Año III Zaragoza 15 Febrero de 1893 Núm. 26

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

LA LÓGICA SIMBÓLICA EN ITALIA

POR D. VENTURA REYES PRÓSPER CATEDRÁTICO DEL INSTITUTO DE CUENCA

Dos tendencias bien manifiestas se observan en nuestra hermana nación Italia, á propósito de tan bella como importante ciencia.

Dos son también los matemáticos que sostienen estas diferentes direcciones. De una parte el Sr. Peano ilustre profesor en la Universidad de Turín, acepta sin pararse en discutirlos los principios fundamentales del *calculus ratiocinator*, poco más ó menos tal como Peirce ó Mac-Coll los exponen, apresurándose en seguida á aplicarlos al tecnicismo matemático, dando los medios de crear un lenguaje universal, expedito y racional, para uso de los matemáticos. No se para mucho en el exámen del instrumento que emplea, sabe que es seguro y eficaz, y sólo se ocupa en utilizarlo. Dos áureos libritos han sido, especialmente, el fruto de sus profundos estudios: *Arithmetices principia nova methodo exposita* se titula el uno: *Principi di geometria logicamente esposti,* lleva el otro por encabezamiento, Ambos han sido publicados en Turín, 1889. Con auxilio tan poderoso como la Lógica exacta, desmenuza pacientemente las hipótesis y operaciones, llevando una luz vivísima á los fundamentos de la aritmética y de la geometría. Continúa sus sabias investigaciones con el mayor fruto en su preciosa *Rivista di Matematica* dedicada en especial al esclarecimiento de los principios de las Ciencias exactas.

Pero, por grande que sea el mérito de las publicaciones del señor Peano, tienen un inconveniente que no las hace adaptar para la completa difusión de la Lógica Baltimoreana. Se dirigen á un público acostumbrado de antemano al raciocinio tranquilo y desapasionado, público entusiasta del lema de Gauss, *pauca sed matura*. Queremos indicar que se dirigen á los matemáticos. Pero existe otro público habituado á la pasión y al apresuramiento. Este es el de los que hoy se llaman filósofos. Tales gentes necesitan que se les conquiste poco á poco para las nuevas doctrinas por las cuales hoy no pueden sentir ningún amor. Parte de ellos se dedica á la Psicología experimental, parte á la Metafísica más abstracta y laberíntica. Es, pues, lo más probable que poquísimos de ellos estén contentos de sujetarse al férreo yugo de una ciencia tan encadenada y rigurosa como la de las matemáticas, donde queda poco espacio para las suposiciones, divergencias y espíritu de partido. Creo que el reconciliar á este público con la Lógica simbólica, será obra principalmente de mi sabio amigo el Dr. Nagy profesor en el Liceo Mancinelli de Velletri (Roma), y ventajosamente conocido en la ciencia. Aunque de procedencia húngara, como indica su apellido, es, sin embargo, un italiano bien amante de su nación. Me parece que es el primer matemático de Italia que se haya ocupado de Lógica exacta, ya que desde muy temprano se empezó á apasionar por ella con ocasión de estudiar en el gimnasio de Zara, continuando luego su carrera en la Universidad de Viena, donde escogió como tema de su tesis doctoral el siguiente: *Ueber Anwendungen der Mathematik auf die Logik.*

Los principales resultados consignados en esta hermosa é interesantísima memoria en que se ponen de manifiesto los grandes conocimientos matemáticos y filosóficos de su autor, no menos que su profunda erudición, han sido después consignados también en sus *Fondamenti del calcolo logico,* publicados en el *Giornale di Matematiche* del Sr. Battaglini. Curiosas son en extremo también dos notas suyas, publicadas en las actas de la Academia dei Lincei y referentes á las representaciones gráficas en la Lógica, asunto que había sido poco estudiado aún. El Sr. Nagy no posee solamente las matemáticas y la Lógica, conoce perfectamente además la Historia de la Filosofía, y esperamos como un acontecimiento la publicación de sus trabajos acerca de la Filosofía entre los orientales. Varios artículos lleva también publicados en la *Rivista di Filosofía Italiana,* uno de ellos referente á la Geometría Euclídea. Pero especialmente es de notar su última obra que la casa editorial Loescher ha publicado en Turin. Me refiero á sus *Principi di Logica esposti secondo le dottrina moderne,* de que ya se ha ocupado en este periódico mi ilustrado y querido amigo el Sr. Galdeano. Sólo diré que el autor procurará hacerse perdonar de los filósofos de su país el haber introducido en su libro la Lógica matemática, dando en cambio cierta extensión á la historia de la Lógica entre los griegos y latinos, y haciendo alarde de sus envidiables conocimientos y aptitudes.

Deseamos, para terminar, que al lado de los Sres. Nagy y Peano se coloque resueltamente la opinión ilustrada de su país, y que la obra de los sabios ingleses y alemanes, la Lógica Baltimoreana, arraigue en la patria de los césares y de los mártires.

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

CONTINUACIÓN (Véase págs. 195-207)

Respecto á los lemas y porismas dependientes de la involución en el cuadrilátero (cuyo caso más general está expresado en el lema IV), basta ver cómo se pasa de unos á otros, haciendo pasar por todas las posiciones posibles la transversal, ya llegando á ser paralela á uno de sus lados ó diagonales del cuadrilátero, ya pasando por uno ó dos de sus vértices etc.

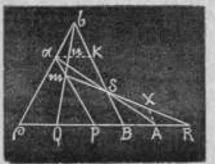


Fig. 12

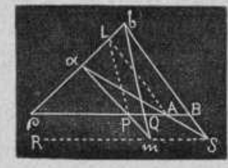


Fig. 13

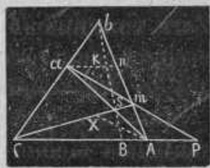


Fig. 14

Así, de la figura 12 se pasa á las siguientes. En la 13 los puntos S, m están en línea recta con el R llevado al infinito. En la 14 la transversal coincide con una de las diagonales del cuadrilátero, reduciéndose la relación anarmónica al caso de la armónica en el cuadrilátero completo. La figura 15 es el caso de la anterior en que el punto ρ está en el infinito, y por consiguiente R en el punto medio de AB. (En estos dos últimos casos los vértices ρ y A, ó A y B de cada figura son dos puntos dobles de la involución) (**).

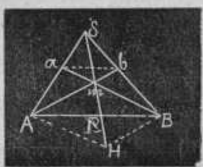


Fig. 15

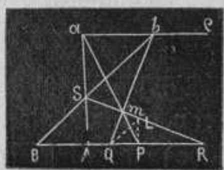


Fig. 16

Además una simple alteración en la forma del enunciado de los

(**) Siendo $a = a'$, y $b = b'$, la relación de involución
$$ab \, . \, a'c \, . \, b'c' + a'b' \, . \, ac' \, . \, bc = 0$$
se reduce á la armónica
$$ac \, . \, bc' + ac' \, . \, bc = 0 \quad ó \quad \frac{ac}{ac'} : \frac{bc}{bc'} = -1$$

lemas conduce fácilmente á concluír y enunciar los *diez casos de la proposición de las cuatro rectas,* pues en las figuras 13, 14, 16 pueden considerarse las tres rectas, aA, aP, $a\rho$ concurrentes en a, y el triángulo bmS móvil de manera que los vértices S, m, b recorran aquellas

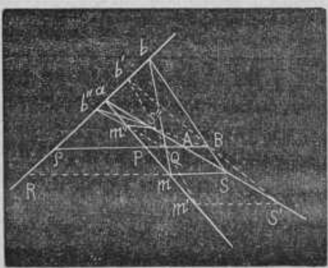


Fig. 17

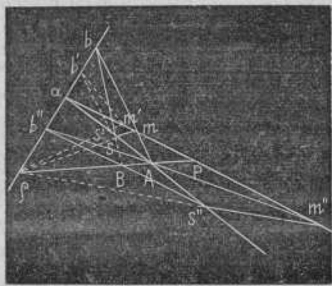


Fig. 18

rectas, respectivamente, mientras sus lados Sb y bm giran alrededor de los polos B y Q. Entonces *(tesis)* Sm girará alrededor de R (que es lo mismo que decir: *estarán en línea recta*).

Hecha esta modificación en los enunciados, se ve como los porismas III, IV, IX, X (*) y más generalmente, la proposición: *Si alrededor*

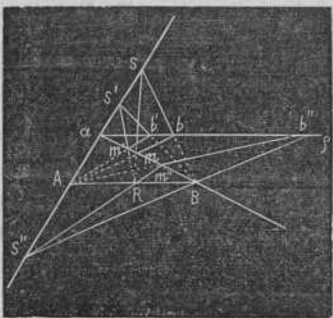


Fig. 19

de un punto ρ *se hace girar una transversal* ρab *que encuentra á dos rectas fijas* SA, SB *en dos puntos* a, b, *y desde dos puntos fijos* P, Q, *en línea recta con* ρ *se trazan las rectas* Pa, Qb *á aquéllos; el punto de intersección de éstas describirá una recta que pasa por el punto de encuentro* S *de las rectas fijas* (teorema que se extiende á n rectas concurrentes en un punto y á un polígono de n lados, cuyo n^{simo} vértice recorrerá una n^{sima} recta concurente con aquéllas), dependen del concepto de la relación anarmónica.

