Año III Zaragoza 15 Marzo de 1893 Núm. 27

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOBRE LA CONSTITUCIÓN MOLECULAR DE LOS CUERPOS GASEOSOS

Por vía de introducción vamos á exponer aquí algunos conceptos generales sobre la naturaleza de los estudios propios de la Física-matemática, tanto más necesarios cuanto que el objeto de este trabajo casi toca los límites de lo que podríamos llamar con Spencer uno de los modos de lo Incognoscible: nos referimos á la esencia de la materia, á la estructura íntima de los cuerpos, todo lo cual es para nosotros completamente desconocido.

1.— La Física-matemática tiene por objeto el estudio, *mediante el análisis matemático,* de las leyes que rigen las propiedades generales de los cuerpos, con el fin de *prever* lo más exactamente posible, todos los fenómenos que presentaría un cuerpo colocado en un conjunto cualquiera de circunstancias dadas.

2.— Aunque la aplicación del análisis matemático es lo que distingue la Física-matemática de la experimental, es conveniente tener en cuenta que hay dos maneras distintas de hacer aquella aplicación. Unas veces, al observar atentamente los fenómenos, se ha descubierto alguna ley numérica fundamental, de la cual se parte, como base, para una serie más ó menos prolongada de deducciones analíticas; como ocurre, por ejemplo, con la Termodinámica, que no es otra cosa que el desenvolvimiento matemático de los dos principios: el de la equivalencia del calor y el trabajo, y el de la equivalencia de las transformaciones por el calor en cuerpos cualesquiera, que son dos relaciones numéricas; ó como ocurre con la teoría matemática de la propagación del calor, fundada en que la acción termológica entre dos cuerpos es proporcional á la diferencia de sus temperaturas; ó con la teoría de las atracciones y repulsiones eléctricas fundada en la ley de Coulomb, etc.

Otras veces los fenómenos han sido de antemano experimentalmente sometidos á varias leyes geométricas ó mecánicas, y luego se ha aplicado el cálculo á las relaciones de posición ó á las de movimiento compatibles con aquellas leyes. Como ejemplos de esta manera de proceder tenemos: la teoría analítica de las superficies cáusticas, partiendo de las leyes geométricas de Descartes relativas á la reflexión y refracción, y en general todas las teorías que comprende la Optica geométrica; el estudio de la atracción de dos esferas electrizadas homogéneamente, fundado en que la electricidad se reparte sobre las superficies de las esferas sin penetrar en el interior, y en el caso actual con uniformidad sobre cada una, de modo que pueden asimilarse á capas esféricas homogéneas de materia ponderable, de espesor muy pequeño y densidad conveniente, etc., etc.

3.— En estos últimos casos el análisis matemático no es realmente á la Física á la que se aplica, sino á la Geometría ó á la mecánica. Así es que el problema de las cáusticas por reflexión puede enunciarse, plantearse y resolverse sin recurrir en absoluto á ningún concepto físico, quedando reducido á la siguiente cuestión de Geometría: Dada una superficie y un punto fuera de ella, trazar desde este punto un haz de rectas que vengan á tocar á la superficie; trazar un segundo sistema de rectas, cada una de las cuales parta de un punto de la superficie, de tal manera que la normal en dicho punto esté en un mismo plano y forme ángulos iguales con las dos rectas de ambos sistemas que tocan en aquel punto; y por último hallar el lugar geómetrico de los puntos de intersección de cada dos rectas del segundo sistema infinitamente próximas. De análogo modo se podrá enunciar el de las cáusticas por refracción. El problema de las esferas eléctricas homogéneas queda reducido á la cuestión puramente de Mecánica racional de la atracción de dos esferas de materia ponderable, etc.

4.— Vemos en suma que la aplicación del análisis matemático á las cuestiones de Física no siempre engendra Física-matemática; pues es necesario que esta aplicación sea inmediata. Demostrar, por ejemplo, analíticamente las leyes geométricas de Descartes relativas á la reflexión y refracción, es propio de la Física-matemática: estudiar ciertas superficies, aunque presidan á su formación las relaciones geométricas que constituyen aquellas leyes, es Geometría pura.

Sabido ya que la aplicación del análisis matemático ha de ser inmediata, conviene emplearlo con extrema circunspección, depurando con severidad suma la realidad del punto de partida; esto es, la certeza de la ley que ha de servir de apoyo á la serie de los cálculos; ó no dando, en caso contrario, á los resultados de éstos más valor que el que les corresponde conforme al grado de certeza con que la ley fuera establecida; pero, más que todo, importa todavía no dejarse arrastrar por el encadenamiento de las fórmulas, sino que el genio de la Física dirija sin cesar el uso racional de ese poderoso instrumento de investigación que llamamos Análisis matemático.

De este modo la Física-matemática responderá á su fin, que, como dijimos en la definición, no es otro que el *conocimiento á priori* de los fenómenos naturales. Porque es necesario no perder vista que las ciencias que versan sobre fenómenos del mundo material, no alcanzan su mayor perfeccionamiento sino después que se han hecho matemáticas, y entonces su fin es la *previsión;* en lo cual se distingue la verdadera ciencia de la simple erudición, limitada al conocimiento de los hechos realizados, sin otra hilación que la de su número de orden en la serie de los adquiridos.

5.— Desgraciadamente la Física, á pesar de las importantísimas conquistas realizadas desde los trabajos del gran Fourier hasta nuestros días, dista mucho de estar completamente constituída en ciencia matemática, porque son muy contados los casos en que la ley numérica, base de los desarrollos analíticos, aparece real y efectiva después de un número más ó menos grande de observaciones. Lo frecuente es que la ley no se conozca á pesar de haber multiplicado las experiencias, y entonces no queda otro recurso que la *hipótesis;* pero es necesario que ésta no verse nunca sobre lo que está por encima de nuestros conocimientos; sobre los diversos modos de lo Incognoscible.— Las hipótesis en Física son utilísimas cuando constituyen una aplicación del método eminentemente racional, de las aproximaciones sucesivas. ¿Qué ha hecho la Geodesia para determinar la forma de la Tierra? — Sabíase por observaciones directas que la línea de contacto del cono circunscripto á la superficie terrestre, desde un punto cualquiera más ó menos elevado, es siempre un círculo; de aquí y del conocimiento previo de algunas verdades matemáticas relativas á la esfera, dedujo que si la superficie de la Tierra no era esférica, poco se apartaría de esa forma; *supuso*, por tanto (tal es la hipótesis), como una primera aproximación, que la Tierra era esférica. ¿Cuántos fenómenos, cuántas leyes naturales y cuántas verdades no ha descubierto el hombre con sólo hacer esa primera hipótesis? — ¿Se podrá decir que perdió el tiempo suponiendo lo que después se ha visto que no era cierto? — De ningún modo; porque los mismos cálculos que arrancaban de esa hipótesis, sirvieron no sólo para advertir de que no se estaba en lo cierto, sino también para corregir los errores y hacer sucesivamente nuevas hipótesis que han conducido paso á paso al conocimiento de la forma exacta de la superficie de la Tierra.— Toda la

Astronomía, la ciencia cosmológica más perfecta que hoy se conoce ¿No es una serie continuada de aplicaciones del método de las aproximaciones sucesivas?— Y si tan fecundos resultados ha dado este método en Astronomía, ¿porqué hemos de desterrarlo de la Física?— Es singular la facilidad con la cual espíritus superficiales se escandalizan de ese continuo crear hipótesis' de verlas tomar vuelo, acreditarse más ó menos, y caer por último en el más completo abandono, para dejar su puesto á otras, y éstas á otras, que siguen la misma suerte; por lo cual califican de arbitraria á la Física; sin tener en cuenta que las hipótesis no son la ciencia, y que en medio de ese surgir y caer hipótesis va avanzando siempre el edificio científico sobre bases tan sólidas que nunca podrá ser destruído.— Las hipótesis son como los andamios, que se quitan una vez terminada la obra.— Es cierto que algunas desdichadas hipótesis han entorpecido, paralizado y hasta hecho retroceder á la ciencia en su carrera; pero es porque no eran otra cosa que simples tanteos empíricos, que por añadidura versaban sobre modos de lo Incognoscible. No ocurre lo mismo con los conceptos generales y culminantes que resultan de la síntesis de un número inmenso de hechos, y cuya verdad subjetiva tiene el valor de la realidad objetiva de los hechos que ellos sintetizan.— ¿Quién no ve una diferencia grandísima entre la hipótesis de los alquimistas y la teoría de los átomos?—¿O entre la hipótesis de los fluidos imponderables y la eminentemente racional de que el calor es un modo del movimiento?—Tenemos en resumen que las hipótesis científicas han de ser la síntesis de un gran número de hechos de un orden dado; no han de versar sino sobre lo cognoscible y han de ser tales que puedan modificarse en el sentido de irse acercando á la verdad determinada.

En el trabajo que vamos á emprender pensamos hacer una aplicación de todos estos principios generales.

6.— Tratándose de la *constitución molecular de los cuerpos gaseosos* nada más natural que decir algunas palabras sobre la constitución de los cuerpos en sus estados.

Qué sea la esencia íntima de la materia nos es tan desconocido como la esencia de todas las cosas; ella se nos revela por experiencias de fuerza; lo primero que notamos es la propiedad que tiene la materia de *resistir* á nuestra acción muscular; y como distintas adaptaciones musculares indican distintas coexistencias, esto nos obliga á concebir cada porción de materia como conteniendo más de una porción resistente; es decir, como ocupando *espacio*. La resistencia y la extensión son, pues, las dos cualidades bajo que la materia se nos revela; así es que en buena lógica la palabra *materia* no puede significar para nosotros más que esas dos cosas juntas: *extensión resistente.*

Cuanto se suele decir acerca de la esencia, unidad, origen y finitud ó infinitud de la materia está fuera de la esfera de nuestros conocimientos.

Las porciones limitadas de materia, esto es, los *cuerpos* se nos ofrecen bajo un número inagotable de formas, propiedades, accidentes y relaciones; debiéndose citar aquí la propiedad que tienen todos los cuerpos de aumentar ó disminuir de volumen sin aumento ni pérdida de materia, propiedad que basta por sí sola para poder afirmar que la materia que constituye un cuerpo no es contínua en toda la extensión de éste. Pero esta falta de continuidad podemos concebirla de dos modos: 1.º De manera que se pueda pasar de un punto del cuerpo á otro, arbitrariamente elegidos, sin atravesar ninguna solución de continuidad; esto es, siendo contínua la parte de extensión ocupada por la materia del cuerpo. 2.º De modo que no se pueda pasar de un punto á otro, por próximos que se hallen, sin atravesar las soluciones de continuidad, para lo cual es preciso que la extensión no ocupada por la materia sea contínua.

El primer modo, así como la continuidad de la materia en toda la extensión del cuerpo, es inadmisible, por estar en contradicción con la misma propiedad de las dilataciones y contracciones; con la divisibilidad de los cuerpos; con sus cambios de estado, principalmente con el estado gaseoso; y sobre todo con las combinaciones químicas. ¿Cómo se han de penetrar tan íntimamente como en las combinaciones químicas, dos porciones de materia, contínuas en toda su extensión, aunque las superficies presenten tantos poros, arrugas, pliegues ó resquebrajaduras como se quiera?

