Año III Zaragoza 15 Enero de 1893 Núm. 25

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

Á NUESTROS LECTORES

Al publicar el primer número del año pasado, segundo de la existencia de este periódico, prometíamos llenos de esperanza, confiando en la generosidad de los amantes de la ciencia, en el reconocido saber de los profesores que nos habían prometido su apoyo y su colaboración, realizar un programa vasto de propaganda, si bien ceñido á la corta extensión que podíamos dar á nuestra empresa naciente, en un terreno poco preparado, pues, como por excepción, en España la Matemática no ha tenido tantos adeptos como en otras naciones, donde una tradición científica más arraigada ha facilitado los prodigiosos adelantos que las colocan al frente del movimiento científico. Y que se ha realizado nuestro propósito de una manera que supera á cuanto podíamos imaginar, lo demuestran las varias memorias, notas, artículos, etc., suscriptos por nombres tan respetables y conocidos como los de los colaboradores extranjeros señores Battaglini, Brocard, Cesàro, Gomes Teixeira, Guimaraes, Lampe, Lemoine, Longchamps, Peano, Pirondini, Poulain, Retali, Schiappa Monteiro, Schlegel y Vigarié, así como por nuestros muy distinguidos colegas nacionales señores Bentabol, Clariana, Durán Loriga, Eseverri, Lasala, Torroja y Reyes Prósper, quienes han mostrado á su vez que nuestra actividad sólo necesita un estímulo para dirigirse á la realización de las nobles empresas.

Un nuevo á la par que fausto acontecimiento se ha verificado durante el año pasado, á saber: el haberse propuesto cuestiones hasta la 98, algunas de la N. C. M. que dejaron de resolverse al cesar esta publicación, otras remitidas directamente por los señores Brocard, Cesàro, Durán Loriga, Guimaraes, Laisant, Lemoine, Neuberg, Pirondini y Van Aubel, habiendo sido resueltas las 2, 3, 4, 5, 12, 27, 28, 33, 34, 36, 38, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 72, 73, 79 y otras aún no publicadas, tales son las 32, 53, 58, 63, 64, 65, 66, 67, 73, 75, 76, 77, 79, 81, 91, 93, 94, 405, 407, algunas de las que aparecen en este número, hallándose entre los que han favorecido esta sección, los señores Brocard, Guimaraes, Jiménez Rueda, Lemoine, Retali, Schiappa Monteiro, Sollertinsky y Vivanti y los alumnos señores Bozal, Caro, Galán y otros.

Así, pues, en resumen, se han publicado diversas memorias originales sobre muy variadas teorías de la ciencia matemática, se ha conseguido que el periódico resultase en extremo instructivo con la publicación y resolución de cuestiones, se han expuesto también algunos puntos de vista doctrinales de caracter elemental, y además se han dado á conocer en las reseñas bibliográficas algunas de las obras recientemente publicadas.

Todos los amantes de la ciencia matemática debemos mostrarnos pues, profundamente agradecidos hacia cuantos se han dignado favorecer é impulsar la propaganda científica en España, abrigando al mismo tiempo la confianza de que estos esfuerzos no serán ineficaces en lo porvenir. Al efecto, se continuará dando impulso á la sección de cuestiones, que tanta importancia ha comenzado á tener desde el año pasado; y en ellas se combinarán las proporcionadas á las fuerzas de los alumnos con otras que no desdeñen resolver ó ilustrar con su ciencia notables profesores, como se ha hecho hasta ahora. Además, si las circunstancias lo permiten, se procurará dar impulso á la publicación de memorias originales por medio de una reforma que se hará en breve; y no se descuidará el dar cuenta en los artículos bibliográficos de cuantas novedades vayan apareciendo, así como de exponer en forma elemental algunas teorías necesarias para el conocimiento de trabajos más superiores que se vayan publicando y que exijan alguna noticia ó aclaración preliminar.

Z. G. de G.

ESTUDIOS SOBRE LA ENSEÑANZA
Y EL ORGANISMO DE LA CIENCIA MATEMÁTICA

I. – CONSIDERACIONES GENERALES

La enseñanza y el organismo de la Matemática se hallan en una relación íntima y recíproca que merece consignarse sobre todo en España, donde el desconocimiento general de esta ciencia, el menosprecio con que se la mira, el aislamiento en que se trata de abandonarla y el falso juicio que de su importancia se tiene, hace urgente llamar la atención sobre la misma, que sintetiza las más preciosas conquistas de la inteligencia humana, aquello que permanece fijo en medio de la mutabilidad aneja á otros órdenes de conocimientos.

No es resultado á que se haya llegado ni á que pueda llegarse hoy por hoy el de una organización completa de la ciencia matemática, á pesar de sus prodigiosos adelantos, especialmente en este siglo, pues tan vasta es su extensión, tan variadas sus ramificaciones, tan multiplicadas y enlazadas las inagotables armonías de sus verdades, que el entendimiento humano, á pesar de la luz de la evidencia que lo lleva en todas direcciones con seguro paso, se encuentra como perdido entre las irradiaciones de ésta que le ofusca, no permitiéndole distinguir el orden que rige á tanta multiplicidad, la ley que abarca totalmente el conjunto; y á lo sumo, de una manera transitoria se forja un orden ó una unidad ficticia, que le lleva á un ascender continuado, mediante síntesis y armonías parciales, hacia la armonía total, siempre perdida en las inaccesibles alturas donde se desvanecen los ideales que la humanidad ha perseguido en todas las épocas, como su aspiración permanente.

La Matemática no ha seguido un orden determinado en sus progresos, pudiéndose decir que ha avanzado, sobre todo en las épocas primeras de su evolución, con una dependencia inmediata de las necesidades del momento. Así cuentan los historiadores que nació la Geometría. Así la Trigonometría se va formando como un auxiliar imprescindible de la Astronomía, y análogo orígen tienen problemas como el de la cuadratura del círculo, el de la trisección del arco, y otros varios, que llegaron á ser la preocupación dominante de los geómetras de la antigüedad.

Y todos estos resultados nacidos de fines prácticos, resumidos en las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto, etc., presentaron las primeras síntesis, de tal ó cual rama de la Ciencia matemática.

Después del período de gestación de la Edad Media, en el Renacimiento, las superiores generalizaciones de Descartes, Desargues, Pascal, etc., prepararon la época de Newton y de Leibnitz y el Algebra, la Geometría analítica, los Cálculos diferencial é integral son nuevas síntesis de la ciencia en la época moderna, síntesis acrecentadas con los nuevos descubrimientos aportados por multitud de ilustres talentos matemáticos cuyos nombres, por ser universalmente conocidos, es innecesario que citemos.

La Matemática se constituía, pues, á la manera que, en una reacción química, después de combinarse los átomos según sus afinidades y de formar las moléculas, éstas, agrupándose luego, se depositan distribuídas en diversos cristales.

Pero, siendo el desenvolvimiento matemático una parte del desenvolvimiento intelectual, forzoso nos es, antes de seguir en nuestra exposición, hacer algunas digresiones, que luego nos permitirán tratar de una manera más completa nuestro asunto.