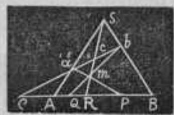


Fig. 20

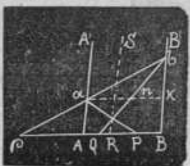


Fig. 21

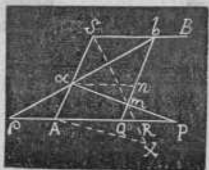


Fig 22

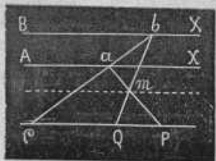


Fig. 23

(*) Véase *Les trois livres* etc, (pág. 101 á 110).

Análogamente la consideración del lema III, fundamental (pues expresa la propiedad perspectiva de puntos en relación anarmónica y los X, XI, XIV, XVI y XIX de Pappus (casos particulares de aquél) así como los porismas dependientes ó relativos á los mismos, son proposiciones que se reducen al principio fundamental de la teoría de series homográficas.

Citaremos, para terminar, el

Porisma III *Dadas dos rectas paralelas* AA′, BB′ *y tres puntos* ρ, P, Q *situados en línea recta; si alrededor del punto* ρ *se hace girar una transversal que encuentra á las dos rectas en* a *y en* b, *y se trazan las rectas* P*a*, Q*b* *que se cortan en* m: *este punto* m *se halla en una recta dada en posición.*

Es fácil ver que este porisma es una consecuencia del lema III. En efecto, si se traza por *m* una paralela á las dos rectas AA′, BB′, que encuentra á PQ en R (fig. 21) y á la transversal ρ*ab* en *c*, se tiene, según dicho lema, aplicado á las tres rectas *m*Q, *m*R *m*P cortadas por las dos rectas ρPQ, ρ*ab*,

$$\frac{\rho P}{\rho R} : \frac{QP}{QR} = \frac{\rho a}{\rho c} : \frac{ba}{bc},$$

y á causa de las paralelas, el segundo miembro es igual á

$$\frac{\rho A}{\rho R} : \frac{BA}{BR};$$

luego $$\frac{\rho P}{\rho R} : \frac{QP}{QR} = \frac{\rho A}{\rho R} : \frac{BA}{BR} \quad \text{ó} \quad \frac{QR}{BR} = \frac{\rho A.\, QP}{\rho P.\, BA}$$

lo que prueba que el punto R es independiente de la dirección de la transversal ρ*ab*.

26. *Metodo ad absurdum.* – Aunque este método puede considerarse como análisis, conforme dijimos en la página 48 (*) es en rigor método sintético, pues su objeto inmediato es deducir una verdad incluída en otra verdad admitida, como vamos á ver. Es un método demostrativo indirecto que consiste en negar lo falso para llegar á la afirmación de lo verdadero. Niega lo contrario de una proposición que se trata de establecer, para concluír afirmando la verdad de ésta.

27. Este método consiste en probar que es falsa la proposición contradictoria de una dada, y admitir por consiguiente ésta como

(*) Tomo II.

verdadera; porque es evidente que lo contrario ó contradictorio de lo falso es cierto.

Ejemplo: Si se ha demostrado ser falso, que dos ángulos contiguos y suplementarios no son adyacentes, quedará probado que son adyacentes.

Regla general. *Para demostrar por reducción al absurdo un teorema, se supone falsa la tesis, y si de esta suposición resulta una proposición contraria á alguna definición admitida, á alguna verdad demostrada, ó á la hipótesis del teorema propuesto, se debe desechar dicha tesis contraria á la supuesta, y admitir por consiguiente ésta, es decir, el teorema propuesto, que resulta demostrado.*

28. Tres casos ocurren en la demostración ad absurdum: 1.º que el resultado de suponer falsa la tesis del teorema sea contradictorio á una *definición,* 2.º que sea contradictorio á una verdad conocida; y 3.º que sea contradictorio á la *hipótesis* del teorema propuesto.

29. Primer caso. Hay teoremas que son consecuencias de definiciones conocidas. Para demostrarlos, basta suponer que sucede lo contrario de lo afirmado en ellos, resultando una contradicción con lo definido.

Sea el teorema: *El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.* Para demostrarlo diremos:

Haciendo girar la semi-circunferencia inferior ABC sobre el diámetro hasta colocarse en el plano de la ADC, los puntos de la primera se confundirán con los de ésta; porque *si no se confundiesen,* resultaría que habría puntos desigualmente distantes del centro, lo cual es *contra la definición.*

30. Segundo caso. Hay teoremas referentes á propiedades, de las que sólo ocurre un caso (por ejemplo: por un punto no pasa más que una perpendicular y una paralela á otra recta). En virtud de esto, dada una proposición, queda probada por reducción al absurdo su recíproca.

Supongamos demostrado que: *Si dos rectas* A *y* B *son perpendiculares á otra* C, *serán paralelas,* y que: *Por un punto no se puede trazar á una recta mas que una paralela.*

Para demostrar el teorema (recíproco del 1.º): *Si dos rectas* A *y* B *son paralelas, y* A *es perpendicular á otra* C, *también lo será* B, fundándose en los anteriores, se dirá:

Si dos rectas A *y* B *son perpendiculares á otra* C, *serán paralelas,* y como por un punto cualquiera de la una no se puede trazar á la otra mas que una paralela, resulta que esta única paralela es también una de las perpendiculares A ó B; luego el recíproco es cierto, es decir, que: *Si* A *es perpendicular á* C, *y* B *es paralela á* A, *será también perpendicular á* C (*).

Supongamos demostrados los teoremas: *Si se traza una recta* MN *paralela al lado* AC *de un triángulo* ABC, *y que por consiguiente cortará á los otros dos, dividirá á éstos en partes proporcionales,* y que *entre dos puntos* B *y* C *de una recta sólo hay un punto que la divida en dos segmentos cuyas longitudes estén en una relación dada.*

Para demostrar el teorema recíproco del 1.°, fundándose en los dos enunciados, se dirá:

Si se traza una recta MN *paralelamente al lado* AC *de un triángulo, dividirá á los otros dos lados en partes proporcionales;* pero como desde el punto M no se puede trazar mas que una recta MN, que corte á la BC en dos segmentos BN y NC tales, que la relación de BN á NC sea igual á la relación constante $\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MA}}$, resulta que dicha recta y la paralela, que existe con la propiedad en cuestión, según el directo, son una misma; luego el recíproco es cierto, es decir, como el directo es cierto, y no hay más que un caso, el recíproco también lo es.

Vamos á ver ahora como una proposición está contenida en su *recíproca contraria.*

Supongamos demostrado el teorema: *Por un punto situado fuera de una recta, no se puede trazar mas que una perpendicular.*

Se demuestra por reducción al absurdo el recíproco de su contrario: *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas,* diciendo: si no fueran paralelas, se encontrarían, y habría desde el punto de encuentro dos perpendiculares á una recta, lo cual es absurdo (**).

Sea el teorema: *Si dos rectas forman con otra ángulos alternos-internos iguales, serán paralelas.*

El recíproco de su contrario es: *Si dos rectas no paralelas se cortan por otra, no formarán con ésta ángulos-alternos iguales,* el cual se demostrará ad absurdum, diciendo: si esta conclusión no fuese la verdadera, lo sería su contradictoria, y tendríamos la proposición: *Si dos rectas no paralelas se cortan por otra, formarán con ésta ángulos alter-*

(*) Los autores dicen: En efecto, B encontrará á C, porque si no, C le sería paralela, y por su punto de intersección con A habria dos paralelas á una recta, lo cual es absurdo. Encontrando B á C, le será además perpendicular, porque si no lo fuera, se podría trazar por el punto de encuentro una recta distinta de B perpendicular á C, que sería paralela á A, según el teorema directo, y por consiguiente, por dicho punto habría trazadas, esta recta y la B, paralelas á la A, lo cual es absurdo.

(**) Estos dos teoremas se pueden poner bajo esta forma:

Si una recta A *se perpendicular á otra* C, { *y una* B *encuentra á* A, *no será perpendicular á* C.
{ *y una* B *es perpendicular á* C, *no encontrará á* A.

nos-internos iguales; pero si forman ángulos alternos-internos iguales, son paralelas; luego tendremos finalmente que: *Dos rectas no paralelas son paralelas,* lo cual es absurdo (*).

31. Tercer caso. Sea una cuestión que comprende cuatro partes, es decir, los teoremas *directo-afirmativo, directo-negativo, recíproco-afirmativo y recíproco-negativo:* por ejemplo, la constituída por los cuatro teoremas:

(1).—Todo punto situado en la perpendicular levantada á una recta en su punto medio, equidista de sus extremos.

(2).—Todo punto situado fuera de la perpendicular levantada á una recta en su punto medio, dista desigualmente de sus extremos.

(3).—Todo punto que dista igualmente de los extremos de una recta, se halla en la perpendicular levantada de punto medio.

(4).—Todo punto que dista desigualmente de los extremos de una recta, se halla fuera de la perpendicular levantada en su punto medio.

O abreviadamente:

(1).—Si en	igual	(2).—Si fuera	desigual
(3).—Si igual	en	(4).—Si desigual	fuera

Enunciar uno de los teoremas (1) y (4), ó de los teoremas (2) y (3) es enunciar el otro, es decir, que los teoremas *directo-afirmativo* y *recíproco-negativo* son equivalentes entre sí, y lo mismo sucede con los teoremas *directo-negativo* y *recíproco-afirmativo;* son uno mismo expresado de distinta manera. Cada uno de estos teoremas es *equivalente ó sinónimo* del otro.

