene evidentemente

$$AP' = -A'P \quad y \quad A'P' = -AP$$

luego

$$S_t = S'_t \quad ó \quad TP = T'P' \qquad \text{(L. Q. D. D.)}$$

La expresión (18) da para el punto M

$$\frac{S_t - x}{x} = \frac{x + a}{a} = \sqrt{1 + \frac{x + 2a}{a^2 x}\, x} \tag{21}$$

y en virtud de la ecuación (3) resulta

$$\frac{S_t - x}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad ó \quad \frac{S_t - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{y} \tag{22}$$

Luego los triángulos rectángulos AMP y Tgp son semejantes, y el punto de intersección v de Tg con A$g_0 s$ determinará con los puntos g, M, A un rombo AMgv; y por consiguiente el triángulo rectángulo TvA será semejante á aquellos dos triángulos.

Así de esto se concluye que:

La cúbica (F) *referida á coordenadas rectangulares es una curva tal que la sub-tangente* TP *de un punto* M *disminuida en la abscisa* AP *está siempre al radio vector* AM *de este punto que parte del origen* A, *en la misma razón que la abscisa* AP *á la ordenada* PM.

Según esto, la ecuación diferencial de las curvas que tienen esta propiedad será:

$$y\frac{dx}{dy} - x = \frac{x}{y}\sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \tag{23}$$

cuya integración es muy fácil.

En efecto, multiplicando esta ecuación por dy y por $\frac{1}{y^2}$ se obtiene

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{dy}{y}\,\frac{x}{y}\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \tag{24}$$

de donde

$$\frac{d\,\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}=\frac{dy}{y} \tag{25}$$

ecuación cuya forma desde luego es conocida, y, por consiguiente, integrando, da

$$-\log\frac{1+\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}{\frac{x}{y}}+\mathrm{C}=\log y \tag{26}$$

Representando por a el número del cual la constante C es el logaritmo, y pasando á los números, se tiene la ecuación

$$\frac{a\,\frac{x}{y}}{1+\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}=y \tag{27}$$

de la cual, después de efectuar las operaciones indicadas, se deduce la ecuación (3) de la cúbica unicursal (F).

TANGENTES, NORMALES Y DIVERSAS PROPIEDADES DE LA CURVA (F)

Según lo que precede, se puede obtener con mucha facilidad la tangente en un punto cualquiera M de la cuıva.

Para esto, tomemos sobre el eje de las ordenadas YAY′ el segmento positivo Av, igual al radio vector correspondiente AM, y por el punto v tracemos paralelamente á éste la recta vT, que cortará al eje de las abscisas XAX′ en el punto T, por el cual pasa la tangente pedida MT.

Para el punto M′ se marcará sobre el eje de las ordenadas el segmento Av', igual al radio vector AM′, y tracemos la recta $v'g'$T′ paralela á éste, que cortará al eje de las abscisas en el punto T, que determinará la tangente pedida M′T′.

Tracemos en el punto M la perpendicular dMD al radio vector AM, la cual corta á gT y AX en los puntos d y D, y se tendrá el triángulo TDg.

Ahora, siendo las rectas gP y Dd las alturas de este triángulo con relación á los lados TD y gT, resulta de esto que la tangente TMt será la tercera altura con relación al lado Dg, puesto que pasa por el vértice T y por el punto de intersección M de aquellas dos alturas.

Luego, para obtener directamente la normal MnD$_0$ en el punto M de la curva, se prolonga la ordenada PM en una magnitud Mg igual al radio vector AM, y se traza en M la perpendicular MD á éste. La recta MnD$_0$ equipolente á gD será la normal pedida; ó lo que es lo mismo, se traza en D la perpendicular DD$_0$ á AX cuya magnitud sea igual al radio vector AM, y se tendrá la normal MD$_0$.

Para el punto M$'$, se trazará igualmente en éste la perpendicular M$'$D$'$ al radio vector AM$'$, y por su punto de intersección D$'$ con el eje AX la perpendicular D$'$D$'_0$ á éste, de longitud igual á la de dicho radio vector, y la recta M$'$D$'_0$ será la normal pedida.

Es esta última construcción, para determinar la normal en los puntos M y M$'$ la que el Sr. Brocard ha presentado en su Nota sobre esta cuestión, en la que presenta asi mismo la ecuación diferencial.

$$y - \frac{dx}{dy}\,\frac{y^2}{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{28}$$

para representar las curvas que satisfacen á esta condición.

Sean λ, λ_1, λ_2, i_1 los puntos de intersección de MM$_0$ con gT, Bβ, g'T$'$, M$'$T$'$.