Observaremos ante todo que *la Pedagogía* y *el espíritu de asociación* han sido las bases sobre las cuales se han formado las edificaciones intelectuales de la época moderna.

Ya en el siglo XVII Comenius estableció un sistema pedagógico, formando la base de la organización de los estudios, según su modo de ver, la *escuela materna*, la *escuela popular* (escuela primaria), la escuela latina (el Gimnasio el Colegio, el Liceo) y, en fin, la *Academia* (Universidad); y más tarde, en Port Royal, se fundaron establecimientos de educación, y Rollin, Montaigne y otros reconocen que el fin de los maestros no es solamente enseñar á sus discípulos el latín y el griego, el componer temas, versos y amplificaciones, el sobrecargar su memoria con hechos y fechas históricas, el construir silogismos en forma, etc.; sino que además deben acostumbrar á sus alumnos á un trabajo serio, á hacerles estimar las ciencias, mostrarles su camino y hacerles apreciar su empleo y su valor. Y el momento culminante en que el exclusivo fin de comunicar los conocimientos queda moderado por la nueva aspiración á desenvolver armónicamente las diversas aptitudes del individuo, á fortificarlas y hacerlas cada vez más eficaces para realizar su fin, en una palabra, por la *ciencia de la educación*, ó la Pedagogía, que invade de lleno el mundo social, lo hallamos cuando Pestalozzi, con justicia llamado el *padre de la Pedagogía*, terminado su penoso calvario, convirtió su residencia de Iverdon en el foco de las doctrinas pedagógicas que habían de regenerar, primero á la Alemania, y después difundirse por todo el mundo, ya como emanación de este centro, al que fueron á estudiar la nueva creación debida á su constancia, vocación y amor á la humanidad, lo mismo los príncipes que los legisladores y los sabios, ya como desenvolvimientos independientes que brotaron en Inglaterra promovidos por Bell y Lancaster, en Francia por Jacotot, Girard y Naville, y que luego se han diluído en ese movimiento general de la sociedad contemporánea, bajo la influencia de las leyes de Instrucción pública que han promulgado los legisladores de cada nación, y cuya realización hoy se halla en el organismo que forman las diversas gerarquías de Establecimientos de enseñanza, desde la Universidad hasta los Gimnasios, Liceos, Institutos, Escuelas reales y, en fin, hasta las Escuelas de Instrucción primaria más elementales.

Simultáneamente con el desarrollo y aplicaciones de la pedagogía hallamos otro elemento eminentemente impulsivo del progreso intelectual en el espíritu de asociación, como hemos dicho, predominante en la época actual; y después de las Universidades, las Academias creadas sucesivamente en diversas naciones, las publicaciones periódicas como órganos de las mismas ó de otras sociedades instituídas con fines de propaganda científica, los congresos nacionales y aun internacionales han llevado, por fin, á cierto cosmopolitismo que afirma cada vez con más sólidos lazos la unidad de la familia humana, y mediante el cual se borra en ciertos momentos el sello característico de cada nacionalidad.

Pero en medio de este amplísimo organismo del mundo intelectual vemos surgir una lucha entre dos tendencias opuestas, el *clasicismo* y el *realismo* ó *positivismo;* entre la cultura literaria y la cultura científica, entre la instrucción que eleva el alma hacia lo ideal, que tiende á ennoblecer los sentimientos fundamentándolos en la vida de la humanidad, en sus creencias, en las expansiones de su espíritu que han caracterizado las diversas épocas del pasado puestas de relieve por sus monumentos, su historia, su literatura y las diversas fluctuaciones del pensamiento filosófico, y entre la instrucción que ha nacido durante los últimos siglos cimentada en un más perfecto conocimiento del Universo en que vivimos, de la Naturaleza que se nos ofrece rica y variada y sometida á los poderosos y eficaces medios de observación y experimentación de que hoy disponemos; y de este estudio surgen ideales desconocidos para los pueblos de la antigüedad, patrimonio exclusivo de la época moderna, que ha creado nuevas teorías hoy enclavadas en los dominios de las *ciencias positivas,* teorías en las que la Matemática puede fijar los puntos fundamentales por medio de sus fórmulas, y que además tienen el raro privilegio de trascender á multitud de aplicaciones materiales que cada nación convierte en medios de acrecentar su riqueza, su fuerza, su dominio y su influencia entre todas las demás.

Esta eficacia material de los estudios positivos ó de aplicación, y aquella fuerza moral que comunican los estudios conocidos desde antiguo con el nombre de *humanidades*, son los dos polos entre que se mueve el organismo de la enseñanza en cada nación, influyendo en el estado de su cultura; y es por esto cuestión capital la del modo de disponer unos y otros estudios en el plan enseñanza, y la forma de crearse establecimientos tales, como Gimnasios Escuelas reales (real chulen), Institutos técnicos, etc., y además el multiplicar los medios materiales de favorecer la cultura mediante la formación ó enriquecimiento de las bibliotecas, museos de toda clase, verdaderos palacios que reflejan la magnificencia del objeto á que están consagrados y á la vez la grandeza del pueblo capaz de elevarlos y apto para aprovecharse de los inagotables beneficios que brotan de ellos como por irradiación cada vez más expléndida.

No insistiremos en la exposición de hechos tan conocidos como el de la admirable organización universitaria de la sabia Alemania, tan adecuada á favorecer el espiritu de investigación, auxiliado con prodigalidad por cuantiosos recursos, ni diremos nada desconocido à los lectores, de las casi fabulosas cantidades que en los Estados Unidos se destinan á la Instrucción pública que se propaga por todas las clases sociales en muchos miles de establecimientos á ella destinados, ni de los notables sacrificios hechos por Francia desde 1871 para mejorar las instalaciones de sus Facultades de Ciencias, que aun hoy, sin embargo, reconoce es necesario llevar más adelante guiada por su patriotismo, ni de ese renacimiento de la Italia, que cuenta numerosas Facultades completas de Ciencias y que ha creado muchas Escuelas é Institutos técnicos para el fomento de cuanto puede contribuir á acrecentar su riqueza y producciones de toda clase, ni de ese estado floreciente en Bélgica y en Suiza, y en fin, para abreviar, diremos que en Europa como en los Estados Unidos y en las repúblicas del Sud de América se observa una tendencia universal á dar impulso á los estudios científicos, tanto en el dominio de lo especulativo, de lo ideal y de lo abstracto, en que se halla latente y como condensado el espíritu de progreso, que de la potencialidad ó de la idea desciende al hecho, como en el de las aplicaciones y consecuencias de aquél.

Creemos que basta para nuestro propósito haber demostrado, con la simple enumeración de los hechos, cuán importante es favorecer el desarrollo de las ciencias positivas que se impone en todas las naciones como consecuencia inmediata de la vida moderna, so pena de condenarse á la muerte, después de haber arrastado vida lánguida; y si no es este el caso de España, hoy decaída ciertamente por reveses del pasado, que no es de esta ocasión relatar; si aún podemos decir que la vitalidad de nuestra raza nos sostiene y anima á avanzar, aunque lentamente; si aún nuestro brillante siglo XVI, y nuestro desenvolvimiento filosófico que ha existido, aunque aislado del movimiento general de Europa desde el Renacimiento (1) nos sostienen con sus resplandores en la esfera de la vida intelectual, es cierto que nuestro ánimo, preocupado por necesidades apremiantes de la actualidad, nos ha ido separando del mundo del pensamiento, hasta llegar á desconocernos á nosotros mismos.