Se continuará. Z. G. de G.

INTRODUCTION AUX MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES DE H. GRASSMANN

par M. Victor Schlegel

Profeseur à l'Ecole Technique de Hagen i/W

(continuación)

Or on déduit de (26):

(46) $(x \mid e_1) = x_1 \; ; \quad (x \mid e_2) = x_2 \; ; \quad (x \mid e_3) = x_3,$

d'où, en regardant (44) et (45)

(*) El quedar incluído el recíproco del contrario en el directo, depende de que la tesis del *directo afirmativo* y la hipótesis del *recíproco negativo* son negación la una de la otra; y si se supone falsa la tesis del 1.º, se convierte en la hipótesis del 2.º, es decir, quedan dos proposiciones, negación la una de la otra, unidas por un mismo término medio, que conduce de la primera á la segunda, esto es, á un absurdo.

Lo mismo se dirá respecto al *recíproco afirmativo y directo negativo.*

(47) $\alpha x = (\alpha e_1)(x \mid e_1) + (\alpha e_2)(x \mid e_2) + (\alpha e_3)(x \mid e_3) = 0.$

d'autre part, en écrivant a au lieu de P et posant $\alpha = \mid a$, on peut déduire de l'équation

(7) $$P \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

l'équation:

(48) $$a = \mid a \equiv \alpha_1 \mid e_1 + \alpha_2 \mid e_2 + \alpha_3 \mid e_3.$$

Or α, étant une somme des multiples de trois segments de droites, représente de même un segment de droite.

Puis, en formant le produit extérieur αx et égalant ce produit à 0, on trouve:

(49) $$\alpha x = \alpha_1 (x \mid e_1) + \alpha_2 (x \mid e_2) + \alpha_3 (x \mid e_3) = 0$$

Enfin, en comparant (49) et (47), on obtient:

(50) $$\alpha e_1 = \alpha_1 \ , \quad \alpha_2 e_2 = \alpha_2 \ , \quad \alpha e_3 = \alpha_3$$

Substituons ces valeurs dans (45), alors nous aurons:

(51) $$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

ce qui est l'équation de la droite α en coordonnées homogènes.

On voit qu' étant donnée l'équation de la droite sous la forme (44) on en peut déduire l'équation (51) au moyen des substitutions (25) et (50).

14. Nous appelons *produit algébrique de deux* points e_1, e_2 le produit $e_1 e_2$ qui suit les lois ordinaires de la multiplication algébrique des nombres. Le produit $e_1 e_2$ es une quantité de 2^{me} degré et représente l'ensemble des deux points e_1, e_2 ou, si l'on veut, une courbe spéciale de 2^{me} *classe*. De même la puissance e_1^2 représente le double point e_1.

Recherchons alors ce que représente l'équation

(52) $$\alpha x^2 = 0,$$

formée analoguement à (44). Il faut n'oublier pas que α et x^2 sont liées par la multiplication extérieure.

En substituant la valeur (25) on trouve:

$$(53)\begin{cases} (\alpha e_1^2)\, x_1^2 + (\alpha e_2^2)\, x_2^2 + (\alpha e_3^2)\, x_3^2 \\ + 2\,(\alpha e_1 e_2)\, x_1 x_2 + 2\,(\alpha e_2 e_3)\, x_2 x_3 + 2\,(\alpha e_3 e_1)\, x_3 x_1 = 0, \end{cases}$$

ou, en substituant les valeurs (46):

$$(54)\left\{\begin{array}{l}(\alpha e_1^2)(x \mid e_1)^2+(\alpha e_2^2)(x \mid e_2)^2+(\alpha e_3^2)(x \mid e_3)^2 \\ +2(\alpha e_1 e_2)(x|e_1)(x|e_2)+2(\alpha e_2 e_3)(x|e_2)(x|e_3)+2(\alpha e_3 e_1)(x|e_3)(x|e_1)=0\end{array}\right.$$

Alors soit a une quantité de 2^{me} degré (courbe de 2^{me} *classe*), dérivée des six quantités

$$e_1^2, \quad e_2^2, \quad e_3^2, \quad e_1 e_2, \quad e_2 e_3, \quad e_3 e_1$$

au moyen de l'équation

$$(55) \quad a \equiv \alpha_{11} e_1^2+\alpha_{22} e_2^2+\alpha_{33} e_3^3+2\alpha_{12} e_1 e_2+2\alpha_{23} e_2 e_3+2\alpha_{31} e_3 e_1$$

On en déduit, en posant $\mid a=\alpha$:

$$(56) \quad \alpha=|a \equiv \alpha_{11}|e_1^2+\alpha_{22}|e_2^2+\alpha_{33}|e_3^2+2\alpha_{12}|e_1 e_2+2\alpha_{23}|e_2 e_3+2\alpha_{31}|e_3 e_1.$$

Pour aller plus loin il faut établir, par définition, l'équation:

$$(57) \qquad \mid e_p\ e_q=\mid e_p \mid e_q,$$

et, par conséquence

$$\mid e_p^2=(\mid e_p)^2,$$

ce qui veut dire que nous regardons comme supplément d'un produit algébrique le produit algébrique des suppléments de ses facteurs.

Alors le produit $\mid e_p \mid e_q$ représentel 'ensemble des deux segments de droite $\mid e_p$ et $\mid e_q$ (voir les formules (43), ou, si l'on veut, une courbe spéciale de 2^{me} *ordre*. De même $(\mid e_p)^2$ représente la double droite $\mid e_p$.

Donc α, étant une somme des multiples de 6 coniques, représente de même une conique.

Puis, en formant le produit extérieur αx^2 et égalant ce produit à 0, et en regardant que (selon la formule 57)

$$x^2 \mid e_p e_q=(x \mid e_p)(x \mid e_q)$$

on trouve:

$$(58)\left\{\begin{array}{l}\alpha x^2=\alpha_{11}(x \mid e_1)^2+\alpha_{22}(x \mid e_2)^2+\alpha_{33}(x \mid e_3)^2 \\ +2\alpha_{12}(x \mid e_1)(x \mid e_2)+2\alpha_{23}(x \mid e_2)(x \mid e_3) \times 2\alpha_{31}(x \mid e_3)(x \mid e_1)\end{array}\right.$$

Enfin, en comparant (58) et (54), on obtient:

$$(59)\left\{\begin{array}{l}\alpha e_1^2=\alpha_{11}, \quad \alpha e_2^2=\alpha_{22}, \quad \alpha e_3^2=\alpha_{33} \\ \alpha e_1 e_2=\alpha_{12}, \quad \alpha e_2 e_3=\alpha_{23}, \quad \alpha e_3 e_1=\alpha_{31}.\end{array}\right.$$

Substituons ces valeurs dans (53), alors nous aurons:

$$(60) \quad \alpha_{11} x_1^2+\alpha_{22} x_2^2+\alpha_{33} x_3^2+2\alpha_{12} x_1 x_2+2\alpha_{23} x_2 x_3+2\alpha_{31} x_3 x_1=0,$$

ce qui est l'équation de la conique α (courbe de 2^{me} ordre) en coordonnées homogénes.

On voit qu' étant donnée l'équation de la conique sous la forme (52) on en peut déduire l'équation (60) au moyen des substitutions (25) et (59).

En changeant partout, dans les numéros 13 et 14, les lettres grecques en letres latines consonnantes et vice versa, on trouve les résultats correspondants aux précédents par dualisme. Quant aux courbes, il faut changer la notion de l'ordre en celle de classe et vice versa.

On voit aussi immédiatement que les réflexions précédentes sont susceptibles à être étendues aux courbes de degré supérieur à 2 et aux surfaces.

15. L'expression

$$x \equiv e_1 + \lambda e_2 \tag{61}$$

représente, comme nous savons, tous les points de la droite $e_1 e_2$. Et si l'on a simultanément

$$\alpha x^2 = 0, \tag{52}$$

alors les équations (61) et (52) déterminent ensemble les deux points d'intersection de la conique α et de la droite $e_1 e_2$. En substituant (61) dans (52) on obtient:

$$\alpha e_1^2 + 2\lambda \alpha e_1 e_2 + \lambda^2 \alpha e_2^2 = 0. \tag{62}$$

Cette équation détermine les deux valeurs de λ qu'il faut substituer dans (61) pour obtenir ces points d'intersection. Soient λ_1, λ_2 ces valeurs et $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ les points correspondants. Ces points sont harmoniques par rapport à e_1 et e_2, si l'on a [voir (2) et (4)]

$$x^{(1)} \equiv e_1 + \lambda e_2,\ x^{(2)} \equiv e_1 - \lambda e_2, \tag{62a}$$

c'est-à-dire, si

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

d'où l'on tire, en regardant (62):

$$\alpha\, e_1 e_2 = 0,\ (\text{ou } \alpha_{12} = 0). \tag{63}$$

Donc l'équation (63) représente la condition sous laquelle la couple $e_1\, e_2$ est harmonique par rapport à la couple $x^{(1)}$, $x^{(2)}$.

Rappelons-nous la circonstance que le produit extérieur $\alpha\, e_1\, e_2$ se compose du facteur α et du produit algébrique $e_1\, e_2$; en outre, que tous les deux produits ont la qualité associative. Alors nous pouvons écrire le produit $\alpha\, e_1 e_2$ sous les formes $(\alpha\, e_1)\, e_2$ ou $(\alpha\, e_2)\, e_1$, où, par exemple le produit extérieur $(\alpha\, e_1)\, e_2$ se compose du produit extérieur $(\alpha\, e_2)$ et du facteur e_2.