Siendo el segmento βO evidentemente igual á las sub-tangentes TP y T$'$P$'$, se tendrán también los segmentos λM, $\lambda_1 m$, λ_2M$_0$ iguales al segmento TA, y por consiguiente, la perpendicular $\lambda_2 k$ al eje OX cortará á éste en el punto k tal, que se tenga

$$\mathrm{T}'k = \mathrm{AP} = \mathrm{P'A'} \quad \text{y} \quad k\mathrm{P}' = \lambda_2\mathrm{M}_0 = \mathrm{TA}$$

Esto sentado, el segmento kA$'$ será igual á las sub-tangentes T$'$P$'$ y TP, y, por consiguiente, se tendrá

$$k\mathrm{O} = \beta\mathrm{A} \quad \text{ó} \quad k\beta = \mathrm{OA} = a$$

de lo que resulta que la tangente M$'$T$'$ se hallará cortada por las rectas $\lambda_2 k$, Bβ, Cγ^0 en un mismo punto, que designaremos por Θ_0; y puesto que esta última recta pasa por el punto medio C de MM$'$ paralelamente á OX, se sigue que este punto de intersección Θ_0 es el medio del segmento M$'i_1$, y el punto de intersección λ_1 de Bβ con el segmento Mi_1 es también el medio de éste.

Ahora, siendo el punto β evidentemente el medio del segmento TT$' = g'g$, resulta que *dicho punto de intersección* Θ_0 *coincidirá con el* *punto de intersección* Θ *de las tangentes* MT *y* M'T' *en los extremos de la cuerda giratoria* MAM' *cuyo medio* C *se halla en su diametral* OB.

Sean z, z', o los puntos de intersección de la asíntota $s_1 s'_1$ con las tangentes $M\Theta$, $M'\Theta$ y la perpendicular $C\Theta$ trazada por C á esta asíntota.

Siendo el triángulo $z\Theta z'$ evidentemente igual al triángulo $M_0L'M'$, resulta que:

Cuando la cuerda giratoria ó generatriz MAM' *de la cúbica* (F) *gira alrededor del origen* A *de las coordenadas, el punto de intersección* Θ *de las tangentes* $M\Theta$ *y* $M'\Theta$ *en los extremos de esta cuerda, se hallará en la recta* $Co\Theta$ *trazada por el medio* C *de esta cuerda perpendicularmente á la asíntota* s_1 s'_1, *paralela al eje de las* y, *ó alejada de ésta en una magnitud* Θo *igual á las sub-tangentes correspondientes* TP, T'P'.

Siendo el punto φ el cruce de las diagonales BC, Aa del rectángulo ABaC, y, por consiguiente, el punto medio del segmento CB, será asímismo el cruzamiento de las rectas $\Theta\gamma^{0\prime}$ y $\Theta'\gamma^0$; puesto que son las diagonales de los paralelogramos $C\gamma^{0\prime}B\Theta$ y $C\gamma^0B\Theta'$ que tienen por diagonal común este segmento.

(Se concluirá).

BIBLIOGRAFÍA

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS. Con este título preparan los Sres. Laisant y Lemoine para el año próximo una publicación de carácter original, y que por las indicaciones acerca de la misma expuestas en la Circular y el Prefacio que la anuncian, promete ser un acontecimiento muy importante para los aficionados á la ciencia matemática.

El objeto del *Intermédiaire des mathématiciens* es poner en comunicación á los matemáticos de todos los países, sabios ó aficionados á este orden de conocimientos. Esta publicación contendrá exclusivamente cuestiones y contestaciones á las mismas. Unas y otras podrán ir firmadas ó permanecer anónimas *para los lectores*, siendo los autores completamente libres de emplear un pseudónimo si así lo prefieren.

Las cuestiones versarán sobre los objetos más variados, de los elementos, así como de las matemáticas superiores, la astronomía, la mecánica racional, los métodos de enseñanza, etc.

Así un corresponsal podrá preguntar si tal cuestion se conoce ó si ha sido tratada y dónde se halla expuesta ó desarrollada, etc., dar el resultado de un cálculo propuesto, si cierto resultado puede ponerse bajo tal forma, si tal ecuación es resoluble, ó tal integración puede hacerse, ó un teorema dado demostrarse, etc.

Puede ocurrir también el caso de que en una Memoria, cierto resultado ó cierta cuestión no haya sido continuada ó desarrollada, la cual se expondría á los corresponsales del *Intermediario*, etc., etc.

Se vé, pues, que este periódico tiende á la realización de una idea nueva y fecunda en resultados y de utilidad general que, poniendo en relación á los profesores entre sí y con los estudiantes, ahorrará esfuerzos á veces demasiado intensos, ó tal vez tentativas infructuosas, y, sobre todo, porque siendo tan vasto el campo de la Matemática, muchas veces acontece que tal senda recorrida y muy familiar para cierto investigador, es nueva ó hasta cierto punto extraña para otro que siguió direcciones distintas en estos dilatados dominios que hoy, una inteligencia, por privilegiada que sea, no puede abarcar totalmente; y también que con frecuencia una cuestión incidental en cierta investigación detiene al que la emprende obligándole á distraerse de de su principal objeto, cuando dicho conocimiento le podría ser comunicado desde el momento en que le fuera fácil ponerse en relación con quien lo posea, quien á su ver podría disfrutar de igual ventaja en otra cuestión por él ignorada ó desconocida en determinados detalles.