7.— Tenemos, por tanto, que la materia de los cuerpos es discontínua de la segunda manera; esto es, está formada por multitud de pequeñísimas porciones llamadas *átomos*, separadas unas de otras por intervalos más ó menos grandes, según el estado físico del cuerpo. Estos átomos, como la palabra lo indica, son indivisibles por medio de las fuerzas naturales. Y no decimos que sean macizos, ni que, por el contrario, estén compuestos de otras porciones mucho más pequeñas de una sustancia única, con diversos movimientos rotatorios, lo que caracterizaría las diversas clases de materia que se conocen, porque esto cae fuera de nuestro alcance en el estado actual de la ciencia.

8.—Mucho se ha discutido sobre la indivisibilidad del átomo; nosotros apoyándonos en las leyes químicas de las proporciones definidas, y de las proporciones múltiples, en la de Gay-Lussac, relativa á los volúmenes de dos gases que se combinan, etc., etc., afirmamos esa indivisibilidad sólo como un hecho resultante del juego de las fuerzas naturales. Que la materia, bajo el concepto de su extensión, se conciba divisible indefinidamente, no dice nada en apoyo de que lo sea. La indivisibilidad del átomo es, como la atracción universal, una ley que podría no existir sin que se siguiera absurdo ninguno; lo único que ocurriría es que la Naturaleza sería de distinto modo de como es, y la materia misma ofrecería otros atributos que hoy no tiene.

9. — La química nos enseña, por otra parte, que hay cuerpos de los cuales se puede separar más de una clase de materia, llamados *compuestos;* y que en la más pequeña porción de cuerpo, á la que se puede llegar por procedimientos mecánicos ó físicos, existen los mismos elementos materiales, y en la misma proporción, que en el cuerpo entero. También sabemos que la más pequeña porción que puede concebirse de un cuerpo compuesto, sin que deje de ser homogénea con el todo, se denomina *molécula,* y que la fuerza que mantiene unidos los átomos componentes de una molécula se llama afinidad, fuerza que no puede vencerse por procedimientos mecánicos, por lo cual el estudio de cuanto de ella depende está fuera del objeto de este trabajo.

10. — Veamos ahora qué acciones se ejercen entre las moléculas de un mismo cuerpo. Desde luego, todos los cuerpos sólidos y líquidos oponen una cierta resistencia á ser partidos y una tendencia á recobrar la forma primitiva cuando han sido deformados, sin exceder cierto límite; lo que prueba que hay atracción entre sus moléculas; fuerza atractiva que se designa, como sabemos, con el nombre de *cohesion.* Por otra parte, el frotamiento, el choque, y, en general, todo movimiento que al parecer se destruye, produce calor; y viceversa, toda cantidad de calor puede producir un trabajo, existiendo una relación constante entre el calor gastado y el trabajo producido, ó entre el trabajo realizado y el calor obtenido. Esto nos prueba que el calor es un modo del movimiento, y como este movimiento no es del conjunto, es claro que es un movimiento de los elementos de la materia; el movimiento destruído por el frotamiento, el choque, etc., se transmite á los elementos materiales, según el principio de la conservación de la energía, con una velocidad grandísima y con desplazamientos tan diminutos, que deja de ser perceptible al sentido de la vista, haciéndose sensible al sentido del tacto bajo forma de calor.

Y como el calor puede producir la descomposición química, esto es, la disociación de los átomos componentes de las moléculas, es claro que el movimiento que constituye el calor, afecta también á los átomos, independientemente del movimiento común que á estos comunica la molécula á que pertenecen.

Nada más podemos añadir, en buena lógica, acerca de este movimiento, sino que es de tal naturaleza, que cuando aumenta se separan más cada vez los centros de las moléculas, originando los aumentos de volumen que hemos llamado dilataciones por el calor. Que las moléculas *giran* unas al rededor de otras, siendo el calor su fuerza centrífuga; que ellas *oscilan* al rededor de sus posiciones de equilibrio, siendo el calor la fuerza viva de este movimiento vibratorio; que estas vibraciones son rectilíneas ó curvilíneas, etc., todo esto es imposible hoy afirmarlo ni negarlo por pertenecer al campo de las hipótesis. Impórtanos, sin embargo, dejar bien sentado que el calor es un movimiento de cierta especie, y que variaciones ocasionadas en este movimiento, originan las variaciones que nosotros podemos observar en los cuerpos que sufren una transformación termológica cualquiera Tenemos, pues, entre la cohesión por un lado y el calor por otro, los dos principios antagonistas de los que dependen casi todos los fenómenos que presentan los cuerpos relativamente á su estado de agregación molecular.

II.— Sentado esto, supongamos un cuerpo sólido al que comunicamos calor de un modo contínuo. ¿Cuál será el efecto de semejante operación? Sigamos á Tyndall que lo describe del siguiente modo: «cada crecimiento de calor, dice, pone á las moléculas más distantes unas de otras; pero la fuerza de cohesión, como todas las fuerzas conocidas, obra siempre más débilmente á medida que crece la distancia entre las moléculas que son el asiento de la cohesión. Cuando el calor aumenta, su opuesta se debilita, hasta que, finalmente, las moléculas llegan á estar tan desligadas de la rígida esclavitud de la cohesión, que quedan libres no sólo para afectar la clase de movimientos que llamamos calor, sino también para deslizarse las unas sobre las otras, de tal modo, que si bien oponen todavía alguna resistencia á su separación absoluta, su movilidad tangencial no ofrece ya ningún obstáculo. Este segundo estado es el estado *líquido* de la materia.»

«Supongamos que desarrollamos en el seno de la masa líquida una nueva cantidad de calor suficientemente intensa. ¿Qué sucederá? Sucederá que las moléculas romperán las últimas trabas de la cohesión, se aislarán y se escaparán para formar burbujas de vapor. Si el líquido está libre por alguna parte, es fácil concebir que algunas moléculas de la superficie libre saldrán de hecho del liquido lanzándose en el espacio con cierta velocidad. Desligada así de la influencia de la cohesión, la materia se nos presenta bajo la forma de *vapor* ó de *gas.*»

Tal como hemos considerado los conceptos de materia, átomo, molécula, calor, sólido, líquido y gas, nada tienen de hipotéticos: son las nociones resultantes de aplicar nuestros medios de conocer á hechos naturales como los que hemos acompañado á las afirmaciones sentadas y muchos más que hubiera sido prolijo enumerar. No tienen esas afirmaciones la certeza de las conclusiones matemáticas, pero tienen la evidencia de las ideas que emanan del mundo corpóreo.

12.— Para continuar este trabajo nos vemos obligados á entrar ya en el terreno de las hipótesis, y como nuestro objeto es el estado gaseoso de la materia, nada diremos de los otros dos estados. Acabamos de ver que el caracter distintivo de la materia en estado gaseoso es la falta absoluta de cohesión entre sus moléculas, y si bien este caracter, por su generalidad, conviene á todos los fenómenos que en los gases podemos observar, no basta por sí solo para explicar aquellos, y de aquí la necesidad de las hipótesis.

El Materialismo respecto del mundo físico, esto es, la llamada Teoría Cinética del Universo, que parte del principio de que éste está sólo constituído por materia en movimiento, y que las manifestaciones de fuerza no son otra cosa que comunicaciones ó transmisiones del movimiento, imagina, consecuente con este principio, á los gases formados por infinidad de moléculas infinitamente pequeñas respecto del valor medio de la distancia que las separa, y animadas de velocidades de traslación considerables y de direcciones cualesquiera, variables de una molécula á otra, de tal modo, que en un gas que se dice en equilibrio (aparente) no hay dirección favorecida. No hay entre estas moléculas acción recíproca ninguna; son completamente independientes, y para los efectos de los fenómenos de los gases, como si estuvieran formadas por un sólo átomo perfectamente elástico; de modo que á pesar de los incesantes choques que entre molécula y molécula tiene lugar, se conserva fija la velocidad media molecular de traslación y el volumen específico correspondientes á una temperatura y presión determinadas. (Conviene advertir aquí que la falta de cohesión de que hablamos en el párrafo anterior no significa, fuera de esta hipótesis, una absoluta independencia entre las moléculas gaseosas).

En esta teoría, cuyo valor científico después analizaremos, la presión de un gas sobre las paredes de la vasija que lo contiene, resulta de los choques de las moléculas sobre estas paredes, y para determinarla se procede del modo siguiente:

13.— Supóngase una vasija que tenga dos paredes planas paralelas y de una grande extensión respecto del resto de la superficie; y entre estas dos paredes una sola molécula animada de la velocidad v que forma el ángulo θ con la normal á la pared en el punto en que se supone ha de chocar. Como la experiencia demuestra que la presión es siempre normal á la superficie de la vasija, deberemos tomar la componente $v \cos \theta$ de la velocidad, según la normal antes referida. Ahora bien, la fuerza normal con que la molécula choca se mide por el producto de su masa por su aceleración, esto es:

$$F = m \cos \theta \frac{dv}{dt}; \text{ de donde } F dt = m \cos \theta \, dv. \qquad (1)$$

Un momento infinitamente pequeño antes del choque la velocidad normal era $v \cos \theta$; un momento infinitamente pequeño después del choque dicha velocidad es $-v \cos \theta$.

Veamos cual ha sido y de qué manera la reacción de la superficie para producir este cambio de dirección.

Sea $t'' - t'$ el tiempo infinitamente pequeño que dura el choque, esto es, el tiempo que media entre el momento en que se ponen en contacto la superficie de la molécula y la de la pared y el momento en que se separan dichas superficies. Durante todo el tiempo $t'' - t'$ la acción elástica de la pared, esto es, la tendencia á volver á su primitiva posición después que la sacó de ella el empuje de la molécula al chocar ha cambiado de valor, pues debió empezar por cero, adquirir un máximo y acabar después por cero; y como todos estos estados elásticos de la pared, en unión con los originados por otros choques, constituirán la presión permanente que á una temperatura dada, la pared experimenta, por eso debemos tenerlos en cuenta y sumarlos para apreciar el efecto total del choque de una sola molécula. Dividamos el tiempo $t'' - t'$ en n partes iguales (lo de iguales es sólo por simplificar, pues lo mismo sería si fuesen desiguales), y llamemos Δt á una de estas partes, y sean $0, F', F'', F''', F^{IV}, \ldots\ldots F^{(n)}, 0$, los valores que toma la fuerza F (1) al fin de cada división del tiempo $t'' - t'$; la suma total de las acciones así desarrolladas sobre la superficie será

$$F' \Delta t + F'' \Delta t + F''' \Delta t + \ldots\ldots + F^{(n)} \Delta t = \sum F \Delta t.$$

Si hacemos Δt infinitamente pequeño para que los valores F', F'', F'''... de la fuerza se sucedan de un modo contínuo, la suma anterior se convertirá en la integral definida:

$$\int_{t'}^{t''} F dt,$$

que, sustituyéndole el valor (1), será:

$$\int_v^{-v} m \cos\theta \, dv = m \cos\theta \Big[v \Big]_v^{-v} = -2m \cos\theta . v.$$

Como el signo no expresa mas que el sentido en que la presión se ejerce, podemos prescindir de él, y quedarnos sólo con el valor absoluto, de modo que tendremos:

Presión debida á un choque de una sola molécula $= -2mv \cos\theta$... (2)

Pero esta molécula, después de chocar contra la pared considerada, lo hará contra la opuesta, y volverá de nuevo á chocar contra la primitiva pared. El tiempo que media entre dos choques consecutivos de la misma molécula sobre la misma pared, será el doble del tiempo empleado en ir de una pared á la otra. Y si á la distancia normal comprendida entre ambas paredes la llamamos h, será

$$h = v \cos\theta \times \textit{tiempo},$$

puesto que el movimiento es uniforme y por tanto:

$$\textit{Tiempo} = \frac{h}{v \cos\theta} \qquad \text{cuyo duplo } \frac{2h}{v \cos\theta}$$

es el tiempo comprendido entre dos choques consecutivos sobre la misma pared.