Recherchons alors ce que représente l'expression αe_1.

On peut écrire l'équation (59)

$$\alpha e_1 e_2 = \alpha_{12}$$

sous la forme

$$(\alpha e_1)\, \frac{e_2}{\alpha_{12}} = 1, \qquad \text{ou } \alpha e_1 = \left| \frac{e_2}{\alpha_{12}} = \frac{1}{\alpha_{12}} \right| e_2 .$$

Donc αe_1 est à moins d'un facteur numérique, le supplément d'un point, c'est-à-dire, un segment de droite [voir les équations (43)].

Alors l'équation (63), écrite sous la forme $(\alpha e_1) e_2 = 0$, dit que le point e_2 est situé sur la droite αe_1.

De même, en général, l'équation

$$(64) \qquad \alpha y z = 0.$$

ou y et z son deux points quelconques, donnés dans le plan $e_1 e_1 e_3$, dit 1) que la couple y, z est harmonique par rapport aux points d'intersection de la droite yz et de la conique α, 2) que le point z est situé sur la droite αy.

Or, si le point y es fixe, il en est de même à l'égard de αy qui ne dépend que de la conique α et du point y. Et si, en outre, le point z est variable, la droite αy est son lieu géométrique, c'est-à-dire: *la droite* αy *est la polaire du point* y *par rapport à la conique* α. De même l'équation (64) confirme le fait connu que le point y est situé sur la droite αz.

16. Si l'on remplace e_1 par y, e_2 par z, les équations (62) et (62a) changent en

$$(65) \qquad \alpha y^2 + 2\lambda\, \alpha y + \lambda^2 \alpha z^2 = 0,$$

$$(65a) \qquad x^{(1)} \equiv y + \lambda z, \quad x^{(2)} \equiv y - \lambda z.$$

Mais en vertu de (64) l'équation (65) devient:

$$(66) \qquad \alpha y^2 + \lambda^2 \alpha z^2 = 0.$$

Or si l'on pose $\lambda = 0$, il résulte de (66) et (65a):

$$\alpha y^2 = 0; \quad x^{(1)} = x^{(2)} = y.$$

c'est-à-dire: Les points d'intersection de la sécante $x^{(1)} x^{(2)}$, tournant de l'un ou de l'autre côté autour du point z, coïncident avec le point y arrivé sur la courbe α. La sécante est devenue tangente, et la polaire de z passe par les points de contact des deux tangentes zy.

D'autre part on peut écrire les équations (65a) sous la forme:

$$(1+\lambda)\, x^{(1)} = y + \lambda z; \quad (1-\lambda)\, x^{(2)} = y - \lambda z,$$

d'où il s'ensuit, en posant encore $\lambda = 1$:

$$y = z = x^{(1)};$$

c'est-à-dire: Les points y et z, avancés tous les deux sur la droite fixe $x^{(1)} x^{(2)}$ jusqu'à la rencontre du point $x^{(1)}$, coïncident avec ce point, et leurs polaires avec la tangente à ce même point.

Donc, si le point x est situé sur la conique α, la tangente à ce point est αx.

17. Applications.— Retournons à l'exemple traité dans les numéros 8 y 9.— L'équation générale d'une conique $\alpha x^2 = 0$ change en (28), si l'on pose:

(67) $$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0; \quad \alpha_{12} = \alpha_3, \quad \alpha_{23} = \alpha_1, \quad \alpha_{31} = \alpha_2.$$

La tangente au point e_1 est αe_1, et son équation: $\alpha e_1 x = 0$, ou

$$\alpha e_1{}^2 x_1 + \alpha e_1 e_2 x_2 + \alpha e_1 e_3 x_3 = 0,$$

ou [(59) et (67)]

(68) $$\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 = 0, \quad \text{ou } \frac{x_2}{x_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 0.$$

D'autre part la même tangente, renfermant les points e_1 et x, est représentée par le produit

(69) $$(xe_1) \equiv x_2(e_2 e_1) + x_3(e_3 e_1) \equiv -\alpha_2(e_2 e_1) + \alpha_3(e_3 e_1).$$

Mais il résulte de (9)

(70) $$(A_1 e_2) \equiv \alpha_3(e_3 e_1) - \alpha_2(e_2 e_1).$$

Donc les droites (xe_1) et $(A_1 e_1)$ coïncident, et on a le théorème:

Les droites $A_1 e_1$, $A_2 e_2$, $A_3 e_3$ *sont tangentes de la conique (28) aux points correspondants* e_1, e_2, e_3.

Le point $P \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ se nomme *point charactéristique* de la conique $\alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_2 x_3 x_1 + \alpha_3 x_1 x_2 = 0$ (28).

Les tangentes $A_1 e_1$, $A_2 e_2$, $A_3 e_3$ forment un triangle dont on trouve les sommets M_1, M_2, M_3 en additionant les formules (9) deux à deux. Ainsi on obtient:

$$A_1 + A_2 \equiv \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2,$$

d'où:

(71) $$M_3 \equiv A_2 + \alpha_2 e_2 = \alpha_1 e_1 - A_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3;$$

puis:

De même: (72) $\begin{cases} M_3 + 2\alpha_3 e_3 \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \equiv P. \\ M_1 + 2\alpha_1 e_1 \equiv P; \quad M_2 + 2\alpha_2 e_2 \equiv P. \end{cases}$

Donc on a le théorème:

Si P *est le point charactéristique d'une conique par rapport à un triangle* $e_1e_2e_3$, *et* $M_1M_2M_3$ *le triangle formé par les tangentes aux points* e_1, e_2, e_3, *alors les droites joignant les sommets correspondants de ces deux triangles passent par le point* P.

18. Si, dans l'équation

(25) $$x \equiv x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

on pose

(73) $$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad \text{ou } x_3 = -x_1 - x_2,$$

alors, en substituant cette valeur dans (25) et posant

(74) $$(e_1 - e_3) = \varepsilon_2, \quad (e_2 - e_3) = \varepsilon_1,$$

on obtient:

(75) $$x \equiv x_1 \varepsilon_2 + x_2 \varepsilon_1 .$$

Cela veut dire: x est une distance ou un point situé à l'infini, et (73) est l'équation de ce point.

Soit

(76) $$\xi \equiv \xi_1 \mid e_1 + \xi_2 \mid e_2 + \xi_3 \mid e_3$$

l'équation d'une droite quelconque. Elle passe par le point infini x, si l'on a

(77) $$(x\xi) \equiv x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

d'où, en regardant (73)

(78) $$x_1 : x_2 : x_3 = (\xi_2 - \xi_3) : (\xi_3 - \xi_1) : (\xi_1 - \xi_2).$$

La droite ξ est le lieu géométrique du point x, si toutes les valeurs de x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation (78). Il faut donc qu'on aie

(79) $$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 .$$

Donc

(80) $$\xi \equiv \mid e_1 + \mid e_2 + \mid e_3$$

est l'expression de la droite infiniment éloignée, dont l'équation est:

(80*a*) $$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

19, En vertu des résultats précédents nous parvenons à trouver le centre de la conique susdite. En effet, si

(81) $$M \equiv \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$$

est d'abord un point quelconque, l'équation de la polaire de M est (64):

(82) $$\alpha M x = 0,$$

ou, en regardant (25) et (81):

$$\alpha(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3)(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = 0,$$

ou

(83) $$\alpha_{12}(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1) + \alpha_{23}(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2) + \alpha_{31}(\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3) = 0,$$

ou, en faisant usage des abréviations (67):

(84) $$(\alpha_2 \mu_3 + \alpha_3 \mu_2) x_1 + (\alpha_3 \mu_1 + \alpha_1 \mu_3) x_2 + (\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1) x_3 = 0,$$

Alors, pour que M soit le centre de la conique, il faut que la polaire correspondante soit la droite infiniment éloignée. Donc il faut poser dans l'équation de cette polaire (84), selon les conditions (77) et (79):

(85) $$\alpha_2 \mu_3 + \alpha_3 \mu_2 = \alpha_3 \mu_1 + \alpha_1 \mu_3 = \alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1 .$$

En posant

86 $$\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 = \lambda, \quad \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 = \mu, \quad \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = \nu,$$

on déduit de ces équations les suivantes:

(87) $$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \alpha_1 \lambda : \alpha_2 \mu : \alpha_3 \nu$$

Donc, en substituant ces valeurs dans (81), on obtient pour le centre de la conique l'expression:

(88) $$M \equiv \alpha_1 \lambda e_1 + \alpha_2 \mu e_2 + \alpha_3 \nu e_3 .$$

20. Pour dériver le même point M des points M_1, M_2, M_3, écrivons d'abord les équations (72) sous la forme:

$$\nu M_3 + 2\alpha_3 e_3 = \lambda M_1 + 2\alpha_1 e_1 = \mu M_2 + 2\alpha_2 e_2 = P.$$

Alors on peut en déduire les équations suivantes:

(89) $$\begin{cases} \lambda M_1 + \mu M_2 = 2\alpha_3 e_3 \\ \mu M_2 + \nu M_3 = 2\alpha_1 e_1 \\ \nu M_3 + \lambda M_1 = 2\alpha_2 e_2 . \end{cases}$$