Creemos que las anteriores consideraciones son suficientes para hacer ver las inapreciables facilidades que ha de proporcionar el *Intermediario* entre los investigadores matemáticos.

Como que ya se ha comenzado á preparar labor para que el nuevo periódico tenga desde el año próximo una amplia base sobre qué desarrollarse, en cuanto concierne á las cuestiones que ya desde la fecha puedan proponerse para ser publicadas á su debido tiempo, la dirección en cuanto concierne á la parte científica es à M. Laisant, Avenue Víctor Hugo, 162, ó á M. E. Lemoine, rue Littré, 5, en París, y en lo que concierne á la suscripción al Periódico (cuyo coste será 5 francos por año en París y 6 francos para los países de la unión postal), al editor M. Gauthier Villars quai des grands Augustins, 55.

Saggio d'introduzione alla Teoria delle quantitá complesse geometricamente rapresentate per B. Carrara.—Cremona 1893, precio 2 L, 50

Esta es una obra que, escrita con unidad de plan y de método, constituye un resumen de tan vasta doctrina, dispuesto para la enseñanza de la misma.

La introducción forma una compendiosa relación histórica tomada desde la memoria del prusiano Kühn, comprendiendo el desenvolvimiento de la teoría en sus varias fases por Bueé, Argand, François, Mourey, Riemann y sus continuadores: Hamilton, Cauchy, Bellavitis, Moebius, Grassmann, Hoüel, Laisant, Casorati, Dini y Beltrami.

La obra se halla dividida en dos partes.

La primera parte, de carácter elemental, contiene las *nociones fundamentales* y las *operaciones sobre las cantidades geométricas.*

La exposición preliminar acerca de las cantidades positivas, negativas é imaginarias, lleva al autor á la consideración de la cantidad *puramente geométrica,* por la cual desaparece la imposibilidad que implica la cantidad imaginaria, de manera que

$$\sqrt{-1}, \pm b\sqrt{-1}, a \pm b\sqrt{-1}$$

permaneciendo imaginarios como *entes algébricos* serán reales como *entes geométricos*, y á continuación se demuestra el *teorema fundamental*, ó sea que el símbolo $\sqrt{-1}$, geométricamente considerado, es el signo de la perpendicularidad de una recta, siguiendo la representación de todas las formas de las expresiones imaginarias, la de nuevas medias geométricas y segmentos equipolentes, hasta explicar y adoptar preferentemente la notación r_p empleada desde la suma, lo que le permite dar unidad á toda la metódica exposición que hace de esta teoría geométrica, así como á las aplicaciones, tales como la deducción de las principales fórmulas de la trigonometría.

Termina la primera parte con la elevación á potencias, extracción de raíces, ecuaciones binomias y raíces de la unidad.

El primer capítulo de la segunda parte trata de *algunas series*, empleando las cantidades geométricas bajo la forma e^{ip} para deducir varias fórmulas trigonométricas, y para concluir la relación entre los logaritmos y los arcos de círculo expresada por

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \mathrm{L}\sqrt{-1}.$$

El § tercero tiene por objeto deducir varias fórmulas de trigonometría y de geometría analítica, basándose en el doble concepto de magnitud y dirección de las rectas que entran en las figuras correspondientes.

Las series que expresan el seno y el coseno, el arco en función de la tangente, la serie logarítmica y una fórmula especial logarítmico-trigonométrica, dan fin al primer capítulo.

En el capítulo segundo, destinado á las *funciones de las variables complejas*, el autor hace detallada exposición relativa á la infinidad de caminos ó contornos que puede recorrer una variable compleja en su plano para pasar de un valor á otro, exposición que completa enseguida al ocuparse de las *funciones de variables geométricas ó complejas*, estableciendo desde luego la condición necesaria y suficiente para que una expresión sea función de la variable compleja $x + iy$, siguiendo principalmente á Cauchy y haciendo indicaciones sobre la teoría de Riemann.

Al tratar de las *ecuaciones algébricas*, basándose en la representacion geométrica de las cantidades compejas, presenta tres demostraciones del teorema fundamental acerca de la existencia de las raíces, y á continuación la del teorema relativo al número de raíces de una ecuación de grado m y el de Cauchy respecto al número de raíces contenidas en un contorno.

Con el capítulo IV: *Integrales de las funciones sinécticas*, termina la obra que, como ha podido verse, contiene lo fundamental de la teoría de las cantidades complejas en forma muy accesible para las inteligencias de los alumnos.

NOTA ACERCA DE LA CUESTION 119

POR D. CECILIO JIMÉNEZ RUEDA

Las soluciones presentadas por los Sres. Varela, Sollertinsky, Retali y la dada por nosotros (pág. 152) son aplicables sin modificación al caso en que se dan las proyecciones del vértice A sobre las bisectrices *interiores* de los ángulos B y C; y para conocer si dos puntos arbitrarios b y c pueden mirarse como proyecciones de A sobre las bisectrices exteriores ó sobre las interiores de B y C, basta observar si es obtuso ó agudo respectivamente el ángulo bAc. En el caso de ser recto este ángulo el problema no tiene solución.