No es pertinente ahora tampoco el buscar la causa del raro fenómeno de que España no cuente esa tradición científica que cuentan la mayor parte de las naciones de Europa y que ha favorecido su adelantamiento en esta región del saber; pero también es cierto que naciones nuevas, como los Estados Unidos y algunas de las repúblicas del Sud de América, tampoco la cuentan, y, sin embargo, hoy se han asimilado ya ese espíritu científico que todo lo invade y que también todo lo dirige. Nos contentamos con consignar el hecho.

Y esto admitido, porque es indiscutible, ¿qué podremos hacer, si todavía seguimos en nuestro quietismo y no nos encauzamos en la corriente general?

Es cierto que en los últimos años se han creado Escuelas de Artes y Oficios, Escuelas de Comercio y la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza (suprimida en 26 de Junio último por el ministro de Fomento Sr. Linares Rivas, hecho que, como decíamos (2), no puede ser más que pasajero), y construído un magnífico edificio destinado á esta Facultad y á la de Medicina; pero esto, con ser indicio de que algo caminamos, no es bastante, cuando todas las naciones han creado con rapidez numerosísimos centros destinados á los estudios modernos, ó cuya índole responde perfectamente á las exigencias de la vida actual.

Seis Facultades de Ciencias había antes del malhadado decreto que las ha reducido á dos, de las cuales tres eran incompletas, y todas languidecían en medio de las escaseces de material y del olvido en que los altos poderes las habían relegado: porque en España hoy todo ha cedido plaza á la política, que devora un tiempo precioso para nuestro enaltecimiento, para nuestro despertar á la vida de la producción y de la prosperidad material é intelectual. Los programas yacen

(1) Véase *Menéndez Pelayo*, Ensayos de crítica filosófica.

(2) En el tomo II. pág. 217.

olvidados, el número y clase de enseñanzas que hoy se imponen para seguir siquiera el rumbo general de las naciones cultas no ha preocupado á los legisladores ni á los gobernantes, en la sección de Ciencias Físicas y Matemáticas, y aun ha habido ministro, el Sr. Linares Rivas, que ha creído oportuno, además de suprimir las Ciencias en cuatro Universidades, el encomendar los dos cursos de los Institutitutos que abarcan la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y la Trigonometría ¡¡á un solo profesor!!

Que las Facultades de Ciencias en España tenían escasa concurrencia de alumnos por efecto del poco halagüeño porvenir que ofrecían á la juventud. Que su influencia era apenas imperceptible por razón del abandono y el olvido á que se las había condenado, por causa de apreciarse hoy en España más los rápidos y deslumbradores efectos de las elegancias oratorias que los lentos, aunque permanentes resultados que los investigadores científicos pueden aportar á su patria; y también porque, viniendo el mal desde los grados inferiores de la enseñanza, en las esferas superiores tenia que ser irremediable. Esto nunca ha podido ser razón suficiente para condenarlas á muerte, para extinguir los gérmenes que, con el tiempo y los cuidados precisos podían llegar á convertirse en abundantes cosechas.

Y si el edificio levantado en 1857 por el ilustre legislador D. Claudio Moyano hoy estaba ruinoso por no haberse reparado á tiempo, conformándolo á las actuales exigencias, ¿por qué se destruye sin antes tener el plano de una nueva edificación?

No basta para nuestra cultura científica que nos queden como centros donde se refugie el culto de las ciencias matemáticas, físicas y químicas las varias Academias y Escuelas de ingenieros, arquitectos, etc., puesto que en toda nación deben existir con absoluta independencia, como respondiendo á ideales diametralmente opuestos, la enseñanza científica de las Universidades y la de los Centros técnicos.

La Universidad se eleva á la idea, á lo abstracto, á la investigación que perfecciona y acrece el caudal de verdades para organizarlas en sistema. Las Escuelas y Academias técnicas se apoderan de todo lo más importante para las aplicaciones inmediatas. Aquélla aspira á lo fundamental, éstas á lo útil, y con arreglo á estas diferencias deben elevarse armónicamente en la nación los dos focos del saber científico, para atender á una necesidad doble, realizada con arreglo á la ley de la distribución del trabajo, según la cual cada producto debe depender de aquellas fuerzas ó causas más adecuadas y eficaces para su obtención.

II.—SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La ciencia matemática puede considerarse bajo dos puntos de vista: como un desenvolvimiento lógico de unos cuantos principios fundamentales y postulados, y como un instrumento precioso para aplicar los conocimientos abstractos, de aquéllos emanados, á inmensa variedad de objetos. Estos dos modos de considerarse la Matemática corresponden á los modos de enseñarse esta ciencia en la Universidad ó en los centros técnicos (Academias de ingenieros, arquitectos, etc).

Los centros técnicos de todas clases tienen por objeto llevar las verdades del dominio de lo abstracto al de las aplicaciones y de la práctica, y como otro ha de ser su camino, y como éste resultaría demasiado largo si tuviera su punto de partida allá donde se forjan las ideas en su origen metafísico, en el crisol de nuestras facultades intelectuales, donde toman diversas formas para organizarse en sistema, basta que los principios desde los que han de estribar las aplicaciones propias de cada profesion sean los más inmediatos á éstas, es decir, que constituyan el por qué ó la razón en que éstos se apoyan, mas no otro por qué allá apartado en el fondo filosófico de la ciencia, porque es ley necesaria que rige á la inteligencia la de su limitación, que exige la distribución del trabajo mediante el cual, no los individuos, sino la humanidad se constituye á la manera de fuerza integral, y éstos, como sus elementos que se aunan en el esfuerzo común.

Claro es que considerándose en los centros técnicos la Matemática principalmente como medio útil, tendremos que limitarnos á examinar lo que la enseñanza de la Matemática debe ser en la Universidad, donde ha de ser tratada de una manera absoluta, como desenvolvimiento intelectual en lo que de esencial tiene y en su forma (Arquitectónica).

Bajo el punto de vista intelectual hallamos desde luego dos aspectos: el uno como un organismo ideal, el otro como un instrumento ó medio educativo y de desenvolvimiento intelectual.

Esta distinción conduce inmediatamente á que la enseñanza matemática, desde sus grados inferiores, tenga por objeto, más que el instruir, que enriquecer la inteligencia con verdades, el despertar la actividad de ésta y darle aptitud para la investigación.

En un folleto que publiqué el año 1877 (*Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas*), página 25, decía: «Lo primero debe ser adquirir las aptitudes. El alumno que estudia matemáticas las aprende (más exacto sería decir: *aprende de memoria el libro*) varias veces y otras tantas las olvida. Las ideas adquiridas no son en su inteligencia como las sustancias que por combinacion química se hallan infiltradas en el agua formando una sola esencia, sino como las arenas ó sedimentos que arrastra en su corriente y después abandona, quedando trasparente y pura.»