Donc:

$$M \equiv \lambda(\mu M_2 + \nu M_3) + \mu(\nu M_3 + \lambda M_1) + \nu(\lambda M_1 + \mu M_2),$$

ou

$$(90) \quad M \equiv \lambda\mu(M_1 + M_2) + \mu\nu(M_2 + M_3) + \nu\lambda(M_3 + M_1).$$

Soient alors U_1, U_2, U_3 les centres des distances $M_2 - M_3$, $M_3 - M_1$, $M_1 - M_2$, de sorte que

$$(91) \quad M_1 + M_2 = 2U_3; \quad M_2 + M_3 = 2U_1; \quad M_3 + M_1 = 2U_2;$$

alors on a:

$$(92) \qquad M \equiv \mu\nu\, U_1 + \nu\lambda\, U_2 + \lambda\mu\, U_3$$

D'autre part, si V_1, V_2, V_3 sont les centres des distances $M_1 - e_1$ $M_2 - e_2$, $M_3 - e_3$, on a, en regardant (89):

$$2V_1 = M_1 + e_1 = M_1 + \frac{\mu M_2 + \nu M_3}{2\alpha_1}.$$

Mais on tire de (86):

$$2\alpha_1 = \mu + \nu;$$

donc

$$(93) \qquad 2(\mu + \nu)V_1 = (\mu + \nu)M_1 + \mu M_2 + \nu M_3$$

Or on obtient de (91).

$$(94) \quad M_1 = U_2 + U_3 - U_1, \; M_2 = U_3 + U_1 - U_2; \; M_3 = U_1 + U_2 - U_3.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans (93):

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mu + \nu)V_1 &= \nu U_2 + \mu U_3, \\ (\nu + \lambda)V_2 &= \lambda U_3 + \nu U_1, \\ (\lambda + \mu)V_3 &= \mu U_1 + \lambda U_2. \end{aligned} \right.$$

Multiplions ces équations resp. par λ, μ, ν et additionons aux deux membres resp: $\mu\nu U_1$, $\nu\lambda U_2$, $\lambda\mu U_3$.

Si nous posons encore:

$$(96) \qquad U \equiv \mu\nu U_1 + \lambda\nu U_2 + \lambda\mu U_3,$$

nous aurons:

$$(97) \quad U \equiv \mu\nu U_1 + \lambda(\mu + \nu)V_1 = \nu\lambda U_2 + \mu(\nu + \lambda)V_2$$
$$= \lambda\mu U_3 + \nu(\lambda + \mu)V_3,$$

ce qui fait voir que les droites U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3 passent par le même point U.

Enfin, en comparant les équations (92) et (96), on voit que les points U et M sont identiques. Donc on peut énoncer le théorème suivant.

Les droites que joignent, dans un triangle $(M_1M_2M_3)$, *les milieux* (V_1, V_2, V_3) *de trois transversales quelconques* $(M_1e_1, M_2e_2, M_3e_3,)$ *passant par le même point* (P) *avec les milieux* (U_1, U_2, U_3) *des arêtes correspondantes, passent par le centre de la conique qui a des points de contact avec les arêtes aux points extrêmes* (e_1, e_2, e_3) *des transversales.*

Les discussions précédentes n'embrassent qu'une partie des méthodes de Mr. Grassmann, toutes cohérentes entre elles et formant un système de recherche en géométrie et mécanique, joignant les avantages des méthodes analytiques et synthétiques.— Mais nous avons cru bon nous restreindre à ces discussions et applications, pour n'agrandir pas trop l'étendue de ce mémoire.

Extrait de Littérature.

1. H. Grassmann: Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Leipzig 1844, (2me édition 1873).

2. ——————: Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Gekrönte Preisschrift. Leipzig 1847.

3. ——————: Die Ausdehnungslehre, Vollstandig und in strenger Form bearbeitet. Leipzig 1862. (Épuisé; 2me édition projetée).

4. ——————: Divers mémoires dans «Crelle's Journal», Vol. 24, 25, 31, 36, 42, 44, 49, 52, 84.

5. ——————: Mémoires dans les «Mathematische Annalen». Vol. 7, 12.

6. ——————: Mémoires dans les «Nachrichten der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen» 1872.

---

7. V. Schlegel: Hermann Grasmann, sein Leben und seine Werke. Leipzig 1878.

8. Favaro: Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann (Bulletino di Bibliogr. e di storia d. scienze mat. Tom. XI).

9. (Plusieurs auteurs): Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathemat.—Physik. Arbeiten. (Math. Ann. Vol XIV).

---

10. Schlegel: Untersuchungen über eine Fläche 3° Ordnung. Berlin, Calvary 1871. (Programme d'école).

11. ———: System der Raumlehre, 2 vol. Leipzig 1872 et 1875.

12. ———: Ueber die mechanische Erzeugung von Curven. (Math. Ann. Vol. VI).

13. Clifford: Applications of Grassmann's extension Algebra. (American Journ. of Math. Vol. I).

14. Mehmke: Anwendung der Grasmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene. Dissertation Tübingen 1880.

15. Noth: Die Arithmetik der Lage. Leipzig 1882.

16. Lüroth: Grundriss der Mechanik. München 1881.

17. Schlegel: Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. (Bull. Soc. math. de France. X).

18. Hyde: Calculus of direction and position. Americ. Journ. VI).

19. Gibbs: Elements of vector analysis. New-Haven 1881-84.

20. Schlegel: Ueber neuere geometrische Methoden u. ihre Werwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. (Schloemilch Ztscher. Vol, XXIV).

21. Peano: Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Turin 1888.

22. Beman: A brief account of the essentiel features of Grassmann's extension Algebra (Anal. VIII).

23. Mahler: Einleitung in die Grassmann'sche Ausdehnungslehre 1884. Ulm. (Programme d'école).

24. Schendel: Grundzüge der Algebra nach Grassmann'schen Prinzipien. Halle 1885.

25. Caspary: Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. (Crelle Journal Vol XCII).

26. Carvallo: Exposition d'une méthode de M. Caspary, pour l'étude des courbes gauches. (Bull. Soc. math de France. Vol XV).

En outre nombreux mémoires dont les auteurs font usage des méthodes de H. Grassmann, surtout des Messieurs: Caspary, Mehmke, Roth, Sturm, Scott, Cox, Hyde, Buchheim, Gibbs, Schendel, Dingeldey, Fine, Study, H. Grassmann (cadet), Koelmel, Waelsch, Fritz, etc.

REVISTA BIBLIOGRÁFICA

Curso de analyse infinitesimal, por *F. Gomes Teixeira* (cálculo integral, 2.ª parte. Porto 1892).

Ya en el tomo I, páginas 115-119 de esta periódico se publicó una reseña sobre el *Cálculo diferencial* á que el Sr. Gomes Teixeira destina el primer tomo de su excelente obra, y el no haberse hecho lo mismo respecto al tomo II (*Cálculo integral*, 1.ª parte) dependió de que, agotada rápidamente la primera edición de éste, esperábamos la segunda, así como la segunda parte del cálculo integral, que se publicó el año pasado.

En toda la obra se conoce el dominio que su autor tiene de esta parte de la ciencia á que dedica constantemente su actividad en numerosas publicaciones de diversos países, y muchos puntos de vista y desarrollos originales, fruto de su investigación individual, como vimos ya al tratar del primer tomo, según hemos manifestado.

Los ocho capítulos de la 1.ª parte tratan sucesivamente de:—I. Las *integrales indefinidas* (funciones racionales, irracionales, integrales elípticas é hiperelípticas é integración de algunas funciones trascendentes).—II. *Integrales definidas* (métodos generales, valores medios, extensión al caso de las funciones discontinuas y de los límites infinitos, integración por series, diferenciación é integración de funciones definidas por integrales, integración de las diferenciales totales). —III. *Aplicaciones geométricas* (áreas de las figuras planas, cálculo aproximado de las integrales definidas, rectificación de las curvas, integrales duplas y volúmenes, áreas de las superficies curvas).—IV. *Aplicaciones analíticas de las integrales definidas* (aplicaciones al Algebra, aplicación á la teoría del número π, ídem al desarrollo de las funciones en serie.

En fin, los restantes capítulos tratan respectivamente de las integraciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden, de las de órdenes superiores al primero, de las de derivadas parciales, terminando con las aplicaciones geométricas á las curvas planas, en el espacio y á las superficies.

El tomo III (2.ª parte del cálculo integral) contiene las materias siguientes: Capítulo I. *Integración de las funciones de variables imaginarias.*— Capítulo II. *Integrales eulerianas; función* Γ (a).— Capítulo III. *Funciones elípticas.*— Capítulo IV. *Aplicaciones de la teoría de las funciones elípticas.*— Capítulo V. *Funciones multiformes.*— Capítulo VI. *Método de las variaciones.*

Entre los resultados propios del Sr. Gomes Teixeira citaremos Una demostración nueva de un importante teorema sobre la integral $\int f(x, \sqrt{y})\, dx$, una descomposición de la integral $\int e^{mx}(f(x)\, dx$, una simplificación notable del método de Imschenetsky, de que se ocupó también el sabio director de la Academia Politécnica de Oporto en el *Bulletin de la Société mathématique de France*, la generalización de un resultado de M. Apell acerca de la ecuación diferencial

$$(x-y)\,s - \alpha' p + \alpha q = 0$$

Esto en el tomo II; y en el III la reproducción de un trabajo publicado en los *Nouvelles Annales* sobre la integral $\int_o^{\pi} \cot(x-a-ib)\, dx$ que toma el valor $i\pi$, si $b>o$ y $-i\pi$, si $b<o$, la demostración de un teorema del Sr. Hermite sobre la interpolación, además una expresión de $log\, \Gamma(a)$ por medio de una integral definida, etc., etc.