NOTA ACERCA DE LA CUESTION 101 *(t. III, pág. 40)*

POR M. H. BROCARD.

Se dan dos rectas rectangulares que se cortan en O. *El punto* A *está sobre la una, el punto* B *sobre la otra. Se tiene:*

$$\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = L^2$$

La envolvente de AB *es*

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$$

OA *es eje de las* x, OB *el de las* y. *Estudio de la curva.*

(E. Lemoine).

Se tiene, pues, que buscar la envolvente de la recta AB representada por la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad [1]$$

bajo la condición

$$a^2 - b^2 = l^2 \qquad [2]$$

ó que el eliminar a y b entre la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - l^2}} = 1 \qquad [3]$$

y su derivada con relación á a.

Como es preciso previamente reducir la ecuación (3) á una forma entera, se ve que se tendría que eliminar a entre una ecuación de 4.º grado y una de 3.º

Pero es posible evitar esta investigación que sería muy laboriosa, y por un medio muy sencillo, se llegará á una generalización sobre la que será interesante llamar la atención de nuestros lectores.

La ecuación

$$x^p + y^p = l^p$$

representa una familia de curvas que deben poseer propiedades especiales.

Para reconocer una de ellas, por ejemplo, consideremos la tangente en un punto (x, y).

Esta recta tiene por ecuación

$$Y - y = -\left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}(X - x) \qquad (5)$$

Haciendo sucesivamente $Y = 0$, $X = 0$, se obtienen los segmentos OA $= a$, OB $= b$, que tienen por expresiones, considerando la ecuación (4),

$$a = \frac{l^p}{x^{p-1}}, \qquad b = \frac{l^p}{y^{p-1}} \tag{6}$$

Para eliminar x é y y obtener una relación independiente de x y de y, es preciso formar la ecuación (4) ó escribir

$$\left(\frac{x}{l}\right)^p + \left(\frac{y}{l}\right)^p = 1 = \left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \left(\frac{l}{b}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{7}$$

é en definitiva

$$a^{\frac{1-p}{p}} + b^{\frac{1-p}{p}} = l^{\frac{1-p}{p}} \tag{8}$$

de lo que resulta la proposición general:

La tangente á la curva (4), ***determinando sobre los ejes de coordenadas rectangulares segmentos*** a *y* b, *á partir del origen, se tiene entre estos segmentos, la relación* (8).

Y recíprocamente:

La envolvente de una recta representada por la ecuación (1), *bajo la condición* (8), *está representada por la ecuación* (4).

La misma observación si b se halla afectada del signo $-$.

Como comprobaciones tomaremos algunos valores sencillos.

1.° b positivo, $\dfrac{1-p}{p} = 1$, $p = \dfrac{1}{2}$, $a + b = l$.

La envolvente es una parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = l^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

2.° b positivo, $\dfrac{1-p}{p} = 2$, $p = \dfrac{1}{3}$, $a^2 + b^2 = l^2$.

La envolvente es una hipocicloide de cuatro retrocesos

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} \tag{10}$$

3.° b negativo, $\dfrac{1-p}{p} = 1$, $p = \dfrac{1}{2}$, $a - b = l$.

La envolvente es una parábola

$$x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = l^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

idéntica á la del número (1), porque en realidad es preciso tomar $x^{\frac{1}{2}}$ é $y^{\frac{1}{2}}$ con el signo $\pm$ y escribir

$$\pm x^{\frac{1}{2}} \pm y^{\frac{1}{2}} = \pm l^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

4.º b negativo $\dfrac{1-p}{p} = 2 \quad p = \dfrac{1}{3}, \quad a^2 - b^2 = l^2.$

La envolvente es la curva de 6.º grado

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} \tag{11}$$

indicada por el Sr. Lemoine.

Esta curva admite por ejes de simetría OX y OY. Es tangente á OX en los puntos $y=0$, $x=\pm l$ donde forma dos retrocesos; es asíntota á las dos bisectrices de YOX, y, por consiguiente, tiene cuatro puntos de inflexión.