Si suponemos N el número de choques que produce una molécula sobre una misma pared durante la unidad de tiempo, tendremos:

$$1 = N . \frac{2h}{v \cos\theta}; \text{ de donde } N = \frac{v \cos\theta}{2h}$$

Y como la presión producida por cada molécula depende, tanto de la velocidad ó fuerza de percusión, cuanto del número de choques que se produzcan en un tiempo dado, de aquí que debamos considerar la acción total de una molécula durante la unidad de tiempo, que se obtendrá multiplicando por N la acción (2). Así.

Presión debida á los choques de una molécula en la unidad de tiempo sobre la misma pared $= \dfrac{2mv^2\cos^2\theta}{2h}$.... (3)

Como por hipótesis el número de moléculas que chocan bajo la dirección A es el mismo que el de las que chocan bajo las direcciones B, C, D, etc., se sigue que si suponemos una esfera de radio 1 dentro de la masa gaseosa, cuyos radios comprenden todas las direcciones posibles; y si desde el centro de esta esfera trazamos una perpendicular á la cara, cuya presión buscamos; y al rededor de esta perpendicular como eje y con el centro de la esfera por vértice, trazamos dos superficies cónicas; el número de radios de la esfera (ó sea direcciones) comprendidos entre estas dos superficies cónicas, es proporcional al área de la zona esférica comprendida entre dichos conos, puesto que cada radio tocando en un punto de la superficie esférica, el número de radios comprendidos entre ciertos límites y el de puntos de la superficie esférica interceptada entre los mismos, son iguales. Y como por otra parte, en todas direcciones va un mismo número de moléculas á chocar contra la pared, el número total de moléculas que chocan con direcciones comprendidas entre aquellos conos es también proporcional á la zona esférica comprendida entre los mismos. Supongamos que las generatrices de una de aquellas superficies cónicas, supuestas de revolución, formen con el eje el ángulo θ y las de la otra el ángulo $(\theta+d\theta)$; el arco de círculo máximo, cuyo plano pasa por el eje de los conos, comprendido entre las superficies laterales de éstos, es $d\theta\times 1=d\theta$, y su proyección sobre el eje será la altura de la zona esférica que venimos considerando; esta proyección será $d\theta . \operatorname{sen} \theta$, puesto que la dirección de $d\theta$ es perpendicular á la de las generatrices del cono que forman el ángulo θ con el eje. Por otra parte, el área de la zona es igual á su altura por una circunferencia máxima 2π, es decir, será: $2\pi \operatorname{sen} \theta . d\theta$. Luego si llamamos n el número total de moléculas de la masa gaseosa y q el de las que chocan con direcciones comprendidas en aquella zona, tendremos:

$$\frac{n}{q}=\frac{4\pi=\text{área de la esfera}}{2\pi \operatorname{sen} \theta d\theta=\text{área de la zona}},$$

de donde se deduce

$$q=\frac{1}{2} n \operatorname{sen} \theta d\theta \ldots\ldots$$

Multiplicando este número por el valor (3) tendremos:

$$\frac{2m\, v^2 \cos^2\theta}{2h}\times\frac{1}{2} n \operatorname{sen} \theta d\theta=\frac{mn}{2h} v^2 \cos^2\theta \operatorname{sen} \theta d\theta \ldots \qquad (4)$$

que expresa la presión debida á todos los choques efectuados durante la unidad de tiempo por todas las moléculas cuyas direcciones al chocar están comprendidas entre las dos superficies cónicas referidas; por consiguiente, para obtener la presión total debida á todas las moléculas, durante la unidad de tiempo, bastará integrar la expresión anterior entre cero y $\frac{\pi}{2}$, y tendremos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{mnv^2}{2h} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{mnv^2}{2h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos^2 \theta \, d (\cos \theta) =$$

$$\frac{mnv^2}{2h} \left[- \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{mnv^2}{6h}$$

Pero al establecer la proporción entre los números n y q, pusimos todos los radios de la esfera como representantes de todas las direcciones posibles, siendo así que cada dos radios opuestos corresponden á una sola dirección, y por tanto que hemos tomado el número n doble de lo que realmente es; hay, pues, que dividir por 2 la última fórmula, y tendremos en definitiva, llamando P_1 á la presión de todo el gas sobre una de las caras paralelas consideradas:

$$P_1 = \frac{3h}{1} Mv^2;$$

siendo M la masa del gas, producto de la masa de una molécula por el número de ellas, y si todas las moléculas no tienen la misma masa, m será el promedio de todas, como si todas no van animadas de igual velocidad, v es el promedio de las velocidades.

14.—*Ley de Mariotte.*— Siendo P_1 la presión sobre una cara de la vasija cuya área representaremos por s, si quisiéramos la presión P sobre la unidad de área bastaría dividir por s, y resultaría:

$$P = \frac{Mv^2}{3hs} \dots\dots \qquad (5)$$

Pero si las demás caras de la vasija son perpendiculares á las dos caras paralelas, hs será el volumen V del gas, y por lo tanto, la fórmula anterior es

$$PV = \frac{1}{3} Mv^2 \qquad (6)$$

Como M, masa del gas, es constante, y v, velocidad media de las moléculas también lo es cuando la temperatura no varía, dedúcese que la ecuación anterior puede ponerse bajo la forma $PV = const.$ que expresa la ley de Mariotte, á saber: que bajo una misma temperatura los volúmenes de un gas están en razón inversa de las presiones que soporta. Esta ley es general, puesto que la forma de la vasija no altera la presión ejercida.

15. — *Ley de las mezclas.* — Si varios gases mezclados no ejercen acción química entre sí, la fuerza viva de la mezcla será igual á la suma de las fuerzas vivas de los gases componentes y tendremos:

$$\Sigma mv^2 = \Sigma m'v'^2 + \Sigma m''v''^2 + \Sigma m'''v'''^2 + \ldots\ldots \qquad (7)$$

siendo $m, m', m'', m''', \ldots\ldots$ las masas de cada molécula de la mezcla y de los gases componentes, y $v, v', v'', v''', \ldots\ldots$ las velocidades medias de las moléculas en la mezcla y en los gases componentes.

Sean $n, n', n'', n''', \ldots\ldots$ los números de moléculas de la mezcla y gases mezclados respectivamente, se tendrá

$$\Sigma mv^2 = nmv^2, \quad \Sigma m'v'^2 = n'm'v'^2, \quad \Sigma m''v''^2 = n''m''v''^2, \ldots\ldots \text{ etc.}$$

y por otra parte, según (6)

$$nmv^2 = Mv^2 = 3PV, \quad n'm'v'^2 = M'v'^2 = 3P'V, \quad n''m''v''^2 = M''v''^2 = 3P''V \ldots \text{ etc.},$$

puesto que el volumen de la mezcla y el de cada gas son todos iguales. Sustituyendo estos valores en las anteriores igualdades, y por su intermedio en la (7), tendremos:

$$3V.P = 3V\,[P' + P'' + P''' + \ldots\ldots]$$

ó bien

$$P = P' + P'' + P''' + \ldots\ldots$$

que nos dice que la presión de la mezcla es igual á la suma de las presiones de los gases componentes, conforme con la ley deducida experimentalmente.

16. — *Ley de Gay-Lussac.* — Podemos definir la temperatura de un cuerpo cualquiera correspondiente al estado termológico C, é independientemente de toda hipótesis, diciendo que es la razón ó cociente del incremento de volumen al pasar el cuerpo de un estado termológico fijo A, al estado C por la centésima parte del incremento de volumen sufrido al pasar del estado A á otro B también fijo. Así, si suponemos que v_0, v y v_1 son los volúmenes correspondientes á los estados A, C y B respectivamente y t la temperatura, se tendrá:

$$t = \frac{v - v_0}{\dfrac{v_1 - v_0}{100}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

despejando de aquí el valor de v, se tiene fácilmente:

$$v = v_0 \left[1 + \frac{v_1 - v_0}{100 . v_0} t\right] = v_0 (1 + \alpha t) \qquad (8)$$

donde
$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{100 . v_0} .$$

Este valor se llama coeficiente medio de dilatación entre 0^0 y 100^0; pues según el anterior valor de t, esta es cero cuando v es v_0, y 100 cuando v es v_1.

Si en (8) hacemos $t = 1$, sale $\alpha = \dfrac{v - v_0}{v_0}$ que nos dice que el coeficiente medio de dilatación es también igual al incremento de volumen al pasar el cuerpo de 0^0 á 1^0 partido por el volumen á cero. Si ahora hacemos pasar la temperatura de 0^o á 2^o, de 0^o á 3^o, etc., la mitad, la tercera parte, etc., del incremento total del volumen $v - v_0$ dividida por v_0 expresará el coeficiente medio de dilatación α; pero si hacemos pasar la temperatura de 0^o á dt^o, y en general de t^o á $(t + dt)^o$, según la manera de formarse el coeficiente de dilatación, este será para el intervalo dt:

$$\alpha = \frac{dv}{v_0 dt}$$

que es la expresión del verdadero coeficiente de dilatación á la temperatura t; pues bien, la experiencia enseña que este coeficiente α es variable en general, con la presión y con la temperatura.

Hecha esta observación, podemos ya decir qué significa la ley de Gay-Lussac. Esta consiste en la afirmación de que en los gases, entre 0^o y 100^o, α es constante é igual á 0,00366, independientemente de la presión y de la temperatura; de donde se deduce que para los gases en aquellas condiciones, será cierta la expresión $v = v_0 (1 + \alpha t)$ en que α es, tanto el coeficiente medio, como el verdadero coeficiente de dilatación. De esta expresión se deduce $v - v_0 = \alpha v_0 t$ y para otro volumen v' y su temperatura t' será: $v'-v_0=\alpha v_0 t'$; restando ésta de la anterior sale $v-v'=\alpha v_0(t-t')$ que expresa la ley de Gay-Lussac bajo esta otra forma: *los incrementos de volumen de los gases son proporcionales á los incrementos de temperatura, independientemente de la presión.* En la hipótesis cinética que venimos considerando se puede definir la temperatura diciendo que es una función lineal de la fuerza viva del movimiento de traslación de las moléculas gaseosas, por manera que $t=q(mv^2)-p$; en donde p es una constante dependiente sólo de la escala termométrica que se emplee, y q es otra constante dependiente de la naturaleza del cuerpo con que se ha construído el termómetro. En un termómetro cuya escala se construya en la hipótesis de $p=o$, la temperatura se llama *absoluta*, y se designa por T.