Pero sobre todo lo que constituye en un precioso auxiliar la obra del Sr. Gomes Teixeira, es que, como conocedor experto de esta elevada rama de la ciencia matemática, ilumina los puntos difíciles con indicaciones ó ejemplos oportunos que á veces sólo se suplen á expensas de mucho trabajo y tiempo, ó de una prolongada experiencia.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE AVEC DES COMPLÉMENTS, par *E. Humbert*: París. Librairie Nony, 1893.

Esta obra, notable bajo muchos conceptos, como podrá convencerse el lector sólo con la enumeración de las materias que contiene, se divide en seis libros.

Libro primero. *Números enteros.— Primeras operaciones.*—Capítulo I. Numeración.—Capítulo II. Adición.—Capítulo III. Sustracción. Capítulo IV. Multiplicación.—Capítulo V. División.—Capítulo VI. Divisibilidad.

Libro segundo. *Propiedades de los números.*—Capítulo I. Números primos.—Capítulo II. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.—Capítulo III. Descomposición de los números en factores primos.

Libro tercero. *Números fraccionarios.—Números decimales.*—Capítulo I. Números fraccionarios.—Capítulo II. Operaciones sobre los números fraccionarios.—Capítulo III. Números decimales.

Libro cuarto. *Raíces.— Números inconmensurables.* — Capítulo I. Raíz cuadrada.—Capítulo II. Raíz cúbica.—Capítulo III. Números inconmensurables ó irracionales.

Libro quinto. *Razones y proporciones.— Reglas de tres, de interés, etc.*—Capítulo I. Razones y proporciones.— Capítulo II. Magnitudes proporcionales.—Reglas de tres, etc.

Libro sexto. Capítulo I. Errores.—Capítulo II. Problemas y teoremas.—Capítulo III. Sistema métrico decimal.

La obra del Sr. Humbert, además de ser una Aritmética completa, es una preparación para la teoría de los números, pues aparte del texto, y en caractéres más pequeños, contiene las proposiciones fundamentales de esta teoría. Las demostraciones tienen el carácter intuitivo que corresponde á las proposiciones de esta rama elemental, y al mismo tiempo tiene algo de esquemático que tanto facilita al alumno la adquisición del espíritu matemático, pues con mucho acierto se emplea la doble notación del número por medio de letras y de guarismos.

En la parte complementaria de la sustracción trata de los *números enteros negativos,* cuyo concepto desenvuelve fundándose en la igualdad $B + C = A$, considerando sucesivamente los casos de ser $A > B$ y $B > A$, y extiende á las *propiedades de los números negativos* y de las *sumas algebráicas.*

En la multiplicación parte de la definición particular é intuitiva, que le permite demostrar con elegancia, y elevándose gradualmente y con predominio del carácter intuitivo, las propiedades *conmutativa* y *distributiva,* llegando al cálculo relativo á los exponentes, extendiéndose en la parte complementaria á los números positivos y negativos.

Análogamente desenvuelve la teoría de la división partiendo de la igualdad $B = AQ + R$ que la define, demostrando con rigor, elegancia y de una manera sistemática las propiedades fundamentales, terminando con las de cocientes de potencias y con la extensión á los números negativos, tratando también de los sistemas de numeración.

En el capítulo destinado á la divisibilidad es de notar los *restos negativos,* los *caracteres de divisibilidad por un número cualquiera positivo* y en *un sistema de numeración cualquiera.*

En la parte complementaria de los números primos trata de los *restos de las potencias de un número relativo á un módulo primo dado, períodos de restos de las diversas potencias de 10, exponente á que pertenece un número, teorema de Fermat.*

Siguen las teorías del máximo común divisor y mínimo común múltiplo, expuestas con el mismo buen orden y claridad que todo el resto de la obra, que terminan con la *fórmula de Gauss* para la obtención del mínimo común múltiplo, del *cálculo de los restos,* demostrándose la notable propiedad, por sus aplicaciones, de que *el máximo* *común divisor* δ *de dos números* a *y* b *puede ponerse bajo la forma*

$$\pm \delta = bu - av,$$

y, por consiguiente, que la condición necesaria y suficiente para que a y b sean primos es que $bu - av = \pm 1$; terminando con la aplicación de dicha igualdad para demostrar varios teoremas y con la resolución de la ecuación $ax + by = c$ en *números enteros.*

Al tratar de la *descomposición de los números enteros en factores primos* trata el autor del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números, continuando con los *números cóngruos ó equivalentes, congruencias enteras, caracteres de divisibilidad, teorema de Fermat, números asociados. Teorema de Wilson y número de números primos con un número dado, no superiores á éste.*

La teoría de los *números fraccionarios* está tratada de una manera especialísima y notable, acompañando á las consideraciones teóricas las operaciones hechas sobre una longitud, y establece después de las propiedades fundamentales el *criterio de igualdad de los números fraccionarios* dado por la igualdad $ab' = ba'$.

También establece el Sr. Humbert de una manera original é intuitiva la teoría de la multiplicación, tomando partes iguales en la base y la altura de un rectángulo, concluyendo que la multiplicación es *conmutativa, asociativa, distributiva con respecto á la adición, uniforme,* y tal, que $A \times O = 0$, $A \times 1 = A$. Concluye tratando de los números fraccionarios negativos y del *conjunto de los números racionales.*

La obtención de los valores aproximados de la raíz cuadrada está acompañada de un detallado razonamiento sobre los valores aproximados por defecto y por exceso en que se emplea la consideración del *punto-límite* acompañada de una representación gráfica; y la parte complementaria trata bastante detalladamente de los *residuos y no residuos cuadráticos, residuos de módulos primos, residuos mínimos, criterios* de Euler y de Gauss, y *teorema* de Bachet.

Las teorías de la raíz cuadrada y cúbica sirven al Sr. Humbert de preparación para el importantísimo capítulo III, destinado á los *números inconmensurables é irracionales,* que expone con gran detalle y cuidado, empleando representaciones gráficas y la consideración de series infinitas y convergentes de números racionales; y deduce que la adición y sustracción de los números racionales é irraciones son operaciones *uniformes,* que la adición es *conmutativa,* la multiplicación *uniforme, conmutativa, distributiva respecto á la adición,* tratando de los radicales aritméticos en la división; y en la parte complementaria, entre otras cuestiones, se ocupa de la «diferencia fundamental que existe entre el conjunto de los números racionales y el conjunto total de los números.»

Termina la obra del Sr. Humbert, tan interesante, segun puede haberse notado por la variedad y elección de materias, así como lo advertirá el lector, por la elegancia, claridad y método seguido en las demostraciones y en la exposición, por las razones, proporciones, magnitudes proporcionales, reglas de interés, etc. y errores.

JAHRBUCH UBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK *begründet von Carl Ohrtmann. Band XXI. Jahrgang* 1890, Berlín. 1892. — Este Anuario, que se publica en Berlín bajo la dirección del Dr. E. Lampe, hoy rector de la Escuela técnica superior de aquella capital, es un Repertorio de Literatura matemática, el más completo que pueda desear el aficionado á estos estudios más exigente.

No es obra de un solo individuo, ni aun de pocos, la de resumir cuanto de alguna notoriedad se publica acerca de esta vastísima región del humano saber; y únicamente con una colaboración tan numerosa y tan selecta, constituída por cincuenta y cuatro matemáticos distinguidísimos, en gran parte alemanes, siendo hasta el número de quince, de diversas nacionalidades, es como ha podido llevarse á feliz término esta empresa.

El *Jahrbuch* es una obra indispensable para todo el que se dedica seriamente á los estudios matemáticos y para las bibliotecas científicas, pues contiene indicaciones preciosas acerca de cualquier rama de este género de conocimientos, sirven de guía á todo el que aspira á estudiar tal ó cual materia, pues seguramente que hallará noticia precisa de cuanto se ha publicado concerniente á la misma. La Historia, la Pedagogía y Filosofía matemáticas, el Álgebra, las Aritméticas elemental y superior, la combinatoria, el cálculo de probabilidades, los cálculos diferencial é integral, la teoría de las funciones, las Geometrías elemental y sintética, el *Anaysis Litus,* las Geometrías elemental y proyectiva, la nueva Geometría sintética, las Geometrías analítica en el plano y en el espacio, la Mecánica en general, la Cinemática, Estática, Dinámica, Teoría del potencial, la Física molecular, la Elasticidad, la Capilaridad, Acústica, Óptica, Electricidad y Magnetismo, la Geodesia, la Astronomía y la Meteorología se hallan distribuídas en secciones, donde el lector encuentra la bibliografía referente á las más diversas y modernas teorías, como las del Algebra de la lógica, la Geometría del hiperespacio, la Geometría no-euclídea, la Geometría elemental reciente, etc.

En 1309 páginas de que consta el tomo XXI (publicado en 1892) se contienen reseñas de infinidad de obras y memorias, que en general dan idea del contenido de las mismas, suficientes para dirigir y y orientar al que desea conocer determinadas cuestiones ó teorías de la ciencia, que luego puede conocer detalladamente en las obras originales; y si algunas reseñas están hechas con cierta generalidad, en otras, cuando el caso lo requiere, se ilustra al lector con la exposición de algunas fórmulas y desarrollos fundamentales, y hasta con razonamientos concienzudos y de alguna extensión que en algunos casos exigen doctrinas ó investigaciones muy recientes y originales ó poco divulgadas; y en pocas palabras diremos que cada tomo de tal publicación, además de ser de utilidad inapreciable, resulta sumamente instructivo, lo mismo respecto al detalle que al sistema de las verdades matemáticas.