Si se desarrolla la ecuación (11), se obtiene

$$(x^2-y^2-l^2)^3 = 27\ l^2x^2y^2 \tag{12}$$

Ahora, bajo esta forma se halla una curva ya considerada por los geómetras, respondiendo á la cuestión número 198, propuesta en 1848 en N. A. M. por M. W. Roberts:

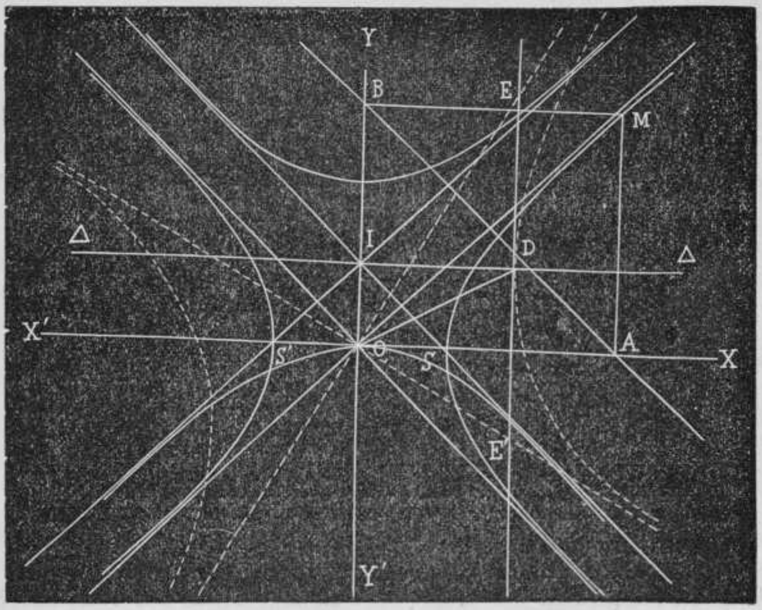
Hallar la envolvente de las hipérbolas equiláteras concéntricas, cortadas ortogonalmente por una recta fija.

Aquí, el eje de las x se supone paralelo á la recta dada, á la distancia l.

Dos soluciones se han expuesto (*loc. cit.* 1849, pág. 376, y 1851, pág. 314); pero sin indicar el trazado de la curva ni la forma reducida (11) de la ecuación (12).

La presente discusión proporciona hoy una importante contribución al estudio de esta curva notable y podrá ser de interés el insistir en ella.

Representemos los datos de la cuestión 198 (N. A. M.)



Sea ΔΔ la recta fija que encuentra á OY en I.

Para determinar una de las hipérbolas equiláteras, por ejemplo la que encuentra á Δ según un ángulo recto en un punto D, basta unir OD, y desde el punto D, como centro trazar una circunferencia que encuentra en E y E' á una recta EDE' trazada por el punto D paralelamente á OY.

OE y OE' son las asíntotas de la hipérbola equilátera.

La construcción de los puntos E, E' no es otra que el modo de transformación que ha sido expuesto en el estudio del *trifolium*, del que se dió un resumen en este periódico (t. II, pág. 271).

Esta construcción trasforma pues la recta ΔΔ en una hipérbola equilátera que tiene I por centro y O por uno de sus vértices, y cuyas asíntotas se hallan á 45° con los ejes de coordenadas (Véase la Memoria sobre el *Trifolium*, J. S. 1891).

Por otra parte, si la curva dada tiene por ecuación

$$f(x, y) = o,$$

la transformada tendrá evidentemente por ecuación

$$f(x, y \pm \sqrt{x^2 + y^2}) = o,$$

lo que en el caso de la recta Δ ó $y = h$ dará la hipérbola equilátera

$$y^2 - X^2 - 2hy = o \tag{13}$$

Por otra parte, si se quisiese construir una de las rectas AB de la cuestión 101, sería útil trazar previamente la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 - l^2 = o \tag{14}$$

que tiene sus vértices en OX, á las distancias $OS = OS' = l$. Entonces, proyectando un punto M de la curva en A, B, sobre los ejes OX, OY, se tendrá $\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = l^2$, y, por consiguiente, AB será una de las rectas buscadas.

En cuanto á las hipérbolas equiláteras consideradas en la cuestion 198 (loc. cit), tienen por ecuación general

$$x^2 - y^2 + \frac{2l}{m} xy - l^2 - m^2 = o \tag{15}$$

y eliminando m entre esta ecuación y su derivada, se obtiene la ecuación (12).

Desde otro punto de vista, así como he tenido ocasión de consignar varias veces, se tiene generalmente interés en hacer intervenir, en toda cuestión de envolvente de rectas móviles, la noción de podar.

Aquí, estando la tangente propuesta representada por la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - l^2}} = 1, \tag{3}$$

la perpendicular trazada desde el origen tiene por ecuación

$$y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - l^2}} x, \tag{16}$$

y la eliminación de a da para la podar la ecuación

$$(x^2 + y^2) \sqrt{y^2 - x^2} = lxy \tag{17}$$

Asi la envolvente buscada tiene por podar del origen la curva (17)

Para mostrar que esta envolvente es precisamente la curva (11), quedaría por verificar que la podar del origen es aun la curva (17).