La Matemática es ciencia que puede ir edificando el alumno si á ello le ayuda la intervención del profesor, cuya mision puede reducirse á armonizar las dificultades que aquél tiene que vencer con el grado de desenvolvimiento de su inteligencia. La Matemática, por lo general, *se hace;* y un ejemplo notable que nos ofrece la historia es el de Pascal reconstruyendo por sí las primeras proposiciones de Euclides, si bien en casos no excepcionales como éste la intervención del profesor suplirá la diferencia de intensión intelectual, según se dijo. Es cierto también que si la Matemática se hace, muchas veces el genio *adivina,* es decir, fija las piedras fundamentales de la edificación, que otras inteligencias, según sus gerarquías, pueden completar y extender. Y los nombres inmortales de todos conocidos van unidos, como se sabe, á esos conceptos creados, que, cual nuevos centros de atracción, luego se relacionan con los otros centros previamente existentes en el sistema científico, que así cada vez se amplifica y varía en su contenido y en su forma.

Los elementos de Geometría nos ofrecen el primer ejemplar de este medio educativo de la inteligencia; y por su naturaleza no es extraño que, en la parte que contienen los seis libros primeros de la obra de Euclides, sean los indicados para preceder hasta á la noción de número; pues el carácter intuitivo de las nociones geométricas, que las relaciona inmediatamente con nuestra percepción externa y con las representaciones de nuestra imaginación, las hace más directamente asimilables á la débil inteligencia del alumno de primera y segunda enseñanza, que cuanto se refiere al concepto más abstracto del número.

Además, antes de dejar este asunto, podremos observar que es una preocupación infundada é hija sólo de la costumbre la de aislar cuanto se refiere á la Geometría en el plano de lo que concierne á la Geometría en el espacio, hasta haberse separado en dos partes que sucesivamente estudian todos los alumnos.

Pues, por ejemplo, ¿qué diferencia esencial existe entre el razonamiento generalmente empleado para demostrar el teorema fundamental de la perpendicularidad de la recta con el plano, en que se establecen igualdades de triángulos no situados en un plano, y cualquiera otra proposición de la Geometría en el plano?

Y por otra parte, ningún fundamento puede tener la dificultad relativa de ambos estudios, al menos en los elementos, pues nuestra facultad perceptiva se halla tan dispuesta para ver las figuras en un plano como en el espacio, siempre que en la enseñanza se utilicen las colecciones de figuras de tres dimensiones construídas al efecto, y preceda el estudio directo de éstas al de su representación en la pizarra. Siendo únicamente reprochable el que, á partir de esta representación, como se hace en algunos Establecimientos desprovistos de colecciones, se pretenda que el alumno reconstruya la figura exacta, lo que exige mucha práctica y gran intensión intelectual. Asimismo pueden citarse ejemplos en Geometría proyectiva de lo ventajoso que es á veces proceder desde las figuras en relieve hasta las figuras planas.

No sólo el caracter intuitivo de la Geometría le da gran importancia en la educación intelectual de los alumnos, sino que también el encadenamiento lógico de sus numerosos teoremas, las correlaciones y conexiones entre las formas del razonamiento, los varios métodos ó procedimientos que se emplean en la demostración de los teoremas y en la resolución de los problemas constituyen una gimnasia que desenvuelve las aptitudes y funciones intelectuales del alumno.

Pero estas relaciones y conexiones, este sistema admirablemente organizado pasaría desapercibido ante la inteligencia del alumno, si el profesor no aprovechase todas las circunstancias oportunas que se ofrecen para ponerlas de relieve. La ciencia en la época de ser estudiada difiere de la ciencia ya adquirida. En la época de la adquisición las ideas se diseminan de modo que se adapten al desenvolvimiento natural y progresivo de las funciones intelectuales, permitiendo cierto desorden convencional en la correlación y disposición sistemática de los conceptos. La ciencia ya aprendida es el conjunto de verdades sistematizado, de manera que éstas se hallen coordinadas y subordinadas entre sí, como en un sistema de clasificación zoológica los animales se encuentran incluídos en sus grupos, órdenes, clases, etc. Este resultado creemos que debe pertenecer á la rama superior de caracter filosófico que denominamos *crítica matemática*, y de la cual el profesor debe aprovechar en cada momento oportuno el hacer una aplicación, que desde aquel foco superior lleve luz al trabajo del alumno, que sin darse cuenta de ello caminará á sus resplandores de una manera fácil y expedita.

La Aritmética es otra rama de la ciencia, que unida á la Geometría, debe fortalecer la actividad intelectual del alumno con el análisis sucesivo de las diversas operaciones, sus propiedades y las propiedades fundamentales de los números, y especialmente el análisis llevado á los números fraccionarios y complejos que exigen una doble operación que se combina de diversos modos, ya en el número, ya en la cantidad, ó sea en las alteraciones de la pluralidad simultáneamente con las denominaciones de la cantidad concreta.

No es inoportuno, como algunos profesores creen, en esta primera época de la asimilación científica el realzar esta rama elemental con algunos de los luminosos principios de la teoría de los números, tales como los teoremas de Fermat y de Euler, y conceptos como el de congruencia, que son motivos de enaltecimiento intelectual. Pues la idea de los periodos de restos permite abarcar de una sola ojeada toda la divisibilidad, y el concepto de congruencia lleva á la idea de clasificación de los números. Y el argumento basado en la debilidad intelectual del alumno carece de valor, ya que hoy los prodigiosos adelantos de la ciencia matemática facilitan al profesor el acumular, con cierta discreción y tacto, á los materiales que formaban el contingente usual en épocas anteriores otros que corresponden á la época actual, debiendo ser la enseñanza una combinación armónica de lo expresado en el libro con los conceptos complementarios aportados por el maestro, que no debe ser un mero repetidor del libro, sino la inteligencia que ilumina los puntos culminantes ó fundamentales, desde los que se facilita al alumno el distinguir las consecuencias en ellos condensadas. De esta manera se evitará que las inteligencias de éstos se ofusquen y se extravíen entre la muchedumbre de los detalles. Además de esta luz proyectada por el profesor sobre las cuestiones fundamentales de la ciencia, es necesario el trasmitir cierta fuerza impulsiva á la actividad naciente del alumno, efecto realizable mediante colecciones graduadas de problemas, base de la iniciativa individual y del espíritu investigador que haya de adquirir aquél. Y de esta manera la enseñanza será el perfecto reflejo de la ciencia considerada bajo su doble aspecto: mediante la síntesis por la cual se nos ofrece como un sistema en que se hallan coordinadas y subordinadas las verdades, y mediante el análisis, por el cual se construye el edificio, partiendo desde sus materiales acá y allá dispersos.

Hoy que la Matemática ha llegado á tan superior estado de desenvolvimiento, debe observarse que, á la vez ha alcanzado tan alto perfeccionamiento el arte y la ciencia de la enseñanza, que establece una completa armonía entre el número de dificultades crecientes y los medios de que se dispone para vencerlas.