Si en la ecuación anterior damos á mv^2 un incremento Δmv^2, la temperatura recibirá el incremento correspondiente Δt, de modo que

$$t+\Delta t=q\ (mv^2+\Delta mv^2)-p,$$

y restando de esta la anterior, sale

$$\Delta t=q\Delta mv^2$$

Por otra parte, llamando n el número de moléculas de un gas, la ecuación (6) nos da:

$$\mathrm{PV}=\frac{1}{3}\mathrm{M}v^2=\frac{1}{3}nmv^2;$$

de esta igualdad, suponiendo P constante, dando el incremento Δmv^2 á la fuerza viva, y llamando ΔV el correspondiente del volumen, resulta:

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}+\Delta\mathrm{V})=\frac{1}{3}n(mv^2+\Delta mv^2)$$

de la que restando la anterior se obtiene

$$\mathrm{P}.\Delta\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{n}.\Delta mv^2.$$

Eliminando Δmv^2 entre ésta y la que da el valor de Δt, sale:

$$\Delta t=\Delta\mathrm{V}.\frac{3\mathrm{P}q}{n};$$

y repitiendo todo lo que precede, en las mismas condiciones de presión, para un nuevo incremento de la fuerza viva y llamando $\Delta' t$ y $\Delta' V$ los incrementos correspondientes de la temperatura y del volumen, tendremos análogamente

$$\Delta' t = \Delta V . \frac{3Pq}{n};$$

de donde

$$\frac{\Delta t}{\Delta' t} = \frac{\Delta V}{\Delta' V}$$

que nos da la proporcionalidad entre los incrementos del volumen y de la temperatura, independientemente de la presión, con tal de que ésta sea la misma en los dos estados termológicos que se comparan. Tenemos, pues, la ley de Gay-Lussac, deducida también como la de Mariotte de la hipótesis sentada.

17. *Relación termológica fundamental en los gases.*— Hemos visto que para una temperatura definida se verifica en los gases la ley de Mariotte $PV = const.$; así como para una presión dada la de Gay-Lussac $V = V_0 (1 + \alpha t)$. Veamos la manera de relacionar por medio de una sola ley á P, V y t.— Sean P', V' y $t' \ldots P''$, V'' y t'' los valores de las tres variables correspondientes á dos estados distintos. Por la segunda ley se saca

$$(V_0 \text{ á la presión } P') = \frac{V'}{1 + \alpha' t}; \quad (V_0 \text{ á la presión } P'') = \frac{V''}{1 + \alpha t''};$$

pero, según la primera ley, los productos de estos volúmenes por sus respectivas presiones son iguales; luego

$$\frac{P'V'}{1 + \alpha t'} = \frac{P''V''}{1 + \alpha t''}$$

$$\text{y si} \quad P'' = P_0, \; V'' = V_0 \quad \text{y} \quad t'' = 0, \quad \text{será} \quad \frac{P'V'}{1 + \alpha t'} = P_0 V_0;$$

de donde se deduce en general

$$PV = P_0 V_0 (1 + \alpha t)$$

que es la relación pedida.

Sacando α fuera del paréntesis, será

$$PV = P_0 V_0 \alpha \left(t + \frac{1}{\alpha} \right);$$

y refiriéndose á un termómetro cuyo cero se halle $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^0$ más bajo, y llamando R al producto $P_0V_0\alpha$, tendremos

$$PV = P_0V_0\alpha T \quad \text{ó} \quad PV = RT \tag{9}$$

siendo T la temperatura en el nuevo termómetro, la cual es la temperatura absoluta, porque de

$$RT = PV = \frac{1}{3}nmv^2, \quad \text{sale} \quad T = \frac{n}{3R}(mv^2)$$

que es la condición bajo la que la temperatura llamada así por ser cero cuando el movimiento de traslación de las moléculas es nulo.

18.— *Constancia de los calores específicos.*— Llámase calor específico á presión constante de un cuerpo la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura de un kilogramo del mismo cuerpo, cuando no se tiene en cuenta su volumen, y la presión se mantiene constante. Calor específico á volumen constante es la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura de un kilogramo de masa, cuando no se tiene en cuenta la presión y el volumen permanece constante. Pero nosotros hemos definido la temperatura como una función de primer grado de la fuerza viva del movimiento de traslación; luego la cantidad de calor necesaria para producir un aumento cualquiera de temperatura, equivale á la cantidad de energía necesaria para producir el incremento correspondiente en la fuerza viva de traslación.

Ahora bien, nosotros hemos visto al final del número 16 que

$$P.\Delta V = \frac{1}{3}n\Delta mv^2,$$

lo que nos dice que, bajo presión constante, los incrementos de fuerza viva son proporcionales á los incrementos de volumen, éstos lo son á los de temperatura, según la ley de Gay-Lussac; luego los incrementos de fuerza viva son proporcionales á los incrementos de temperatura bajo presión constante; pero el primer calor específico se refiere siempre á un grado de incremento en la temperatura; luego también será constante el incremento correspondiente de fuerza viva, esto es, el calor específico á presión constante.— Por otra parte, de la ecuación (6)

$$PV = \frac{1}{3}nmv^2,$$

suponiendo constante el volumen, incrementando la fuerza viva y la presión, y restando luego la anterior, se obtiene:

$$\Delta P . V = \frac{1}{3} n \Delta m . v^2,$$

y si entre ésta y la ya obtenida $\Delta t = q \Delta m v^2$ se elimina $\Delta m v^2$, resultará

$$\Delta t = \frac{3Vq}{n} \Delta P,$$

que bajo volumen constante, nos dice que los incrementos de presión y de temperatura son proporcionales; lo cual constituye otra consecuencia ú otra forma de la ley de Gay-Lussac; luego en todos los casos en que Δt valga un grado, Δp permanecerá constante, y según:

$$\Delta P . V = \frac{1}{3} n \Delta m v^2,$$

también permanecerá constante el incremento de fuerza viva, esto es, el calor específico bajo volumen constante.

19. *Velocidad de las moléculas.*— De las ecuaciones (6) y (9) se deduce inmediatamente

$$\frac{1}{3} M v^2 = \alpha V_0 P_0 T$$

Sabemos que el peso de los cuerpos es el producto de su masa por la gravedad; tomando, pues, un kilógramo de gas, tendremos

$$1 \text{ kg.} = Mg;$$

de donde

$$M = \frac{1}{g} = \frac{1}{9^m,809}; \quad \alpha = 0,00366$$

según el primer enunciado de la ley de Gay Lussac. Sustituyendo, pues, estos valores en la anterior y despejando el valor de v, tendremos:

$$v = \sqrt{3 \times 9,809 \times 0,00366 . V_0 P_0 T} = 0,32818.. \sqrt{V_0 P_0 T}$$

20. También se explica bien con la hipótesis que examinamos el aumento ó descenso de la temperatura de un gas siempre que éste sufre ó ejecuta un trabajo externo cualquiera, porque, no existiendo fuerza alguna en las moléculas, cualquier trabajo ejecutado por una fuerza externa, ó mejor dicho, conforme con la presente hipótesis: cualquier trabajo realizado por un cuerpo externo en movimiento que el gas consume se traduce inmediatamente en fuerza viva del movimiento de transporte de sus moléculas, y viceversa; pues ya digimos que se consideraba fija la velocidad media molecular de transporte y lo mismo el volumen que corresponde á cada temperatura y presión.

21. Pocas más propiedades de los gases se explican ya satisfactoriamente con esta hipótesis, y algunos hechos se encuentran en palmaria contradicción con ella, como pronto tendremos ocasión de ver; pero, lejos de combatir esta hipótesis en sus detalles y paso á paso, vamos sólo á indicar la falsedad del principio que le sirve de fundamento, porque á seguida expondremos la crítica de otras hipótesis cuyos pormenores coinciden exactamente con los de ésta, no difiriendo de ella más que por las bases; y cuanto de éstas digamos será aplicable á la que ahora nos ocupa.

Hemos dicho que la Teoría Cinética del Universo es el fundamento de esta hipótesis. La Materia, dicen sus partidarios, es la sola que tiene existencia real en el Universo; las propiedades de la Materia no se extienden fuera de ella ni se pueden transportar á otras Materias; sólo el movimiento puede transmitirse á otras Materias, y esto sólo por contacto. En estas pocas palabras está condensado, por decirlo así, todo el Materialismo, en cuanto hace referencia al mundo físico. A cualquiera se le ocurrirá seguramente, y con razón, preguntar: si la Materia no obra más que por contacto, ¿cómo se explican la gravitación universal, la gravedad, la cohesión, la afinidad química y las acciones eléctricas?; á lo que responden inmediatamente los Cinéticos: todas esas son palabras sin sentido; existe una materia sutilísima que llena el Universo entero, el éter imponderable, que es el encargado de impulsar unas contra otras las porciones de materia ponderable llamadas astros, cuerpos terrestres, moléculas y átomos; y si bien es verdad que las últimas divisiones de aquella materia original son infinitamente pequeñas respecto de las últimas porciones de la materia ponderable, también lo es el que están dotadas de velocidades infinitamente grandes, y que, por consiguiente, sus cantidades de movimiento, productos de masas por velocidades, son cantidades finitas capaces, por lo tanto, al comunicarse por contacto á la materia ponderable, de producir los efectos que nosotros distinguimos bajo las apariencias de la atracción de la Materia.

22. La elasticidad, esto es, la facultad de volver á adquirir la forma y volumen primitivo, después que cesó la causa que deformó ó comprimió un cuerpo cualquiera, es ya más difícil de explicar por la Cinética. Nosotros distinguimos en el choque de los cuerpos elásticos dos momentos bien distintos; durante el primero la velocidad de traslación de los dos cuerpos se comunica á sus elementos materiales; éstos salen de las posiciones en que se encontraban, y comienzan una gran oscilación en sentido contrario del movimiento de arrastre anterior al choque, lo que origina una deformación más ó menos profunda el cuerpo. Pero como las moléculas no son independientes, sino solidarias; como existen fuerzas entre ellas que las mantienen en sus posiciones medias, estas fuerzas, ó mejor, su resultante obrará como fuerza retardatriz en el movimiento de aquella gran oscilación, ésta alcanzará su máxima amplitud, y desde este instante las moléculas retrocederán hacia sus posiciones primitivas; en este segundo momento, y por virtud de la inercia, las moléculas pasan de sus posiciones medias, pero no pueden completar sus oscilaciones en este segundo sentido por impedirlo las moléculas del otro cuerpo, que vienen también de regreso á sus primitivas posiciones en sentido contrario; y así como antes la imposibilidad de seguir moviéndose ambos cuerpos originó los movimientos vibratorios de sus moléculas, así ahora la imposibilidad de continuar éstas los movimientos vibratorios que originó el choque engendra el movimiento de cada uno de los dos cuerpos en sentido contrario al que traía antes de chocar. Resulta, pues, de este minucioso examen, que lo que llamamos reacción elástica es absolutamente imposible de comprender si las moléculas son independientes unas de otras, si no existe entre ellas ninguna fuerza que las obligue á volver al punto de partida. No sabemos cómo salvan los materialistas esta dificultad, pero suponemos lo que sobre poco más ó menos pueden contestar; el hecho que refleja más ó menos fielmente lo que ellos suponen es sin duda el de los cuerpos flotantes en un líquido que los moja ó no á todos; éstos, desde que alcanzan una distancia conveniente, se les ve precipitarse unos sobre otros y agruparse, formando un conjunto estable; tal, dirán, es la imagen de lo que ocurre con las moléculas sólidas y líquidas mojadas, es decir, chocadas por el éter; y así como en el agregado de corpúsculos flotantes en un líquido se nota que tienden á agruparse de nuevo cada vez que se les separa (no excediendo cierto límite) impulsados por el líquido, así también las moléculas integrantes de un sólido vuelven á sus posiciones medias, impulsadas por el éter, cada vez que de ellas se les saca; el fenómeno de la elasticidad está, pues, explicado. Pero si nos fijamos bien, esto que nos parece explicarlo todo no explica nada;