Ahora, la tangente á la curva (11) tiene por ecuación

$$Y - y = \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(X - x\right) \tag{18}$$

La perpendicular bajada desde el origen tiene por ecuación

$$Y = -\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} X \tag{19}$$

De las ecuaciones (11), (18), (19) se deduce

$$Xx^{-\frac{1}{3}} + Yy^{-\frac{1}{3}} = l^{\frac{2}{3}} \quad (20) \qquad Yx^{-\frac{1}{3}} - Xy^{-\frac{1}{3}} = o \quad (21)$$

de dónde

$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{l^{\frac{1}{3}} X}{X^2+Y^2}, \qquad y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{l^{\frac{2}{3}} Y}{X^2+Y^2}$$

y, por consiguiente, el resultado de la eliminación de x é y es

$$\frac{1}{l^{\frac{4}{3}}} (X^2+Y)^2 \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}\right) = l^{\frac{2}{3}} \tag{22}$$

es decir, la ecuación (17) ya obtenida.

Estos desarrollos pueden pues servir de nueva justificación á la proposición general arriba enunciada, y se deducirá de ellos igualmente la extensión á las curvas

$$x^p \pm y^p = l^p.$$

En fin, otro artículo de N. A. M (1857. 380—384) contiene la exposición de diversas propiedades geométricas que ofrecen cierta correlación con la cuestión 101.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 125 (Véase tít. III, pág. 112).

En un triedro SABC *la cara* BSC *vale* 90° *y cada una de las demás* 60°. *Se toma sobre* SA *una longitud arbitraria y sobre las otras, longitudes* SB, SC *iguales al mayor segmento de* SA *dividido en media y extrema razón.*

Demostrar que el triángulo ABC *es rectángulo.*

Solución por el Sr. Brocard.

De los datos del enunciado BSC = 90°, BSA = ASC = 60°, 2 cos60° = 1,

$$SA = 1, \quad SB = SC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

se deduce

$$\overline{BC}=2.\overline{SB}^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}=3-\sqrt{5}$$

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2=\overline{SA}^2+\overline{SB}^2-SA.SB=\frac{12-4\sqrt{5}}{4}=3-\sqrt{5}=\overline{BC}^2$$

El triángulo ABC es, pues, equilátero y no rectángulo, como expresaba el enunciado del J. M.

Solución por el Sr. Retali (V.) (*)

Sea a el segmento tomado sobre SA, y sea a' el segmento áureo de a; tendremos

$$a^2-aa'=a'^2 \text{ (**)}$$

del triángulo rectángulo BSC se deduce

$$\overline{BC}^2=2a'^2;$$

y del triángulo ABS,

$$\overline{AB}^2=a^2+a'^2-2aa'.\cos 60^o=a^2+a'^2-aa';$$

luego AB = BC = CA: el triángulo ABC es equilátero.

Solución por el Sr. Gillet (J.)

Hagamos SA $= a$, de donde

$$SB=SC=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

El triángulo rectángulo BSC da

$$\overline{BC}^2=2\overline{SB}^2=a^2(3-\sqrt{5})$$

En el triángulo ASB, puesto que $\cos 60^0=\frac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{SA}^2+\overline{SB}^2-SA.SB\\&=a^2+\frac{a^2}{2}(3-\sqrt{5})-\frac{a^2}{2}(\sqrt{5}-1)\\&=a^2(3-\sqrt{5}).\end{aligned}$$

(*) En el enunciado de esta cuestión léase triángulo equilátero en vez de triángulo rectángulo.

(**) Pues la tangente a es media proporcional entre el segmento $a'+a$ y el segmento externo a' en la figura que determina el segmento mayor de la recta dividida en media y extrema razon.—(Z. G. de G.)

Se tendría igualmente

$$\overline{AC}^2 = a^2(3 - \sqrt{5}).$$

Por consiguiente AB = BC = CA, y el triángulo ABC es *equilátero.*

Solución por el Sr. Sollertinsky.

En el triángulo ASB se tiene

$$\overline{AB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 - SA.SB = SA.SC + \overline{SB} = 2\overline{SB}^2$$

y el triángulo BSC da

$$\overline{BC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 = 2\overline{SB}^2$$

el triángulo ABC, es, pues, equilátero

Observación. — Para que el triángulo ABC sea rectángulo en A es necesario y basta que se tenga $2SA = SB + SC$.

Nota. — También el *Sr. Jiménez Rueda* dirigió á esta Radacción una nota deduciendo que, para ser rectángulo el triángulo se necesita que sea

$SA = \dfrac{SB + SC}{2}$ ó bien que $SA = SB = SC$, lo que según el enunciado *(defectuoso)* no podría ser, suponiéndose en este ser SB y SC un segmento de SA.

También se ha recibido una solución del *Sr. Clavero y Guervos* análogas á las anteriores, que por esta razón no insertamos.

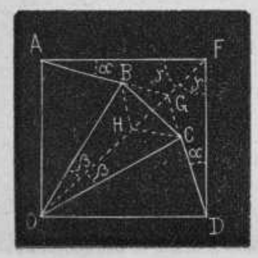
CUESTIÓN 111. (Véase t. III, págs. 72 y 110).

Sin escribir ecuación alguna ni trazar más que el cuarto de un dodecágono regular inscripto á un circulo, demostrar que el área de este polígono es igual á tres veces el cuadrado construído sobre el radio.