Hace algunos siglos podría ser un trabajo abrumador para una inteligencia el llegar á los resultados de la Geometría cartesiana y de los métodos de Newton y Leibnitz; y esto era así porque los caminos reales de la ciencia no se hallaban trazados; porque, á la verdad, se llegaba por sendas tortuosas y escondidas, de tal modo, que el encontrarlas y seguirlas estaba reservado á los genios, que poseían en sí el germen de las ideas y el arte divino de desenvolverlas y de hacer brotar la armonía allí donde otras inteligencias sólo percibieran la confusión y el caos.

La ciencia es el encadenamiento, es el tejido en que las verdades se hallan sujetas entre sí, y la rigidez de sus tramas asegura la marcha de la inteligencia á través de ellas; y aunque hoy este tejido se ha extendido considerablemente, también se han reforzado los múltiples enlaces que las hacen depender unas de otras, efectuando un trabajo reductor, como se ha dicho, á los nudos más salientes de la trama.

Establecidos estos precedentes, que bosquejan la importancia de la ciencia matemática, no sólo como instrumento precioso para las más varias aplicaciones á las ciencias de la naturaleza y multitud de artes é industrias, sino como medio de enaltecimiento intelectual, cabe preguntar: ¿es justo y admisible que cuando tan indiscutible preeminencia ha obtenido en las naciones más cultas y que parece miden su importancia y su poder por el aprecio en que tienen las riquezas atesoradas en estas conquistas, las más legítimas é incuestionables de la razón humana, España aparezca como una excepción respecto al culto debido á esta rama del saber, que los Poderes públicos no fijen su atención en este desequilibrio científico, llevando á la práctica las reformas hoy exigidas dentro de un plan completo de enseñanza?

Algo hacen esperar en sentido afirmativo las noticias recientes acerca de los planes que el actual ministro de Fomento medita, y mucho podemos prometernos de su reconocida ilustración, de sus elevados ideales y de su amor á la ciencia; y sobre todo, de que hoy se impone con la inexorable ley de la necesidad el crear una escuela científica nacional con iniciativas, con impulso propio, no como reflejo ó simple imitación, como producto exótico importado de otras regiones, sino como fruto de la meditación propia, de la actividad moviéndose libremente para crear en la región de las ideas, ó para expresar con estilo propio aquello que la inteligencia elaboró y asimiló á su esencia, para presentarlo con el sello de la personalidad. Y si esto así no fuere, tanto peor; porque de igual manera que en el Universo los fenómenos se reducen á un cambio de intensión en las energías físicas que actúan sobre la materia, en el mundo social existe la fuerza intensiva de las inteligencias que producen por su combinación la resultante expresada en cada nación por su estado de prosperidad ó decadencia.

Nada se consigue con esa marcha rutinaria que caracteriza la enseñanza en nuestros Establecimientos docentes, cuya defectuosa organización hace inútiles las más entusiastas iniciativas de los profesores que intentaran corregirla con sus esfuerzos individuales, porque la enseñanza es un sistema en que debe predominar la armonía de todos sus elementos; porque en los diversos grados que abarca el organismo universitario debe ser esencialmente educativa, debe propender á formar la inteligencia, á ponerla en plena posesión de sus medios naturales de investigar, á convertirla en legítima propietaria de sus conocimientos, evitando este vivir continuado del préstamo, de la accidental y momentánea adquisición de resultados por otros elaborados y retenidos á la manera de inventario ó de catálogo, y que convierte á las inteligencias en especies de encerados sólo susceptibles de contener cuanto sucesivamente en ellos fijan, para después ser borrados, actividades extrañas.

Obsérvese que la ciencia tiene algo fijo y permanente que es como su cuerpo, fruto del trabajo acumulado por las generaciones de actividades intelectuales que se han sucedido, su *arquitectónica,* por la cual se nos manifiesta la construcción de su organismo, y además algo movible, que es como su espíritu por el cual aquél se vivifica y se hace apto para recorrer los ciclos según los que se manifiesta su existencia; esta alma de la ciencia cuyos efectos más inmediatos se sintetizan en su *metodología,* por la que, no sólo se nos revela su forma, sino que se hace susceptible de nueva extensión y desarrollo, y en su *metafísica,* que nos lleva á sus fundamentos, y nos permite vislumbrar algo de su contenido ó de su esencia.

Y si esto se observa, si dichos dos elementos constituyen la ciencia en su integridad, si además su adquisición en los centros de enseñanza debe corresponder á los tres grados, elemental, secundario y superior en la Escuela, en el Instituto de 2.ª enseñanza y en la Universidad, ¿cómo sucede que las enseñanzas de las ciencias en nuestras Universidades sean casi la repetición de lo que fueron en los Centros de 2.ª enseñanza? ¿Cómo se tolera que en los programas de la mal llamada asignatura de *Análisis matemático* figuren la numeración, las fracciones ordinarias y decimales, la extracción de raíces, etcétera, haciendo perder al alumno que esto estudió en segunda enseñanza un tiempo precioso, cuando hoy en todos los grados de la ciencia se nota un movimiento de concentración, que partiendo de sus ramas superiores desciende hacia las inferiores para enaltecer éstas y aliviar aquéllas de la muchedumbre de nuevos conceptos y teorías, artificio sin el cual sería actualmente imposible á las inteligencias el abarcar siquiera la extensión del actual horizonte científico?

¿Cómo, en cambio, las Facultades de Ciencias se ven privadas de asignaturas superiores correspondientes á sus fines, cuando éstos se reducen al estudio de la ciencia en sí, de una manera general?

No es suficiente para realizar el alto fin de la enseñanza universitaria que figuren en el cuadro de las asignaturas el Álgebra, las Geometrías, el Cálculo infinitesimal, la Mecánica racional, la Astronomía, la Física matemática, etc. Estas materias dan á conocer el objeto de la Matemática en su variedad; pero realizando de una manera parcial el fin de las Universidades. Es cierto que en cada asignatura cabe el hacer exposiciones históricas y críticas, y esto se ha realizado algunas veces por ciertos autores; pero tales tentativas sólo pueden conducir al fin de una manera parcial é incompleta. Los estudios históricos y críticos deben ser objeto de asignaturas especiales que permitan su desenvolvimiento completo y sistemático y que sean la coronación del edificio que la Universidad debe levantar á la Ciencia como resultado integral de todas sus enseñanzas.

(Se continuará). Z. G. de G.

SUR L'INFINITUDE DES SERIES DIVERGENTES

par M. G. de Longchamps

professeur au Lycée Saint Louis

L'étude des fonctions élémentaires conduit à distinguer immédiatement, parmi les infiniment grands, quatre infinitudes principales.

Elles correspondent, ou se rattachent,

1.º à la suite naturelle des nombres,

2.º à la fonction exponentielle,

3.º à la fonction logarithmique,

4.º à la fonction factorielle.

Les séries divergentes, représentent des infiniment grands; il n'est pas sans intérêt, dans certaines questions, de savoir à quel genre d'infinitude elles appartiennent.

Et nous nous proposons dans cette Note de rechercher, sur quelques séries divergentes, à laquelle des infinitudes signalées elles appartiennent.