precisamente la acción capilar entre los sólidos y líquidos reconoce como causa el juego entre las acciones recíprocas de las moléculas sólidas y líquidas y de las fuerzas que existen entre las moléculas sólidas por una parte y entre las líquidas por otra, y esto es justamente lo que no reconoce ningún materialista: la existencia de fuerzas; y para que se vea que aquella imagen es ficticia, apliquémosla al caso del choque entre dos cuerpos. Supongamos dos agregados de corpúsculos flotantes en un mismo líquido, é impulsemos el uno contra el otro (imagen de dos cuerpos que se dirigen para chocar), ¿qué sucederá desde el momento, no de ponerse en contacto, sino de acercarse lo suficiente para que la acción capilar pueda obrar? ¿Se tocarán y se repelerán como dos cuerpos elásticos? De ningún modo: el líquido, juntando uno contra otro ambos agregados, formará con los dos un conjunto estable, es decir, se habrán soldado. ¿Dónde está aquí la analogía con el fenómeno del choque de los cuerpos elásticos?

23. Pero admitamos todavía que todo eso tuviera explicación. Compuesto el éter de átomos infinitamente pequeños, aislados é independientes, ¿en virtud de qué causa se mueven para producir la tendencia de la materia ponderable hacia su concentración en cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos? ¿Cómo se ponen de acuerdo los átomos de éter para contribuir á un mismo fin, cuando toda idea de solidaridad entre los mismos es contraria á la hipótesis cinética? Tenemos, pues, otro hecho sin explicación. Pero donde la tal hipótesis está abiertamente en oposición con los hechos es en el fenómeno de las vibraciones, ya del éter, ya de los átomos ponderables ó de las moléculas. Todos sabemos que los movimientos vibratorios no conducen materia en su propagación, sino que cada molécula oscila alrededor de su posición media, y sus aproximaciones y desviaciones alternativas, respecto de las moléculas próximas, produciendo incrementos y decrementos en las fuerzas atractivas ó repulsivas que las mantenían solidariamente en equilibrio, hacen que éstas entren en vibración; las cuales comunicarán el movimiento del mismo modo á las inmediatas, y así sucesivamente. Mas suprimid la fuerza; suponed que las moléculas son completamente independientes, y que una cualquiera de ellas, por causas exteriores, por un choque, entra en vibración (admitamos esta incomprensible vibración); ¿se propagará este movimiento á las moléculas inmediatas? ¿Cómo ni por qué este movimiento ha de producir el de la molécula próxima, que nada tiene que ver con aquélla ni ningún lazo de unión las liga? ¿Cómo se propagan el sonido, la luz, el calor radiante, ó en más grande esfera, las ondas circulares producidas en la superficie tranquila de un líquido cuando se percute uno de sus puntos? Aun podría contestarse que no hay vibraciones trasversales, que todas se verifican en el sentido mismo de la propagación, y que ésta tiene lugar por contacto; la primera molécula choca con la segunda, ésta con la tercera, y así sucesivamente; por efecto del choque retroceden hasta que chocan otra vez con las inmediatas que ya vuelven, y así sucesivamente. Aparte lo inexplicable de que por el choque retrocedan las moléculas, puesto que hemos visto que no puede haber elasticidad, un movimiento de esa especie en una fila de moléculas constituídas cinéticamente no puede acabar nunca. Pero hay más; concretándonos á los gases, que es nuestro objeto, es evidente que la velocidad de propagación en esa forma depende exclusivamente de la velocidad inicial. Cuanto mayor sea la velocidad con que la primera molécula se dirige á chocar con la segunda más pronto la alcanza y mayor velocidad comunicará á ésta, y así sucesivamente; de donde se deduce inmediatamente que en la propagación del sonido en el aire, por ejemplo, los sonidos agudos, como procedentes de vibraciones más rápidas se propagarán también con más rapidez, debiendo existir enormes diferencias entre las velocidades de propagación de los sonidos más graves y las de los más agudos, cosas todas que la experiencia de todos los días nos enseña que no se verifican.

Mucho más podría decirse contra una teoría que ha sido combatida en todos los terrenos, y en todos derrotada, á pesar del gran talento de algunos de sus mantenedores; lo cual nos apartaría de nuestro objeto, y por esto vamos á indicar las modificaciones introducidas por Clausius en esta teoría.

24. *Hipótesis de Clausius.*—Este célebre matemático, en una serie de memorias interesantísimas, ha desenvuelto la teoría de los gases, suponiendo las moléculas independientes como en la hipótesis anterior; pero admitiendo la fuerza para mantener unidos los átomos de una misma molécula, por manera que puede sin inconveniente suponer á éstas perfectamente elásticas; admite en las moléculas el movimiento de traslación rectilíneo y uniforme; un movimiento de rotación alrededor de ejes que pasan por el centro de gravedad, y un movimiento vibratorio interior ó sea de los átomos componentes de cada molécula; sostiene como antes que la temperatura depende exclusivamente de la mayor ó menor velocidad de traslación, y demuestra por el mismo cálculo que en la hipótesis precedente, que la presión se debe á los choques de las moléculas sobre las paredes de la vasija, las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac, etc., etc. Para salvar algunos inconvenientes admite que el volumen ocupado por las moléculas gaseosas es despreciable al lado del volumen aparente del gas; que la duración del contacto de las moléculas en el choque es también despreciable respecto del tiempo que separa dos choques consecutivos de una misma molécula, y por último, que cuando la temperatura se mantiene estacionaria, los choques de molécula á molécula, según el principio de la conservación de la energía, establecen una incesante transformación de fuerza viva de traslación en fuerza viva vibratoria é inversamente; pero que á causa del número inmenso de moléculas comprendidas en la más insignificante cantidad de un gas, debe haber siempre una compensación exacta entre las dos especies de trasformaciones inversas; por manera que cada una de las dos partes de que se compone la fuerza viva de un gas en equilibrio, puede considerarse separadamente como constante. Con esta última observación se explica, como en la hipótesis anterior, el aumento ó descenso de temperatura por el trabajo sufrido ó ejecutado por un gas. Los cálculos y consecuencias á que llega Clausias son los que anteriormente hemos expuesto y muchos otros que prolijo sería enumerar, los cuales tienen por objeto dar explicación de todos los fenómenos que en los gases tienen lugar; pero ya veremos después, que también esta hipótesis es contradictoria con muchos hechos. Por de pronto cabe esta objeción que es de Maxwel: Si las moléculas se mueven en diferentes direcciones siendo independientes las unas de las otras, no hay razón para que la presión sea necesariamente la misma en todas direcciones; pues aquello de que el número de moléculas que choca según cada dirección es siempre el mismo, no es admisible; porque supongamos que por una causa cualquiera se orientan la mayor parte de las moléculas entre direcciones determinadas; siendo aquellas independientes ¿en virtud de qué causa habían de pasar á moverse en todas direcciones? Por consiguiente, la presión producida por dos partes de un mismo gas separadas por un plano, no sería necesariamente normal á este plano, ni tampoco sería normal á las paredes de la vasija, la presión contra éstas.

25. *Hipótesis de Maxwel.*—Para salvar este inconveniente admite Maxwel que las moléculas de un gas no son independientes, sino que ellas se repelen con una fuerza cuya dirección pasa muy próximamente por sus centros de gravedad y cuya intensidad varía inversamente proporcional á la quinta potencia de la distancia; por manera que cuando las moléculas se aproximan unas á otras, aunque sus trayectorias no se corten, sufren desviaciones en su marcha, que van produciendo poco á poco la igualación del número de moléculas que se mueve en cada dirección; y como esta igualación no es instantánea, la presión en todos sentidos no es perfectamente igual hasta que el gas está en equilibrio (aparente). En los gases en movimiento, esa misma falta de igualdad de presión en todos sentidos explica el fenómeno de la viscosidad ó frotamiento interno. En esta hipótesis no hay realmente choques, pues las moléculas se repelen antes de ponerse en contacto; pero pueden establecer los mismos cálculos que en las hipótesis anteriores con sólo suponer que el radio de cada molécula, no es la distancia de su centro de gravedad á su superficie, sino la distancia de su centro de gravedad á la superficie de su esfera de actividad sensible; y debe admitirse enseguida que los radios de estas esferas de actividad son todavía infinitamente pequeños respecto de la distancia media que separa los centros de cada dos moléculas.

Habiendo llamado en el núm. 13, $t''-t'$ al tiempo que media entre ponerse en contacto y separarse la superficie de la molécula chocante y la pared; ahora sólo hay que modificar esto: el tiempo $t''-t'$ será el que media entre el momento en que la molécula se acerca lo bastante á la pared para que la repulsión comience á hacerse sensible, y el momento en que dicha fuerza repulsiva deja de tener lugar.

Por lo demás, y antes de analizar otros detalles, diremos que hay inconsecuencia en esta teoría en admitir que los átomos se atraen para formar las moléculas, y una vez formadas éstas repelen á las otras.

Otras muchísimas teorías se han inventado para explicar los fenómenos que los gases presentan, las cuales no ofrecen novedad ni tienen importancia, aunque vienen á probar que la teoría de los gases es sin disputa el punto más vulnerable para penetrar en el gran secreto de la constitución interna de todos los cuerpos y de sus acciones moleculares, fin principal de la Física-Matemática, acerca de la cual tanto se ha escrito y de la cual tan poco se sabe.

26. M. G. A. Hirn viene desde hace años consagrado á grandes y delicados trabajos de comprobación experimental de todos los resultados analíticos de las teorías cinéticas, y dando cuenta de sus investigaciones á la Academia Real de Ciencias de Bélgica, en una serie de memorias interesantísimas (*) que no dudamos en recomendar á los

(*) Recherches sur les Lois de l'Ecoulement et du Choc des Gaz.—1886.
L'Avenir du Dynamisme dans les Sciences Physiques.—1886.
Recherches sur la Limite de la Vitesse que prend un Gaz, quand il passe d'une pression á une autre plus faible.—1885.
La notion de Force dans les Sciences Physiques, 1885.
Analyse élémentaire de l'Univers.—1868; y otras muchas.

aficionados, y de las cuales vamos á entresacar aquellos principales hechos que se hallan en contradicción con los resultados analíticos de las teorías cinéticas, exponiéndolos de modo que, sin grandes esfuerzos, puedan ser comprendidos por los jóvenes amantes de estos estudios para quienes escribimos estos apuntes. Conviene advertir, ante todo, que M. Hirn considera como *cinéticas* todas aquellas teorías que, aun admitiendo la fuerza entre los átomos y moléculas gaseosas, suponen, que éstas quedan libres é independientes á poco que aumente la distancia de sus centros de gravedad. A todas estas hipótesis se les puede aplicar la objeción sentada más arriba respecto á la propagación de los movimientos vibratorios, principalmente la tocante á la velocidad del sonido, y á todas ellas hace referencia cuanto vamos á decir.