(*H. Brocard.*)

2.ª Solución dada por el Sr. Jiménez Rueda.

Sea OABCD el cuarto del dodecágono; OAFD el cuadrado sobre el radio; la diagonal OF es perpendicular al lado BC por simetría;



$\angle\alpha = \angle\beta$ por complementos ambos de los ángulos en la base de los triángulos isósceles

$$ODC = OCB = OBA$$

Prolónguense AB y DC hasta G, y trácense BH y CH de modo que

$$\angle OBH = \angle OCH = \gamma;$$

los cuatro triángulos

$$AFG, DFG, OBH \text{ y } OCH$$

son iguales por tener AF = FD = OB = OC que son lados contiguos á ángulos respectivamente iguales; luego figura AGDFA $<>$ figura OBHCO. Pero siendo iguales los ángulos obtusos de vértices G y H, como homologos de triángulos iguales, también lo serán los agudos sus suplementos; y la figura BHCG será rombo, luego, añadiendo á cada área de la equivalencia anterior la mitad de este rombo, resulta que la figura ABCDFA es exactamente equivalente á uno de los tres triángulos OBC, etc., y por tanto que si el cuadrado contiene cuatro triángulos y el dodecágono doce, éste es triplo de aquél, según queríamos demostrar.

Solución por D. JORGE LUZON DE LAS CUEVAS

Siendo AC el lado del exágono y B el punto medio del arco AC, las diagonales AC y BO del cuadrilátero ABCO, son perpendiculares é iguales al radio; por tanto, si por los vértices A, B, C, O, trazamos paralelas á ellas, circunscribiremos al cuadrilátero ABCO el cuadrado MNPQ construído sobre el radio; y como ABC es la mitad del rectángulo AMNC y ACO, la mitad de ACPQ, será ese cuadrilátero equivalente á la mitad del cuadrado construído sobre el radio; teniendo el dodecágono seis cuadriláteros iguales al ABCO, queda demostrada la proposición.

CUESTIÓN 64 (véase t. II pág. 214)

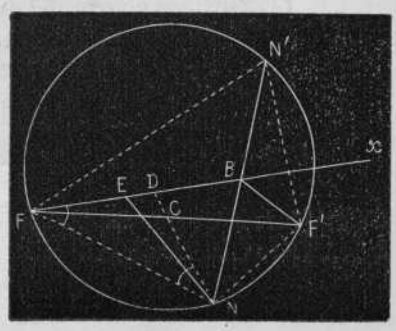
Una elipse cuyo centro es C *gira en su plano alrededor de su foco* F, *y corta en* P *á una recta fija* FX. *Sobre la normal en* P *se toma una longitud* PN *igual al semidiámetro conjugado á* CP. *El lugar del punto* N *es una circunferencia.*

(*N. C. M.*)

Solución por el Sr. SOLLERTNISKY

Sea F′ el segundo foco de la elipse. Se sabe que

$$PN = PN' = \sqrt{PF.PF'},$$



y que, por consiguiente, el cuadrángulo N′FNF′ es armónico. Además, designando los ejes de la elipse por $2a$, $2b$, se tiene

$$CN = a - b, \qquad CN' = a + b$$

Sea D la intersección de las rectas FP y NC. Siendo NN′ la simediana del triángulo FNF′, se tiene $\angle FNC = \angle N'NF'$; pero $\angle N'NF' = \angle N'FF'$; y siendo FF′ la simediana del triángulo FNN′, se tiene

$$\angle N'FF' = \angle PFN.$$

El triángulo DFN es así isósceles. Luego, si se toma sobre FD la longitud FE = CN = $a - b$, se tendrá

$$EN = FC = \text{const.}$$

Se demostraría de la misma manera que el punto N′ describe una circunferencia de igual radio FC, de centro E′ situado en Fx, á distancia FE′ = $a + b$ de F.

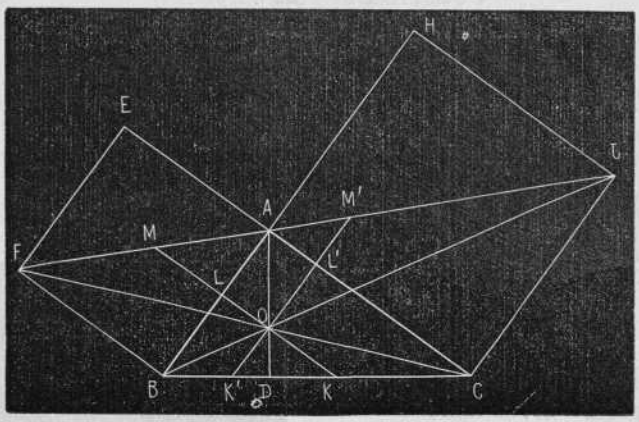
Observación. *Una hipérbola gira en su plano al rededor del foco* F *y encuentra en* P *á una recta fija* Fx.