Nous montrerons aussi, pour mettre en lumière l'intérêt que comporte cette étude, quelques applications des résultats que nous allons obtenir, applications que le lecteur pourra poursuivre facilement.

Le sujet que nous développons ici, comme celui que nous avons récemment exposé dans ce Journal (*) est des plus élémentaires. Mais il peut donner lieu à divers exercices intéressants.

1. M. Catalan dans son *Manuel des candidats à l'Ecole Polytechnique*, parlant de la série harmonique, dit «la série dont nous nous occupons est excessivement peu divergente; c'est à dire que la somme S_n croît très lentement avec n.» On peut donner des séries *lentement divergentes* une définition qui précise le sens de ce terme en disant qu'on apelle ainsi *des séries telles que le nombre des termes, le nombre* n, *est infiniment grand par rapport à la somme* S_n *de ces termes.*

La série harmonique est un exemple de série lentement divergente; le calcul qui suit va démontrer cette propriété.

Nous utiliserons dans les démonstrations que nous allons aborder une propriété que nous établirons d'abord.

2. Principe. *La série dont le terme général* ε_n *ést egal à*

$$\frac{1-\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

est une série convergente.

En effet; on a

$$\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta}{n^2} \qquad (0<\theta<1)$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{\theta}{n}.$$

D'après cette remarque,

$$\varepsilon_n=\frac{\theta}{n^2}.$$

La quantité $n^2\varepsilon_n$ ne croissant pas indéfiniment avec n, on sait que la série correspondante est convergente.

3. Theoréme. *L'infinitude de la série harmonique est égale á celle de* $\mathrm{L}n$.

Posons $$S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}.$$

et $$U_n=S_n-\mathrm{L}n.$$

(*) *Le calcul des séries convergentes* (t. II, pags. 10 y 3i).

La relation

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1},$$

donne

$$S_{n+1} - L(n+1) = S_n - Ln + \frac{1}{n+1} - L\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

et, par suite,

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1 - L\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n};$$

ou $$U_{n+1} = U_n + \varepsilon'_n, \qquad \text{(H)}$$

en posant

$$\varepsilon'_n = -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{\theta}{n^2} \quad (*)$$

ε'_n est un infiniment petit du second ordre au moins; car $n^2\varepsilon'_n$ ne croît pas indéfiniment, avec n. Cela posé, (H) donne

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + \varepsilon'_n, \\ U_n &= U_{n-1} + \varepsilon'_{n-1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_2 &= U_1 + \varepsilon'_1, \\ U_1 &= 1, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$U_{n+1} = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots\ldots + \varepsilon'_n$$

La série $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots\ldots, \varepsilon'_n$ est une série convergente puisque, comme nous venons de l'observer $n^2\varepsilon'_n$ ne croît pas indéfiniment avec n. Alors on peut dire que U_{n+1} a une limite, pour $n = \infty$. Ainsi, en posant,

$$S_n = L(n) + K_n \qquad \text{(E)}$$

on voit que K_n représente une quantité ayant, pour $n = \infty$, une limite K (*).

(*) Nous appliquons ici la formule démontrée au paragraphe précédent

$$\frac{1 - L\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} = \frac{\theta}{n^2}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

(*) K s'appelle *la constante d'Euler*. Le théorème que nous venons d'établir est, comme on sait, ordinairement démontré en empruntant le calcul des dérivées ou les propriétés qui s'y rattachent. Il nous a paru utile de dégager la démonstration des considérations de cette nature.

Dans cette formule, nous rappelons que S_n représente la somme des n premiers termes de la série harmonique et que le logarithme qui y figure est un logarithme népérien.

4. CorolLAIRE. *Pour* $n=\infty$, *on a*

$$\frac{S_n}{Ln}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ldots}{L.n}=1$$

En effet, l'égalité d'Euler donne

$$\frac{S_n}{Ln}=1+\frac{K_n}{Ln},$$

avec la condition

$$Lim\ K_n=K$$

K étant la constante d'Euler (*)

On a donc

$$Lim\ \frac{S_n}{Ln}=1$$

Voici, maintenant, ce qu'on pourrait appeler le théorème général des séries lentement divergentes.

5. Théorème. *Si, dans une série,* nu_n *a pour limite un nombre* K'; *ou, si* nu_n *sans avoir de limite, reste toujours compris entre deux nombres fixes* K'', K'''; *cette série est* LENTEMENT DIVERGENTE.

En effet, dans l'une ou l'autre des deux hypothèses qui viennent d'être faites, on peut trouver deux nombres K'', K''' tels que, à partir d'un certain rang, qu'on peut toujours, pour le besoin de la démonstration, considérer comme le premier terme de cette série, on ait

$$K'' < 1.u_1 < K''',$$
$$K'' < 2.u_2 < K''',$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$K'' < nu_n < K'''.$$

En posant

$$\Sigma_n=u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n,$$

on a donc

$$K''\,S_n < \Sigma_n < K'''\,S_n, \qquad (3)$$

(*) D'après un renseignement que m'a donné M. Catalan, mais que je n'ai pu contrôler, le théorème en question se trouverait dans les *Institutiones calculi differentialis*, tome I, p. 355-1787. Le lecteur trouvera quelques détails sur la constante d'Euler dans les *Mélanges Mathématiques* de M. Catalan et, notamment, dans son Mémoire *sur la constante d'Euler et la fonction de Binet.*

ou
$$K'' \frac{S_n}{Ln} < \frac{\Sigma_n}{Ln} < K''' \frac{S_n}{Ln}.$$

Mais nous avons vu (§ 4) que

$$Lim \frac{S_n}{Ln} = 1, \qquad (\text{pour } n = \infty)$$

donc, dans cette hypothèse,

$$K'' < lim \frac{\Sigma_n}{Ln} < K'''$$

La série considérée est donc lentement divergente, puisqu'elle est de l'infinitude Ln.

6. Remarque. Il n'est pas sans interêt d'observer que dans les séries que nous venons de considérer, et qui sont lentement divergentes on a, pour toutes les valeurs positives de α,

$$lim \frac{\Sigma_n}{n^\alpha} = 0.$$

En effet, l'identité

$$\frac{\Sigma_n}{n^\alpha} = \frac{\Sigma_n}{Ln} \cdot \frac{L_n}{n^\alpha}$$

montre que, $\frac{Ln}{n^\alpha}$ ayant, comme l'on sait, pour limite zéro, la limite cherchée est nulle.

7. Theorême. 1.° *Si, dans une série, le terme général* u$_n$ *ne tend pas vers zéro, la somme de ses* n *premiers termes* a *une infinitude égale à celle de* n.

Si nous supposons que u_n ait une limite K', différente de zéro, on pourra déterminer deux nombres K", K''' tels que l'on ait, à partir d'un terme déterminé

$$K'' < u_{p+1} < K''',$$
$$K'' < u_{p+2} < K''',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$K'' < u_n < K''';$$

et, par conséquent,

$$(n-p) K'' < \Sigma_n - \Sigma_p < (n-p) K'''$$

On a donc

$$\frac{\Sigma_p}{n} + \frac{n-p}{n} K'' < \frac{\Sigma_n}{n} < K''' \frac{(n-p)}{n} + \frac{\Sigma_p}{n}.$$

Le rapport $\frac{\Sigma_n}{n}$ étant, si grand que soit n, compris entre deux limites fixes K', K", on voit que l'infinitude de Σ_n est égale à celle de n.