CECILIO JIMÉNEZ RUEDA.

(Se concluirá.)

COMPARAISON DES SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES D'UN MÊME PROBLÈME

PAR M. E. LEMOINE

Dans ce Journal (1892 page 177) j'ai donné la comparaison de la simplicité de deux solutions d'un même problème de Steiner, l'une d'elles donnée par M. Ventura Reyes Prósper (voir, 1892, p. 147), l'autre par moi *(Journ. de Mathém. élém.*, de M. de Longchamps, 1883, page 267). J'avais trouvé pour la 1.re le symbole:

$$op.: (8R_1 + 4R_2 + 7C_1 + C_2 + 6C_3)$$

simplicité: 26; exactitude: 16; 4 droites, 6 cercles.

Pour la seconde

$$op.: (18R_1 + 9R_2 + 13C_1 + 12C_3)$$

simplicité: 52; exactitude: 31; 9 droites, 12 cercles.

Dans le numéro de Décembre 1892, p. 345, M. Retali indique trois autres solutions du même problème.

Je vais aussi établir les symboles de ces nouvelles solutions en me reportant aux notations et aux figures de l'article de M. Retali.

1.re solution. De A (fig. 1) j'abaisse sur la droite r une perpendiculaire qui coupe en E la circonférence ABC

$$op.: (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$$

je prends sur la circonférence ABC, *arc* AE = *arc* CD, EAD étant du même coté de BC *op.:* $(3C_1 + C_3)$

D est le point cherché obtenu par *op.:* $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_3)$

simplicité: 13; exactitude: 8; 1 droite, 4 cercles.

2^me solution. Je mène par A (fig. 2) une parallèle AMO à BC en prenant sur le cercle ABC, *arc* CA = *arc* BA, A et M étant du même coté de CB *op.:* $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3)$.

Je mène une perpendiculaire quelconque à la droite donnée r. Pour cela je décris un cercle quelconque *op.:* (C_3) qui coupe cette droite donnée en deux points, et j'élève une perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points *op.:* $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Cette perpendiculaire QO coupe CA en Q.

Je prends sur CB, le point P tel que AO et BP soient équipollents *op.:* $(3C_1 + C_3)$. Je joins PQ, *op.:* $(2R_1 + R_2)$, qui coupe AB en R.

Le tracé d'un seul, des cercles circonscrits AQR, BRP, CPQ est nécessaire, soit BPR, je le trace par le symbole (*)

$$op.: (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$$

de sorte que D se trouve placé par:

$$op.: (10R_1 + 5R_2 + 13C_1 + 9C_3)$$

simplicité: 37; exactitude: 23; 5 droites, 9 cercles.

3.^me solution. Je construis (fig. 3) l'orthocentre Ω de ABC

$$op.: (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 3C_3)$$

par Ω je mène une parallèle à la droite r en faisant passer par Ω un cercle quelconque qui coupe la droite r etc. (Voir Congrès de Pau loco citato) *op.:* $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Je mène par Q, la droite QO perpendiculaire à r

$$op.: (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$$

et par A, AO parallèle à CB *op.:* $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$

Je prends P tel que BP soit équipollent à AO *op.:* $(3C_1 + C_3)$; je joins PQ *op.:* $(2R_1 + R_2)$; je prends O_1 tel que AO_1 soit équipollent à BP_1 *op.:* $(3C_1 + C_2)$.

Par O_1 je mène la perpendiculaire à r *op.:* $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$ je trace P_1Q_1 *op.:* $(2R_1 + R_2)$

je trace CE et PQ_1 *op.:* $(4R_1 + 2R_2)$ qui se coupent en D que j'obtiens

(*) Voir Mémoire du Congrès de Pau, 1892. Association française pour l'avancement des sciences.

ainsi par le symbole $op.: (20R_1 + 10R_2 + 26C_1 + 15C_3)$, simplicité: 71; exactitude: 46; 10 droites, 15 cercles.

Résumé: La plus simple de beaucoup est la 1.^{re} solution de monsieur Retali $op.: (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_3)$; simplicité: 13; exactitude: 8; 1 droite, 4 cercles.

Ensuite celle de M. Ventura Reyes Prósper

$$op.: (8R_1 + 4R_2 + 7C_1 + C_2 + 6C_3)$$

Simplicité: 26; exactitude: 16; 4 droites, 6 cercles.

Ensuite la seconde de M. Retali $op.: (10R_1 + 5R_2 + 13C_1 + 9C_3)$; Simplicité: 37; exactitude: 23; 5 droites, 9 cercles.

Puis la mienne $op.: (18R_1 + 9R_2 + 13C_1 + 12C_3)$; simplicité: 52; exactitude: 31; 9 droites, 12 cercles.

Enfin, la plus compliquée est la 3.^{me} de M. Retali.

$$op.: (20R_1 + 10R_2 + 26C_1 + 15C_3)$$

Simplicité: 71; exactitude, 46; 10 droites, 15 cercles.

Cette dernière solution ne suppose pas que le cercle ABC soit tracé sur la figure donnée, mais en le traçant s'il ne l'était pas et employant, même la plus compliquée des premières solutions, le résultat serait plus simple qu'en exécutant cette dernière.

REVISTA BIBLIOGRÁFICA

Cours de Mathématiques spéciales.—Supplément comprenant la Trigonométrie et la mécanique, par M. G. de Longchamps. 3.^{me} edition, 1893.

Al dar cuenta de la *Géometrie analytique* del mismo autor en el tomo 2.º de El Progreso Matemático terminábamos haciendo breves indicaciones sobre la segunda edición del *suplemento* que contenía algunas teorías complementarias del *Tratado de Algebra*, y que en la edición tercera han sido sustituídas por otras concernientes á la Trigonometría y la Mecánica.

Este último tomo del curso de Matemáticas, que el Sr. de Longchamps acaba de publicar, es un resumen de los conceptos más capitales y de mayor aplicación que constituyen cada una de las teorías en él expuestas.

En la Trigonometría hay que notar desde luego el modo general de establecer las proposiciones fundamentales, fundado en los principios de las proyecciones, cuya fórmula general expresa en la forma simbólica siguiente:

$$\overline{OA}\,.\,\overline{OB} = (\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + .. + \overline{\alpha}_n)(\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 + .. + \overline{\beta}_p)$$

que se refiere á las proyecciones de dos contornos y sus resultantes respectivas OA y OB sobre dos ejes OY y OX, siendo un caso particular el de la fórmula fundamental para la *adición de arcos* que se establece inmediatamente, así como más adelante la fórmula fundamental de la trigonometría esférica.

A continuación de la *división de arcos* y el *uso de las tablas trigonométricas* trata el autor de las *ecuaciones binomias* y de la *trigonometría esférica.*

Bajo el epígrafe general de *Los infinitamente pequeños* se exponen las nociones de *Geometría cinemática,* partiendo del teorema de Chasles que indica el modo de hacer coincidir dos figuras iguales situadas en un plano, mediante un giro alrededor del centro instantáneo de rotación, pasando enseguida al *método de las normales.*

Los infinitamente pequeños geométricos. – El círculo de curvatura. – El trazado de las tangentes. – Las curvas paralelas. – Las concoidales. — Las diametrales. — Las cúbicas unicursales. — La trisectriz de Mac-Laurin. – El tridente de Newton. – Los puntos múltiples, son las materias tratadas en esta parte de la obra, á las que siguen: la *noción de la integral definida* y *las cuadraturas.*

Las coordenadas trilineales y coordenadas baricéntricas, de las que hace algunas aplicaciones al establecimiento de varias fórmulas de la *Geometría reciente* (puntos de Gergonne, Lemoine, Brocard, rectas y círculos notables, etc.), las coordenadas tangenciales y la intersección de dos cuádricas, son capítulos que constituyen un importante complemento á la Geometría analítica del mismo autor, de que ya se dió cuenta en este periódico.

La última parte de la obra (de la página 237 á la 457) está destinada á la mecánica, que comprende:

Cinemática del punto. – Fórmulas preliminares. — Las primeras definiciones; el movimiento uniforme. — Movimiento uniformemente variado, movimiento variado cualquiera, aceleración. — Aplicación de la cinemática; el trazado de las tangentes; el método de Roberval.

Dinámica del punto material. — Las fuerzas. — La masa. — Composición y descomposición de fuerzas. — El trabajo y la fuerza viva.

Estática del sólido invariable libre. — Composición y equilibrio de las fuerzas; momentos con relación á un plano. — El centro de gravedad. — Los momentos. — Los pares. — La reducción de fuerzas. — Homogeneidad de las fórmulas.— Ejercicios diversos.— Cuestiones propuestas en diversos concursos.

Nada diremos nuevo á nuestros lectores al consignar que una vez más ha dado M. Longchamps muestra de su talento y profundo saber, así como de su buen gusto y acierto al exponer en la breve extensión de 457 páginas tan variados asuntos, de manera que no dejen por un momento de tener grandes atractivos para el lector, ya en cuanto á la materia, ya en cuanto á la forma original de ser desarrollados, en conformidad con el carácter dominante en el conjunto de sus numerosos tratados didácticos.

Periodico di Matematica.— Esta revista de que es director el profesor del R. Instituto Técnico de Roma Sr. Lugli, ha publicado durante este año, entre otros, los siguientes artículos:

Besso. Sopra un opúsculo de Michelangelo Ricci.— *Betazzi.* Sulla definizione della linea retta.— *Bellacchi.* A proposito di un lavoro sulla storia delle matematiche.—*Giudice.* Una formola di trasformazione per *arc. tg.*—*Ferrari.* Distanze di punti notevoli del triangolo; y además varias cuestiones resueltas.

Rivista di Matematica. — Además de una extensa colección de formulas, según el simbolismo de la lógica matemática, se publican en esta *Revista*, entre otros, los siguientes artículos:

Peano. Formule di cuadratura.—*Porta.* Sulle equazioni di Lagrange per il moto di un punto.— *Castellano.* Alcuna proprietá delle accelerazioni d'ordine qualunque nel moto di una figura piana nel suo piano.—*Pirondini.* In torno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio.—*Pietri.* Sui sistemi lineari di coni.

Bibliotheca matematica. — Zur Geschichte der Trigonometrie, von *H. Suter.* — Sur les découvertes mathématiques de Wronski, par *S. Dickstein.*— Intorno ad una pretesa seconda edizione dell'Algebra di Rafael Bombelli, nota di *Antonio Favaro.* — Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus, von *H. Weissenborn.*

American Journal of Mathematics, núm. I. 1893.— Sumario: On Symmetric Functions and Seminvariant, by prof. Cayley.—Tables on pure Reciprocants to the Weight 8, by prof. Cayley.— On the Differential Equation $\Delta u + K^2 u = 0$, by Maxime Bôcher.— Geometrical Illustrations of some Theorems in Number, by Ellery W. Davis.