Sobre la tangente en P *se toma la longitud* PN = PN′ *igual al semidiámetro conjugado del* CP.

El lugar de cada uno de los puntos N *y* N′ *es una paralela á* Fx.

CUESTIÓN 63 (véase t. II, pág. 160)

Sean AEFB, AHIC *los cuadrados construídos sobre los lados del ángulo recto de un triángulo* ABC *rectángulo en* A; O *el punto de intersec-*



ción de las rectas CF, BI, AOD *la perpendicular bajada desde el vértice* A *sobre* CD. *Demostrar que*

1.º $$\frac{1}{AO} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC}$$

2.º $$AB.\ FC.\ IO = AC.\ FO.\ IB.$$

3.º $$\frac{IO}{OB} = \frac{(AB + AC)\ AC}{AB^2},\quad \frac{FO}{OC} = \frac{(AB + AC)\ AB}{AC^2}$$

(*H. Van Aubel*)

Solución por el Sr. Sollertinski (B)

Sean K, L, M los puntos en que la paralela AC trazada por O encuentrá á las rectas BC, AB, FAJ; K′, L′, M′ los puntos análogos en la paralela á AB.

1.º Se tiene

$$\frac{ML}{FB} = \left(\frac{AM}{AF} = \frac{CO}{CF}\right) = \frac{OK}{FB},$$

de donde OK = ML.

Pero ML = LA = OL′; luego OK = OL′

De igual manera OK′ = OL. Por consiguiente KK′ = (LL′) = AO.

Y de los triángulos semejantes OK′K y ABC se obtiene

$$\frac{OD}{AD} = \frac{K'K}{BC}$$

Así

$$\frac{1}{BC} = \frac{OD}{AD.\ AO} = \frac{AD - AO}{AD.\ AO} = \frac{1}{AO} - \frac{1}{AD}$$

2.º En el triángulo FAC se tiene

$$\frac{FC}{FO} = \frac{AC}{OM}$$

y el triángulo JAB da

$$\frac{JO}{JB} = \frac{OM'}{AB}$$

Luego

$$\frac{FC.\ JO}{FO.\ JR} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ó} \quad AB.\ FC.\ JO = AC.\ FO.\ JB.$$

3.º Evidentemente

$$\frac{JO}{OB} = \frac{CL'}{L'A} = \frac{CL'}{L'K'} \cdot \frac{L'K'}{L'A};$$

pero $\frac{CL'}{L'K'} = \frac{CA}{AB}$; $\frac{L'K'}{L'A} = \frac{OL' + L'A}{L'A} = \frac{AB + AC}{AB}$

Luego $\frac{JO}{OB} = \frac{(AB + AC)\,AC}{AB^2}$

CUESTIONES PROPUESTAS

140. Sobre los seis lados de un exágono $A_1A_2A_3$..... se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$,..... é interiormente los triángulos equiláteros $A_1b_1A_2$, $A_2b_2A_3$, ... Sean I_1, I_2, ... i_1, i_2, ... los centros de estos triángulos:

1.º Si se construyen los paralelogramos $I_6I_2I_3D$, $I_4I_2I_1E$; el triángulo DI_5E será equilátero.

2.º Si sobre B_6B_4, B_3B_1 se construyen los triángulos equiláteros B_6FB_4, B_3GB_1, la figura FB_2B_5G será un paralelogramo.

3.º Si sobre I_3I_2, i_4i_5 se construyen los triángulos equiláteros I_3HI_2, i_4Ki_5, la figura HI_1i_6K será un paralelogramo.

4.º Si se traza la recta i_2L igual y paralela á I_3i_4, la recta LI_1 será igual y paralela á I_5i_6.

5.º Si se traza la recta b_2M igual y paralela á B_3b_4, la recta MB_1 será igual y paralela á B_5b_6.

6.º Si sobre B_3B_1, b_4b_6 se construyen los triángulos equiláteros B_3NB_1, b_4Pb_6, la figura NB_2b_5P será un paralelogramo. (*)

(*H. Van Aubel*).

141. Si se considera el lugar C de los centros de gravedad de los arcos de una curva C, contados á partir de un punto fijo A; el punto de contacto G de la tangente á C′ trazada por un punto cualquiera P de la curva C es el centro de gravedad del arco AP.

(*N. C. M.*) (*E. Cesáro*).

ERRATA: En la p.ª 191, lín. penúltima, en vez de $a<1$, léase $x<1$.

(*) Esta cuestión da los medios de construir el exágono conociéndose, por ejemplo: 1.º los puntos $I_1, I_2, I_3, I_4, i_5, I_6$; 2.º $B_1, b_2, B_3, B_4, B_5, B_6$; 3.º $I_1, I_2, I_3, i_4, i_5, I_6$; 4.º $I_1, i_2, I_3, i_4, I_5, I_6$; 5.º $B_1, b_2, B_3, b_4, B_5, B_6$; 6.º $B_1, B_2, B_3, b_4, B_5, b_6$.

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.