8. REMARQUE. Si u_n grandit au-delà de toute limite, la démonstration précédente est en défaut et la conclusion à laquelle nous avons abouti est, d'ailleurs, inéxacte.

En effet, dans cette hypothèse, qui ne se présente du reste que bien rarement, on peut poser la suite d'inégalités

$$u_1 > K',\ u_2 > K', \ldots\ldots u_n > K'$$

K' désignant un nombre aussi grand que l'on voudra. On a donc

$$\frac{\Sigma_n}{n} > K'$$

Ainsi $\frac{\Sigma_n}{n}$ croît au-delà de toute limite; l'infinitude de Σ_n est supérieure à celle de n.

9. AUTRE DÉMONSTRATION DU THÉORÉME RELATIF A L'INFINITUDE DE LA SÉRIE HARMONIQUE. On peut rattacher S_n à la fonction Ln par une autre formule que nous allons faire connaître.

Le tableau des inégalités évidentes:

$$1 = 1,$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1,$$
$$\frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{7} < 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^p - 1} < 1,$$

donne

$$S_{2^p-1} < p \tag{1}$$

D'autre part, le groupement qui sert à démontrer que la série harmonique est divergente, donne

$$S_{2^p-1} + \frac{1}{2^p} - 1 > \frac{p}{2}, \qquad (2)$$

Posons

$$2^p - 1 = n,$$

d'où

$$pL2 = L(n+1).$$

Avec cette notation, les inégalités (1), (2) prennent la forme:

$$S_n < \frac{L(n+1)}{L2}, \qquad (1')$$

$$S_n > \frac{L(n+1)}{2L2} + \frac{n}{n+1}. \qquad (2')$$

Cette dernière donne *à fortiori*

$$S_n > \frac{L(n+1)}{2L2}. \qquad (2'')$$

Des inégalités (1'), (2'') on déduit

$$S_n = \theta_n \frac{L(n+1)}{L2}, \qquad (G)$$

θ_n désignant un nombre, variable avec n, mais toujours compris entre 1 et $\frac{1}{2}$ (*)

(Se concluirá)

NUEVO MODO DE CONSIDERAR LA ARITMÉTICA

Las matemáticas llamadas por los antiguos puras, tienden hoy día á dividirse en dos grupos, uno de los cuales se agrega á las Ciencias de observación. Si consideramos por ejemplo la Geometría, vemos

(*) La fórmule (G) n'est établie que pour des valeurs de n qui affectent la forme arithmétique 2^x-1. Il est facile de reconnaître qu'elle subsiste quel que soit n.

En effet; un nombre entier N+1 qui n'est pas nne puissance exacte de 2 est compris entre deux puissances consécutives de 2 et l'on peut poser

$$2^{n'} < N + 1 < 2^{n''}, \qquad (n'' = n' + 1).$$

Par suite, on a

que está basada en multitud de hipótesis que la observacion únicamente puede comprobar, no siendo capaz de ello el raciocinio. El número de estas hipótesis se reconoce hoy que es mucho mayor de lo que primeramente se creía. Afirmando ó negando determinados axiomas se obtienen sistemas diferentes de geometría. Muchas de tales hipótesis se hallan expuestas en los escritos del célebre físico Helmholtz *(Ueber die Thatsachen welche der geometrie zu grunde liegen,* Göttinger Nachr, 1868, y *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome,* Braunschweig, 1876), así como en los de Bernard Riemann *Ueber die Hypothesen welche der geometrie zu grunde liegen,* Göttinger Abh. 1867). Ahora bien, del mismo modo que Gauss, Bolyai y Lobachefsky han construído sistemas geométricos negando el postulado Euclides de las paralelas; así, más recientemente se crean disciplinas en que se niegan otros. Es muy curioso por los datos que á este respecto contiene un artículo del eminente matemático francés

---

$$S_{2^{n'}-1} < S_N < S_{2^{n''}-1},$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{S_{2^{n'}-2}}{L(2^{n''}-1)} < \frac{S_N}{LN} < \frac{S_{2^{n''}-1}}{L(2^{n'}-1)},$$

ou

$$(\alpha)\ \frac{L(2^{n'}-1)}{L(2^{n''}-1}\left[\frac{S_{2^{n'}-1}}{L(2^{n'}-1)}\right] < \frac{S_N}{LN} < \frac{L(2^{n''}-1)}{L(2^{n'}-1)}\left[\frac{S_{2^{n''}-1}}{L(2^{n''}-1)}\right].$$

Le rapport

$$\frac{L(2^{n''}-1)}{L(2^{n'}-1)},$$

en posant

$$2^{n'}-1=x,$$

est égal à

$$\frac{L(2x+1)}{Lx}=\frac{Lx+L\left(2+\frac{1}{x}\right)}{Lx}=1+\frac{L\left(2+\frac{1}{x}\right)}{Lx},$$

il a donc pour limite l'unité, pour x infiniment grand. De cette remarque et de l'inégalité (α) résulte la généralisation de la formule (G) qui a lieu pour t utes les valeurs entiéres, positives, de n.

Mr. Poincaré, referente á la geometría No-Euclidea. La ciencia del espacio, pues, del mismo modo que la del movimiento, depende muy esencialmente de la observación y del experimento, ya que el raciocinio no puede decidir en cuanto á la verdad ó falsedad de sus hipótesis fundamentales. Suponiendo que las consideradas hoy como ciertas fuesen todas falsas, podríamos, sin embargo, formar un cuerpo de doctrina libre de contradicción..

Más, según muy bien dice el Sr. Poincaré, si deseamos un sistema de verdades aritméticas, en oposición del que hoy existe y exento de contradicciones, vemos que es imposible.

La Aritmética es tan invariable como las leyes del juicio; es en una palabra, una rama de la Lógica pura. Siguiendo varios sabios modernamente este criterio, se ha conseguido que á muchas demostraciones empíricas expuestas antes en los autores [1], han sucedido otras llenas de rigor. El concepto fundamental de número entero ha sido perfectamente esclarecido. La marcha indicada, que felizmente inició H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik, Berlín 1861), fué seguida luego por el insigne Santiago Peirce, que además consideró la Aritmética como una rama de la lógica de los relativos. Dedekind y Cantor, dos egregios matemáticos alemanes, han dado definición exacta y rigurosa de lo que debe entenderse por número finito ó infinito de elementos de un sistema, indicando curiosísimas propiedades de la enumeración, antes ignorada ó demostradas insuficientemente.

Mientras que así se establecen con solidez las bases fundamentales de la Aritmética de los enteros, también adelanta el estudío racional de los números fraccionarios y de los incomensurables. Tannery y Meray en Francia (Tannery, *Introduction á la théorie des fonctions d'une variable*, París, 1886. Meray, *Théorie élémentaire des fractions degagée de toute consideration impliquant*, etc. París, 1889). Stolz en Austria (*Vorlesungen über Aritmetik* 1885, Leipzig) y Peano en Italia *(sul concetto di numero II)*, definen perfectamente á los quebrados, con independencia de toda interpretación concreta.