CUESTIONES RESUELTAS

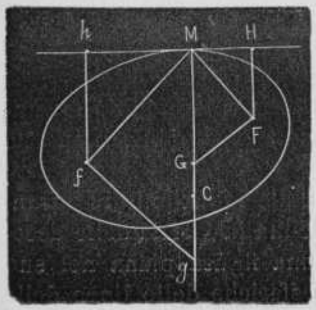
Cuestión 65 (Véase t. II, pág. 215).

En toda cónica, un punto cualquiera M, *el centro de curvatura correspondiente y los puntos de intersección de la normal en* M, *con las perpendiculares* FG, fg *trazadas desde los focos* F, f *á los radios vectores* FM, fM *son conjugados armónicos.*

(N. C. M.)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Designemos con H y h los pies de las perpendiculares bajadas sobre la tangente á la elipse en M, desde los focos F y f; con r y r' los radios vectores focales MF y Mf; con C el centro del círculo osculador en M.



Siendo semejantes los triángulos MFG y Mfg, se tiene

$$(1) \qquad \frac{MG}{Mg} = \frac{r}{r'},$$

y de los otros dos pares de triángulos semejantes MFH, MFG y Mfh, Mfg se deduce

$$r^2 = MG \cdot FH, \quad r'^2 = Mg \cdot fh$$

Multiplicando éstas, miembro á miembro, y observando que por un teorema conocido se tiene FH . $fh = b^2$, tenemos

$$(2) \qquad MG \cdot Mg = \frac{r^2 \cdot r'^2}{b^2}$$

De esta ecuación y la (1) resulta

$$\overline{MG}^2 = \frac{r^3 r'}{b^2}, \qquad \overline{Mg}^2 = \frac{r r'^3}{b^2},$$

y por consiguiente:

$$\frac{1}{\mathrm{MG}}+\frac{1}{\mathrm{M}g}=\frac{b}{\sqrt{rr'}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

ó sea, porque $r+r'=2a$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{MG}}+\frac{1}{\mathrm{M}g}\right)=\frac{ab}{(rr')^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

El radio de curvatura de la elipse en el punto M tiene por expresión

$$\mathrm{MC}=\frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab} \tag{4}$$

de donde

$$\frac{1}{\mathrm{MC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{MG}}+\frac{1}{\mathrm{M}g}\right),$$

ó sea, el punto C es conjugado armónico de M respecto á los dos puntos G y g.

La fórmula (3) está dada sin demostración en el *Calcolo differenziale* de *Todhunter-Battaglini* (pág. 349. Es. 33) y se puede obtener del modo siguiente:

De la conocida relación

$$rr'=a^2-e^2x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2$$

se deduce sucesivamente $\qquad a^2b^2 . rr'=a^4y^2+b^4x^2,$

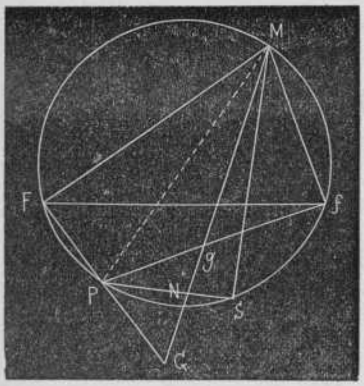
$$\frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\mathrm{MC},$$

siendo el segundo miembro una expresión conocida del radio de curvatura de la elipse en el punto (x, y).

Solución á la *Cuestión 65*, por el Sr. Sollertinsky (B).

Sea J la intersección de las tangentes á la cónica en los puntos M, M'.

Se puede demostrar elementalmente que la cuerda común JJ' de las circunferencias JMM' y JFf es la simediana común de los triángulos JMM', JFf', y que, por consiguiente, la intersección N de las normales en M y M' se halla en la perpendicular levantada en J' á JJ'.



En el límite, cuando M' se aproxima indefinidamente á M, el punto N se reduce al centro de curvatura en M, y la cuerda JJ' se convierte en la simediana MS del triángulo FMf.

Las rectas FG y fg concurren en el punto P, diametralmente opuesto á M en la circunferencia MFf, y siendo la recta SN perpendicular á MS, pasa también por P. Pero el haz P (MSFf) que se apoya en los vértices del cuadrángulo armónico, es también armónico; luego los puntos M, N y g, C son conjugados armónicos.

Cuestión 93 (Véase t. II, pág. 344)

Hallar el lugar de las proyecciones del centro de una elipse sobre las cuerdas comunes á esta elipse y á sus círculos osculadores.

(E. Lemoine).

Solución por el Sr. BROCARD (H.)

Esta cuestión se puede tratar de diversas maneras, según el sistema de coordenadas que se quiera emplear.

La más sencilla es, creemos, la que consiste en recurrir á la *anomalía excéntrica* φ.

Sea, pues, φ un ángulo tal, que el punto M de la elipse tenga por coordenadas

$$x=a\cos\varphi, \qquad y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

El círculo osculador pasa por dos puntos infinitamente próximos á M, á una y otra parte de este punto en la elipse, y encuentra á la elipse en un cuarto punto N.

En virtud de propiedades muy conocidas, la cuerda MN es simétrica de la tangente MT con respecto á una paralela á OX.

Pero la tangente en M tiene por coeficiente angular

$$-\frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{ó} \qquad -\frac{b}{a}\cot\varphi.$$

Luego la inclinación de MN es $\frac{b}{a}$ cot φ, y, por consiguiente, esta cuerda tiene por ecuación

$$y-b\,\text{sen}\,\varphi=\frac{b}{a}\cot\varphi\,[x-a\cos\varphi]$$

ó

$$\frac{x}{a}\cos\varphi-\frac{y}{b}\,\text{sen}\,\varphi=\cos 2\varphi.$$

La proyección del centro O tiene por ecuación

$$y=-x\,\frac{a}{b}\,\text{tg}\,\varphi.$$

De esto se deduce

$$\text{sen}\,\varphi=-\frac{by}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}},\quad \cos\varphi=\frac{ax}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}},$$

y, por consiguiente, el lugar (M) está representado por la ecuación de 6º grado

$$(x^2+y^2)\,(a^2x^2+b^2y^2)=(a^2x^2-b^2y^2)^2,$$

ó en coordenadas polares

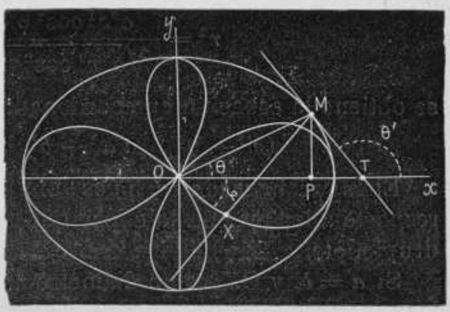
$$\rho^2=\frac{(a^2\cos^2\omega-b^2\,\text{sen}^2\,\omega)^2}{a^2\cos^2\omega+b^2\,\text{sen}^2\omega}$$

El lugar (M) es, pues, una especie de rosácea de cuatro ramas.

Nota. En el mismo orden de ideas entran otras cuestiones tratadas en los N. A. M. 1873. pp. 29-41.

Solución por el Sr. Retali (V).

Sea M un punto cualquiera de la elipse, MT su tangente en M, Mx la simétrica de MT respecto á la ordenada Mx (v. *Chasles, Sec. coniques,* p. 246).



Se trata, pues, de obtener el lugar de las proyecciones x del centro O sobre la recta Mx. La ecuación de la elipse en coordenadas polares es

$$(1)\quad \rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\,\text{sen}^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

Llamando θ' el ángulo formado por la tangente MT con el eje polar, y haciéndose $\angle \mathrm{TO}x = \varphi$, se tiene

$$\theta' = \varphi + \frac{\pi}{2}, \qquad tg\,\theta\, tg\,\theta' = -\frac{b^2}{a^2}$$

y por consiguiente,

$$tg\,\theta = \frac{b^2 \operatorname{sen} \varphi}{a^2 \cos \varphi}; \tag{2}$$

Tenemos también por la figura

$$0\mathrm{X} = r = \rho \cos(\theta + \varphi) \tag{3}$$

y eliminando ρ y θ entre las tres ecuaciones (1), (2) y (3), resultará la ecuación polar del lugar buscado. Si hacemos por brevedad

$$\Delta = \sqrt{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

se tiene, de la (2)

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b^2 \operatorname{sen} \varphi}{\Delta}, \qquad \cos \theta = \frac{a^2 \cos \varphi}{\Delta}$$

de donde

$$\cos(\varphi + \theta) = \frac{a^2 \cos^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\Delta}$$

$$\rho = \frac{\Delta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

y finalmente

$$r = \frac{a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \tag{4}$$

que es la ecuación polar del lugar buscado.

Escribiendo la (4) bajo la forma

$$r^2 = \frac{a^2 r^2 \cos^2 \varphi - b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{a^2 r^2 \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

se obtiene la ecuación en coordenadas rectangulares

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2) = (a^2 x^2 - b^2 y^2)^2.$$

El lugar buscado es, pues, una curva de sexto orden, simétrica respecto á los ejes de la elipse que tenía en el centro un punto cuádruplo, etc.

Si $a = b$, y OX es un diámetro arbitrario, se tiene que el lugar de las proyecciones (ortogonales) de un punto variable M de la circunferencia, sobre el diámetro simétrico de OM respecto á OX, está representado por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2),$$

y por esto la curva hallada anteriormente se reduce á la estudiada por Plücker, en la pág. 105-106 de su célebre obra *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der Geraden Linie als raumelement.*

Cuestión 81. (*Véase t. II, pág. 279*).

Suponiendo que m y n enteros y posiiivos, demostrar que

$$\frac{1}{m+1} + \frac{n}{m+2} + \frac{n(n+1)}{1.2(m+3)} + \ldots =$$

$$-\frac{2^n}{m+1} - \frac{u.2^{n-1}}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)2^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

(*J. J. Durán Loriga*).

Solución por el Sr. Vivanti, ingeniero.

Se puede escribir el primer miembro así:
$\frac{m+1}{1} F(m+1, \; -n, \; m+2, \; -1)$ donde F designa la serie hipergeométrica), más brevemente: $\frac{m+1}{1} \Phi(-1)$. Ahora:

$$x \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \alpha \left\{ F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) \right\}$$

y
$$F(\alpha, \beta, \alpha, x) = (1-x)^{-\beta};$$

luego
$$x \frac{d\Phi(x)}{dx} = (m+1) \left\{ (1-x)^n - \Phi(x) \right\}$$

é integrando, se obtiene

$$x^{m+1} \Phi(x) = \text{const.} + (m+1) \int x^m (1-x)^n dx,$$

de donde:

$$(-1)^{m+1} \Phi(-1) = (m+1) \int_0^{-1} x^m (1-x)^n dx =$$

$$= (m+1)(-1)^{m+1} \int_0^1 x^m (1+x)^n dx$$

ó bien:

$$\frac{1}{m+1}\,\Phi(-1)=\int_0^1 x^m(1+x)^n dx.$$

Integremos por partes y tendremos:

$$\int x^m(1+x)^n\,dx=\frac{(1+x^n)x^{m+1}}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int(1+x)^{n-1}\,x^{m+1}dx=\ldots\ldots$$

$$=\frac{(1+x)^n x^{m+1}}{m+1}-\frac{n}{m+1}\,\frac{(1+x)^{n-1}x^{m+2}}{m+2}+$$

$$+\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}+\frac{(1+x)^{n-2}x^{m+3}}{m+3}$$

$$-\ldots\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)(m+n)}\,\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1},$$

y en fin:

$$\int_0^1 x^m(1+x)^n dx=\frac{2^n}{m+1}-\frac{n.2^{n-1}}{(m+1)(m+2)}+\frac{n(n-1)2^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}\ldots\ldots,$$

que es el segundo miembro de la ecuación propuesta.