Recientemente se ha publicado el primer cuaderno del tomo XXII (1893), que trata de: Historia y Filosofía.—Historia y Doctrinas.—Filosofía y Pedagogía.— Álgebra.—Aritmética elemental y superior.—Combinatoria y Cálculo de variaciones.—Cálculo diferencial é integral y Teoría de las funciones.

Die entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur.— En este discurso, leído por el Dr. Lampe el 26 de Enero de 1893 con motivo del cumpleaños del emperador de Alemania, hace una detallada é interesante reseña del brillante estado del desenvolvimiento que hoy ha alcanzado la ciencia matemática en todas las naciones cultas de Europa y América, no omitiendo la importación que los ingleses han hecho de estos estudios en la Colonia del Cabo, Nueva Holanda y la India Oriental, siendo curioso el hecho que consigna de publicarse en el Japón un periódico de matemáticas.

American Journal of Mathematices.— Simon Newcomb, editor. Baltimore.

El número 4 del tomo XIV (1892) contiene las siguientes materias *Note on the use of Supplementary Curves in Isogonal Transformation*, by Rollin A. Harris.—*On the Higher Singularities of Plane Curves,* by Charlotte Angas Scott.—*On the Roots of Matrices,* by W. H. Metzler.—*Simple Groups from Order* 201 *to Order* 500, by F. N. Cole.— *Extrait d'une lettre d'Ocagne à M. Craig.*

MATHESIS.—Director M. P. Mansion, profesor de la Universidad de Gante.

Los sumarios de los números correspondientes á Enero y Febrero (1893), contienen entre otros trabajos, revistas bibliogáficas, y cuestiones resueltas, etc., los siguientes:

Sur certaines courbes de quatrième ordre, par M. Balitrand.—*Sur un nouveau groupe de trois paraboles,* par M. Mandart.—*Sur une propriété des quadriques,* par M. Cl. Servais.

Sur le centre orthocentroidal, par Madame Prime.—*Sur la formule de Leibnitz,* par M. Mansion.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.—Los números de Enero y Febrero (1893), contienen entre otros, los siguientes artículos:

Transformation par inversion symétrique, par M. Bernés.—*Théorème sur l'éllipse,* par M. Vazou.—*Sur le cercle de Monge,* par Ch. Michel.—*Sur la transformation continue,* par Ch. Michel.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.—*Essai d'une demonstration de la formule de Laplace,* par Madame V. F. Prime.—*Sur la somme des carrés des coefficients binomiaux,* par M. G. Longchamps.—*Sur la construction des tangentes aux courbes,* por el mismo.—*Sur les cycliques planes,* par M. Michel. *Note sur l'ellipse de Longchamps,* par M. E. Catalan.—*Sur le deplacement d'une figure plane,* par M. Balitrand.—*Sur les triangles autopolaires,* par M. A. Noyer.

CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión 66 (Véase t. II, pág. 215).

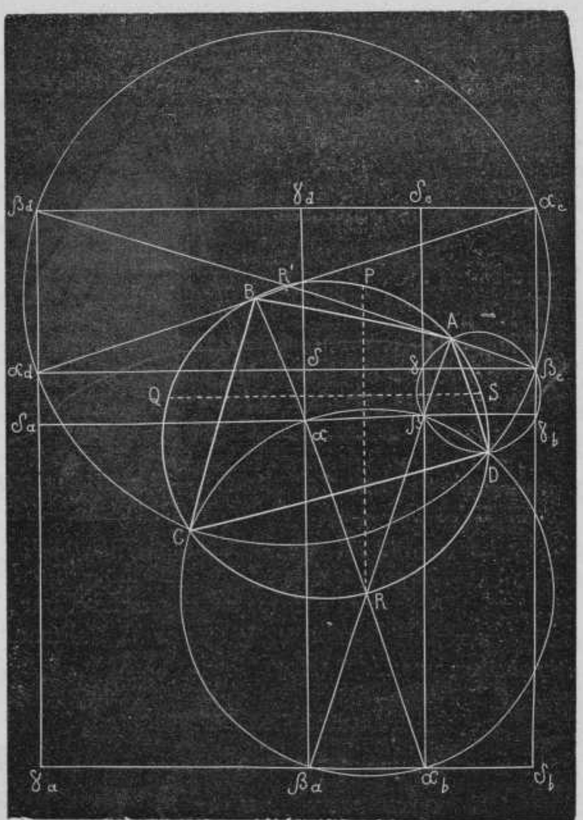
En todo cuadrilátero inscripto, los centros de los dieciseis círculos inscriptos ó ex-inscriptos á los triangulos formados por una diagonal y dos lados consecutivos, son las intersecciones de cuatro rectas paralelas á la bisectriz del ángulo agudo de las diagonales del cuadrilátero y de cuatro rectas paralelas á la bisectriz del ángulo suplementario.

(*N. C. M.*) (*E. Lemoine*).

Solución por el SR. SOLLERTINSKY

Sean P, Q, R, S los medios de los arcos subtendidos por los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero dado.

Evidentemente cada una de las rectas PR, QS forma ángulos iguales con las diagonales AC, BD (*); PR y QS son pues, paralelas á las bisectrices del ángulo de las diagonales.



Designaremos los centros de los círculos inscriptos en los triángulos BCD, CDA, DAB, ABC por las letras α, β, γ, δ y los de los círculos ex-inscriptos por las mismas letras con índices.

Los puntos α y α_b son las intersecciones de la recta BR con la circunferencia descripta desde R con el radio RC. Igualmente B y B_a son las intersecciones de AR con la misma circunferencia. β β_a

El cuadrilátero $\alpha\beta\ \alpha_b\beta_a$ es pues un rectángulo, y sus lados son pa-

(*) Por ejemplo, los ángulos de PR con AC y BD son $\frac{AP+CR}{2}$ y $\frac{BP+DR}{2}$

ralelos á las bisectrices del ángulo $\alpha R\beta$. Una de estas bisectrices es RP; luego la otra es paratela á SQ.

Los lados del rectángulo $\beta\gamma\beta_c\gamma_b$ siendo paralelas á las mismas rectas PR y QS, los puntos γ y γ_b están respectivamente sobre las rectas $\alpha_b\beta$, $\alpha\beta$, y así sucesivamente.

En fin, siendo R' el punto diametralmente opuesto á R, los puntos α_c y α_d, β_c y β_d son las intersecciones de las rectas R'B y R'A con la circunferencia descripta desde R' con el radio R'C.

Siendo la recta R'P la bisectriz del ángulo BR'A, los lados del rectágulo $\alpha_c\beta_d\alpha_d\beta_c$ son paralelas á R'P y PR ó á QS y PR. Por consiguiente los puntos α_c, β_d están respectivamente sobre las rectas $\gamma_b\beta_c$, $\delta_a\alpha_d$, y así sucesivamente.

Cuestión 76 (véase t. II, pág. 311).

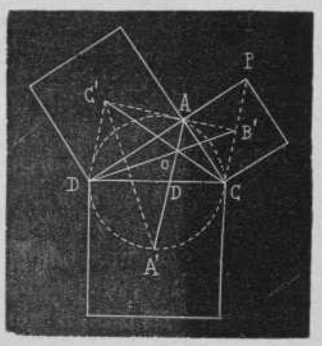
Si O *es el punto de encuentro de las rectas que unen los vértices de un triángulo* ABC *á los centros* A', B', C' *de los cuadrados construídos respectivamente sobre los lados* BC, CA, AB, se tiene:

$$1.^{\circ}\ \frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}=1;\quad 2.^{\circ}\ \frac{BO}{BB'}=\frac{AO}{AA'};\quad 3.^{\circ}\ \frac{BO}{BB'}:\frac{CO}{CC'}=\frac{AB}{AC}$$

(H. Van Aubel)

Solución por D. Ricardo Caro.

1.° El ángulo A'AC vale 45° por estar inscripto en A'C, que es su cuadrante, y el CAB' vale también 45°, luego el A'AC valdrá 90°, es decir que, A'A es perpendicular á C'B', y paralela á las BC' y CB'.



Resultan semejantes los triángulos BOD y BB'C, que nos dan,

$$\frac{BO}{BB'}=\frac{BD}{BC} \qquad (1)$$

y los COD y CC'B, que dan también

$$\frac{CO}{CC'}=\frac{CD}{CB} \qquad (2)$$

Sumando miembro á miembro las igualdades (1) y (2), resulta

$$\frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}=\frac{BD+DC}{BC}=1$$

2.º Es fácil ver que $DO = OA$, considerando la homotecia de las rectas AD y CP, con relación al centro B.

Los triángulos considerados en el número anterior, nos dan también las proporciones

$$\frac{BO}{BB'} = \frac{OD}{B'C} \quad \text{y} \quad \frac{CO}{CC'} = \frac{OD}{BC'}$$

cuyo producto miembro á miembro es

$$\frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} = \frac{\overline{OD}^2}{B'C \, . \, BC'} = \frac{\overline{AO}^2}{AB' \, . \, AC'} \tag{3}$$

También son semejantes los triángulos rectángulos AA'C' y AOB', por tener los lados del uno perpendiculares á los del otro, y nos darán

$$\frac{AB'}{AA'} = \frac{AO}{AC'} \quad \text{ó} \quad AB' \, . \, AC' = AO \, . \, AA'$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3), resulta

$$\frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} = \frac{AO^2}{AO \, . \, AA'} = \frac{AO}{AA'}$$

3.º Dividiendo miembro á miembro las igualdades (1) y (2), tendremos

$$\frac{BO}{BB'} : \frac{CO}{CC'} = \frac{BD}{BC} : \frac{CD}{BC} = \frac{BD \, . \, BC}{BC \, . \, CD} = \frac{BD}{CD}$$

Pero siendo AA' bisectriz del ángulo BAC por ser los arcos

$$BA' = A'C = \frac{1}{2} \text{ circunf.}^{a}, \text{ sabemos que } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC};$$

luego finalmente

$$\frac{BO}{BB'} : \frac{CO}{CC'} = \frac{AB}{AC}$$

Solución por el Sr. Sollertinsky

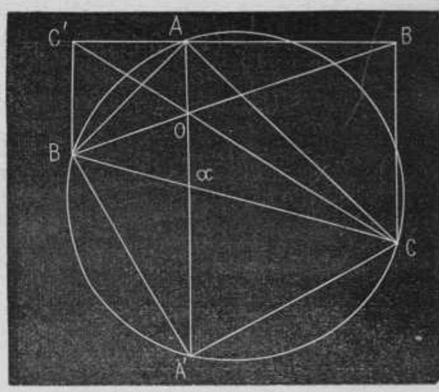
1.º Siendo BC' y CB' paralelas, se tiene

$$\frac{BO}{BB'} = \frac{OC'}{CC'};$$

pero
$$\frac{OC'}{CC'} + \frac{CO}{CC'} = 1$$

luego
$$\frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 1$$

2.º La recta AA', como bisectriz del ángulo BAC, es paralela á BC' y CB', y por consiguiente, divide á cada una de las rectas BB', C'C en la relación $\frac{C'A}{AB'} = \frac{BC'}{CB'}$. Pasa pues, por O.



Sea α la intersección de AA' y BC. Se tiene pues, AO = Oα y por consiguiente

$$\frac{BO}{BB'} = \frac{AO}{CB'}, \quad \frac{CO}{CC'} = \frac{AO}{BC'} \quad (1)$$

de donde

$$\frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} = \frac{\overline{AO}^2}{CB' \cdot BC'}$$

Pero, segun una propiedad conocida de la bisectriz, se tiene

$$A\alpha \cdot AA' = AB \cdot AC \quad \text{ó} \quad 2\,AO \cdot AA' = 2\,BC' \cdot CB'$$

Por consiguiente

$$\frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} = \frac{AO}{AA'}$$

3.º Dividiendo las proporciones (1) se obtiene

$$\frac{BO}{BB'} : \frac{CO}{CC'} = \left(\frac{BC'}{CB'}\right) = \frac{AB}{AC}$$

Cuestión 94 (Véase t. II, núm. 344).

Si en un triángulo ABC *se tiene*

$$1 + 256 \cos A \cos B \cos C = 3\, tg^2 \omega,$$

(siendo ω el *ángulo de Brocard de* ABC), *el círculo de Brocard y el círculo de Longchamps tienen el mismo radio.*

(E. Lemoine).

Solución por el SR. BROCARD (H.)

Designando R, r, r_1 respectivamente los radios del círculo ABC, del círculo de Brocard y del de Longchamps, se tiene por fórmulas conocidas (*J. S.* 1886, pág. 59 y ***A Sequel to Euclid***):

$$r = \frac{R}{4}\sqrt{1-3\,tg^2\omega} \qquad r_1^2 = -16\,R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Luego la condición pedida es

$$\frac{1}{16}(1-3\,tg^2\omega) = -16 \cos A \cos B \cos C$$

ó (E) $1+256 \cos A \cos B \cos C = 3\,tg^2\omega.$

NOTA.—Como el círculo de Brocard es siempre real, y el círculo de Longchamps no es real mas que cuando el triángulo dado ABC es obtusángulo, se ve que la condición de igualdad de los radios de estos dos círculos debe poder expresar al mismo tiempo que uno de los ángulos A, B, C es obtuso.

Por otra parte $3\,tg^2\omega < 1$, y, por consiguiente, si se tiene la igualdad (E) es preciso que $1+256 \cos A \cos B \cos C$ sea <1, lo que exige que uno de los cosenos sea negativo.

Cuestión núm 91 (véase t. II, pág. 312).

Resolver las ecuaciones

$$(y-z)^2+l^2=2l(y+z)$$
$$(z-x)^2+m^2=2m(z+x)$$
$$(x-y)^2+n^2=2n(x+y)$$

(E. Lemoine).

Solución por el SR. BROCARD (H.)

De la primera ecuación se deduce

$$l=y+z\pm\sqrt{yz}, \qquad \text{etc.}$$

Y se obtiene

$$\sqrt{l}=\sqrt{y}\pm\sqrt{z}, \quad \sqrt{m}=\sqrt{z}\pm\sqrt{x}, \quad \sqrt{n}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

de donde, tomando los signos superiores,

$$2\sqrt{x} = \sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{l}$$
$$2\sqrt{y} = \sqrt{l}+\sqrt{n}-\sqrt{m}$$
$$2\sqrt{z} = \sqrt{l}+\sqrt{m}-\sqrt{n}$$

Falta establecer los otros sistemas de soluciones que resultan de la combinación de los signos de los radicales.

NOTA.—Se ve que para proponer una aplicación numérica que dé soluciones enteras, es preciso tomar para l, m, n tres números cuadrados afectados del signo $+$.

For ejemplo, para $l=16$, $m=36$, $n=324$, se obtiene $x=100$, $y=64$, $z=16$.

CUESTIONES PROPUESTAS

103. Hallar los lados del ángulo recto de un triángulo, conociéndose la hipotenusa a y la suma de los cuadrados de las bisectrices de los ángulos agudos.

(J. M.)

104. En cada punto M de la evoluta de una elipse se traza la tangente AMB que encuentra á los ejes de la curva en los puntos A y B. Hallar el lugar del punto D de esta tangente tal, que BD=AB.

(H. Brocard).

105. Se dan tres ejes rectangulares, y se pide estudiar la superficie reglada que admite por plano director el plano xoy y por directrices dos parábolas situadas la una en el plano xoy y cuyo eje es ox, la otra en el plano yoz, siendo oz su eje y o su vértice.

(H. Brocard).

106. Se dan en un plano dos círculos C, C' y un punto P. Trazar por este punto dos circunferencias T, T' tangentes entre sí, respectivamente tangentes á los círculos dados, esto es, á T ó C y á T' ó C', y cuyos radios se hallen en una razón dada.

(A. Laisant).

107. Se dan en el espacio tres esferas S, S', S'' y un punto P. Trazar á estas esferas tres planos tangentes paralelos, tales, que las distancias PD, PD', PD'' del punto P á estos tres planos sean entre sí como los tres números dados m, m', m''.

(A. Laisant).

108. El cociente de $(2m-1)!$ por $m!\,(m-1)!$ es siempre un número par, excepto cuando m es una potencia de 2.

(J. M.) *(Wolstenholme).*

109. Hallar la suma de los productos tres á tres de los términos consecutivos de la progresión aritmética

$$\div a\,.\,a+r\,.\,a+2r\,.\,a+3r\,.\,.\,.\,.\,.\,a+(n-1)\,r.$$

(J. M.)

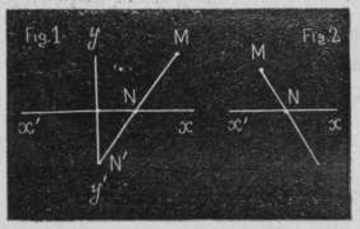
110. Si desde un punto M de una circunferencia se trazan tres cuerdas cualesquiera MA, MB, MC, el producto del cuadrado de la cuerda media MB por el área del triángulo MAC es igual á la suma de los productos de los cuadrados de las cuerdas extremas MA, MC por las áreas de los triángulos MBC, MAB.

(H. Van Aubel).

111. Sin escribir la ecuación ni trazar más que el cuarto de un dodecágono regular inscripto á un círculo, demostrar que el área de este polígono es igual á tres veces el cuadrado construído sobre el radio.

(H. Brocard).

112. Dados en dirección los ejes xCx', yCy' de una cónica Σ (figura 1.ª) y la normal MNN' á esta curva en un punto dado M, así como los puntos de intersección N, N' de esta normal con los ejes, determinar el centro ρ ó el radio de curvatura ρM en este punto M, no empleando más que dos rectas en la construcción.



Resolver asimismo este problema en el caso particular en que el eje yCy' (fig. 2.ª) y, por consiguiente, el punto N' se halle en el infinito, es decir, cuando la cónica (Σ) se convierte en una parábola.

(A. Schiappa Monteiro).

113. Estudio de las curvas representadas por las ecuaciones

$$x + y = 3\sqrt[3]{x-1}$$

$$x^3 + y^3 = \frac{2y}{x+y}$$

(J. M.) *(Edmunds).*

ERRATAS

En la cuestión núm. 99 léase V en vez de U.

En la cuestión núm. 100. La ecuación de que se trata es

$$12\,x^5 - 7\,x^4 + x^2 - 3000 = 0.$$

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.