Solución por el Sr. Sollertinsky

Se tiene

$$\frac{1}{m+1}+\frac{n}{m+2}+\frac{n(n-1)}{1.2(m+3)}+\ldots\ldots$$

$$=\int_0^1 x^m+n\,x^{m+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\,x^{m+2}+\ldots\ldots)\,dx=\int_0^1 x^m(1+x)^n\,dx$$

Pero

$$\int_0^1 x^m(1+x)^n dx=\left(\frac{x^{m+1}(1+x)^n}{m+1}\right)_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1+x)^{n-1}dx$$

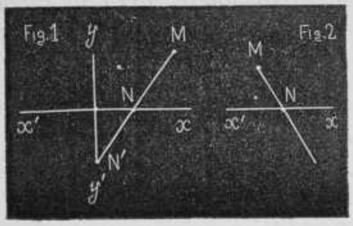
$$=\frac{2^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1+x)^{n-1}dx$$

Así

$$\int_0^1 x^m(1+x)^n dx=\frac{2^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\cdot\frac{2^{n-1}}{m+2}+\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\,\frac{2^{n-2}}{m+3}$$

Cuestión 112 (Véase t. III, pág. 72.)

Dados en dirección los ejes xCx', yCy' *de una cónica* Σ (fig. 1.ª) *y la normal* MNN' *á esta curva en un punto dado* M, *así como los puntos de intersección* N, N' *de esta normal con los ejes, determinar el centro* ρ *ó el radio de curvatura* ρM *en este punto* M, *no empleando más que dos rectas en la construcción:*

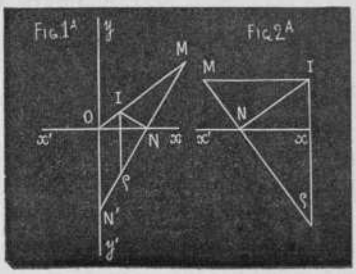


Resolver asimismo este problema en el caso particular en que el eje yCy' (fig. 2.ª) *y, por consiguiente, el punto* N *se halle en el infinito, es decir, cuando la cónica* (Σ) *se convierte en una parábola.*

(A. Schiappa Monteiro.)

Solución por el Sr. Brocard (H.)

La construcción pedida nos parece ser la que M. Mannheim ha dado á conocer como simplificación de los trazados expuestos en su artículo de los N. A. M. (1857, páginas 322-332).



1.º Unir OM.

2.º Trazar NI perpendicular á MNN' hasta su encuentro en I con OM.

El centro de curvatura ρ está en la intersección de MNN' con la paralela Iρ á Oy. (Véase también *Mannheim* Géométrie descriptive, pág. 175).

En el caso de la parábola, OM pasa á ser paralela á Ox. La misma construcción subsiste aparte de esta modificación.

Cuestión 95 (Véase t. II, pág. 344.)

Entre los números enteros de cuatro cifras sólo hay uno tal, que si se escribe á su derecha el número inmediatamente superior, se obtiene un número de ocho cifras, cuadrado perfecto. Hallar este número.

(H. Van Aubel.)

Solución por el Sr. Vivanti.

Designando por N el número buscado, debe ser: $10001\mathrm{N}+1=x^2$.

Las soluciones de la congruencia $x^2 \equiv 1$ (mód. 10001) son 1, 2191, 7810, 10.000; y el único de estos números cuyo cuadrado tenga 8 cifras es 7810. Su cuadrado es 60996100. Luego el número buscado es 6099.

Cuestión 111 (Véase t. III, pág. 72).

Sin escribir ecuación alguna ni trazar más que el cuarto de un dodecágono regular inscripto en un círculo, demostrar que el área de este polígono es igual á tres veces el cuadrado construído sobre el radio.

(*H. Brocard*).

Solución por el Sr. Vivanti (*)

Puesto que $\angle AOC = 60^o$, se tiene $AC = R$,

$$AE = \frac{1}{2}R, \quad \Delta AOB = \frac{1}{2} AE \, . \, OB = \frac{1}{4}R^2;$$

uego el área del dodecágono es $= 12 \, . \, \frac{1}{4} R^2 = 3R^2$.

Nota.—La misma solución ha sido remitida por *D. Cecilio Jiménez Rueda.*

CUESTIONES PROPUESTAS

114. Se dan tres ejes rectangulares y tres rectas fijas A, B, C. Un plano móvil P paralelo á xOy corta á las tres rectas en los puntos A', B', C'.

Se pide estudiar la superficie lugar de las circunferencias $A'\, B'\, C'$.

Se supondrán las rectas A, B situadas en planos paralelos á zOx, O, medio de la más corta distancia yOy' de estas rectas; Oz paralela á la bisectriz del ángulo AB de las dos rectas igual y simétricamente inclinadas sobre xOy. C en el plano zOx y paralelo á Oz.

Casos particulares y verificaciones.

(*H. Brocard*).

115. Sobre los tres lados de un triángulo $A_1\, A_2\, A_3$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_1$ é interiormente los triángulos equiláteros $A_1b_1A_2$, $A_2b_2A_3$, $A_3b_3A_1$; sean I_1, I_2, I_3, i_1, i_2, i_3 los centros de estos triángulos y *a, b, c,* S los tres lados y el área del triángulo $A_1A_2A_3$ (**). Demostrar que

$$I_1I_2I_3 = \frac{1}{2}S + \frac{a^2+b^2+c^2}{24}\sqrt{3}; \quad i_1i_2i_3 = \frac{1}{2}S - \frac{a^2+b^2+c^2}{24}\sqrt{3};$$

(*) La figura, que el lector puede suplir fácilmente, se reduce á un cuadrante AOD dividido en tres partes iguales por los radios OB, OC y la cuerda AC que corta perpendicularmente en E al radio OB.

(**) Se supone que las letras A_1, A_2, etc., vértices del triángulo $A_1A_2A_3$ y del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ se suceden en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj.

$$B_1B_2B_3 = \frac{5}{2} S + \frac{a^2+b^2+c^2}{8}\sqrt{3}; \quad b_1b_2b_3 = \frac{5}{2} S - \frac{a^2+{}^2b+c^2}{8}\sqrt{3};$$

(*H. Van Aubel.*)

116. Sobre los cuatro lados de un cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_4$, $A_4B_4A_1$, é interiormente los triángulos equiláteros $A_1b_1A_2$, $A_2b_2A_3$, $A_3b_3A_4$, $A_4b_4A_1$. Sean I_1, I_2, I_3, I_4, i_1, i_2, i_3, i_4 los centros de estos triángulos y f, g, S las diagonales y el área del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$:

1.° *a*) Si sobre B_2I_1, I_4B_3 se construyen los triángulos equiláteros B_1MI_1, I_4NB_3, la figura I_4I_1NM será un paralelogramo.— *b*) Construir el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ conociéndose los puntos I_1, B_2, B_3, b_4.

2.° *a*) Los puntos B_2, i_1, I_4 y el centro P del triángulo equilátero construído sobre B_2b_3 son los vértices de un paralelogramo.— *b*) Construir el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ conociéndose los puntos i_1, B_2, b_3, 2_4.

3.° La recta B_3b_4 es paralela á la altura i_2Q del triángulo equilátero construído sobre I_1i_2 é igual al doble de esta altura.— *b*) Construir el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ conociéndose los puntos B_1, i_1, B_3, b_4.

4.° Se tiene

$$I_1I_2I_3I_4 = \frac{1}{3} S + \frac{f^2+g^2}{12}\sqrt{3}; \quad i_1i_2i_3i_4 = \frac{1}{3} S + S - \frac{f^2+g^2}{12}\sqrt{3};$$

$$B_1B_2B_3B_4 = 2S + \frac{f^2+g^2}{4}\sqrt{3}; \quad b_1b_2b_3b_4 = 2S - \frac{f^2+g^2}{4}\sqrt{3}.$$

(*H. Van Aubel.*)

117. Sean I_1, I_2, i_1 i_2 los centros de los cuadrados construídos exterior é interiormente sobre los lados A_1A_2, A_2A_3 de un triángulo $A_1A_2A_3$ y P_1, p_1 los centros de los cuadrados construídos sobre I_1I_2. i_2i_1. Demostrar que la recta p_1P_1 es igual y perpendicular á A_1A_3, que pasa por el vértice A_2 y que se halla dividida en dos partes iguales.

Si se unen los cuatro vértices de un trapecio inscripto ABCD á un punto cualquiera M de la circunferencia, se tiene la relación

$$\frac{\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2}{\overline{MD}^2 - \overline{MC}^2} = \frac{AB}{CD}$$

(*H. Van Aubel.*)

118. Envolvente de la recta que une un punto A de una circunferencia á la proyección sobre un diámetro fijo, del punto A' diametralmente opuesto al primero.

(*H. Brocard.*)

119. Construir un triángulo, dado un vértice A y las proyecciones de este vértice sobre las bisectrices exteriores de los ángulos B y C.

(Juan J. Durán Loriga.)

120. Demostrar que para valores enteros cualesquiera de m y n, el número

$$N=2^n.10^{6m+n}\,(44^n.10^{8m+n}-2^n-11^n.10^{2m})+1$$

es divisible por 949.

(Juan J. Durán Loriga).

121. ¿A qué es igual la suma de las progresiones

$$1+2,\ 2+3+4,\ 3+4+5+6,\ldots\ n+\overline{n+1}+\overline{(n+2)}+\ldots+2n?$$

(E. Catalán.)

122. Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2+y^2=z^{2n}$$

(E. Catalán.)

123. Se da un curva (C) referida á dos ejes rectangulares OX, OY. Se traza la tangente en un punto A de la curva, que encuentra á OY en B, después se toma sobre la tangente un segmento AM=AB.

Hallar la ecuación de la curva M derivada de la curva (C).

(H. Brocard.)

124. Si se prolongan los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC en longitudes CA_1, AB_1, BC_1, iguales á estos lados, y sobre las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se toman los puntos M, N, P tales que

$$\frac{AM}{AA_1}=\frac{BN}{BB_1}=\frac{CP}{CC_1}=\frac{1}{3},$$

los triángulos MNP y ABC serán iguales y tendrán el mismo centro de gravedad.

(H. Van Aubel.)

125. En un triedro SABC la cara BSC vale 90° y cada una de las demás 60°. Se toma sobre SA una lougitud arbitraria, y sobre las otras longitudes SB, SC iguales al mayor segmento de SA dividido en media y extrema razón.

Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

(J. M.)

ERRATAS.—Pág. 66, línea 8, léase β y β_a por B y B_a; en la pág. 70, línea 24, $\pm 2\sqrt{yz}$ por $\sqrt{yz}$. En la cuestión 103 léase: triángulo rectángulo.

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.