Lo propio han hecho respecto á los números incomensurables Tannery en su obra ya citada, Dedekind en su folleto célebre: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, y el ilustre profesor berlinés Weierstrass en sus lecciones.

El Análisis necesita sólo para sus magníficas y abstractas creaciociones del concepto de número entero positivo, y con esta noción hay bastante para reconstituirlo todo entero. Así lo muestra también entre

(1) Por ejemplo, la referente á que el orden de factores no altera el producto.

otros Leopoldo Kronecker, recientemente fallecido, en un hermoso artículo publicado en el *Journal für Mathematik*, fundado por Crelle, artículo bellísimo en forma y fondo.

El Álgebra ordinaria tiende hoy, pues, á aritmetizarse. Los analistas son cada vez más partidarios del dicho de Gauss: *Las matemáticas son las reinas de las ciencias y la Aritmética es la reina de las matemáticas.*

Y como en suma, la Aritmética es según ya he indicado una rama de la Lógica de los relativos, se comprende bien cuán exacta es la antigua sentencia: *Logica est Ars artium et Scientia scientiarum.* Conforme Peano expone en sus aureos folletos, las leyes que regulan los números son derivación directa de las que rigen el pensamiento humano.

Y si alguno pregunta qué utilidad inmediata pueden tener para la vida práctica actual tales innovaciones, contestaré con Schiller, el inmortal poeta alemán, en su apólogo Arquímedes y el joven:

Wer um die Göttin freit
suche in ihr nicht das Weib.

El adorador de la diosa no debe buscar en ella á la mujer.

PROFESOR DR. VENTURA REYES PRÓSPER.

EL 70.^mo ANIVERSARIO DE M. CH. HERMITE

24 Diciembre de 1892.

I.—Circular del 19 de Octubre de 1892 (*)

MUY SEÑOR MIO: Dentro de algunos meses (**), uno de los más eminentes geómetras de nuestro siglo, M. Hermite, va á cumplir 70 años. Su vida entera se ha consagrado á la ciencia. Desde aquellos precoces trabajos que atraian la atención de Jacobi sobre un joven alumno, hasta su reciente Memoria *Sur les applications des fonctions elliptiques,* ha caminado sin cesar de descubrimiento en descubrimiento. De todos estos esfuerzos se ha creído siempre bastante recompensado por los progresos de sus dos ciencias predilectas, la Aritmética y el Análisis, y no ha buscado ni los honores, ni la gloria.

(*) Traducida.

(**) El retraso sufrido por la publicación de EL PROGRESO MATEMÁTICO desde el mes de Octubre, en que se inauguró el Congreso Pedagógico celebrado en Madrid, ha sido causa involuntaria del retraso en dar á conocer este documento que hoy anteponemos á la relación de la solemnidad científica con que los matemáticos de todo el mundo han honrado al egregio matemàtico gloria de Francia. Z. G. DE G.

Pero si huye de una notoriedad, no rechazará sin duda un testimonio sincero de reconocimiento y de respeto. Por esto es por lo que una multitud de discípulos y admiradores de M. Hermite, cree deber convocar á aquéllos que han seguido sus lecciones, como á aquéllos que las han aprovechado ó que han experimentado de una manera cualquiera su influencia.

Todos, en efecto, le debemos mucho; no solamente su palabra, sus obras y sus consejos han guiado nuestros primeros pasos, pero su vida nos ha dado un gran ejemplo. Nos ha enseñado á amar la ciencia con un amor desinteresado.

Pueda nuestro concurso probarle que esta lección no se haya malogrado y colmar uno de sus deseos más caros dándole la esperanza de que otros recogerán un día la cosecha que tan liberalmente ha sembrado.

Esperamos, señor, que participareis de los mismos sentimientos y juzgareis como medio más adecuado de probar á M. Hermite nuestra admiración el de ofrecerle, con motivo de su 70.^{mo} aniversario, una medalla en que se halle reproducida su efigie, y que confiamos ejecutará uno de los más ilustres grabadores, con una dedicatoria acompañada de las firmas de numerosos amigos de la ciencia.

II.—La ceremonia del 24 de Diciembre de 1892.

El 24 de Diciembre de 1892, á la una de la tarde, una conmovedora ceremonia reunía, en las nuevas salas de la Sorbonne, á los amigos, á los discípulos y á los admiradores de M. Hermite. Tenía por objeto el celebrar el acto de cumplir 70 años el ilustre geómetra, entregándole una medalla grabada por M. Chapelain.

El señor Ministro de Instrucción pública presidia; á sus lados se hallaban los señores Ministro de Suecia y Noruega, el Director de Enseñanza superior, el general comandante de la Escuela Politécnica y el Director de la Escuela Normal superior. M. d'Abbadie, presidente de la Academia de Ciencias (delegado de la Academia pontificia del Lincei) y M. Bichat, decano de la Facultad de Ciencias de Nancy se hallaban al lado de M. Hermite. En frente se hallaban M. Darboux, decano de la Sorbonne, los miembros de la sección de geometría de la Academia de Ciencias, los Sres. Schwarz y Greenhill, representantes respectivamente de la Facultad de Ciencias de Berlín, de la Sociedad Matemátiea de Londres, los Sres Vicaire, presidente de la Sociedad Matemática de Francia, Camille Jordán, delegado del Círculo Matemático de Palermo y Lapparent, delegado de la Sociedad Científica de Bruselas.

En la compacta concurrencia se confundían los miembros del Instituto, profesores de la Sorbonne y de los principales establecimientos científicos de París, las diputaciones enviadas por los alumnos de las Escuelas Normal y Politécnica y los estudiantes de la Sorbonne.

Después del discurso de apertura, pronunciado por el decano de la Facultad de Ciencias, M. Poincaré, tomando la palabra en nombre del Comité, consignó algunas páginas de la gloriosa carrera de monsieur Hermite.

El Sr. Schwarz le presentó las felicitaciones del Sr. Weierstrass su ilustre maestro, y de los Sres. Fuchs y Frobenius sus colegas, entregándole, al terminar, el primer ejemplar de la edición francesa de su obra sobre las funciones elípticas.

M. Jordán presentó enseguida las felicitaciones y telegramas recibidos en esta ocasión de todos los puntos de Europa.

M. Vicaire tomó enseguida la palabra en nombre de la Sociedad Matemática de Francia; M. Bichat en nombre de la villa de Nancy; M. Abbadie en nombre del Instituto de Francia.

M. Hermite contestó á todas estas felicitaciones lleno de emoción,

En fin, el señor Ministro de Instrucción Pública, cerró la sesión con un elocuentísimo discurso, entregando acto contínuo á M. Hermite, en medio de los aplausos entusiastas de la concurrencia, las insignias de oficial superior de la Legión de honor.

Notas que pueden servir para un artículo biográfico acerca de Gerono

Nació Gerono el 29 de Diciembre de 1799 en París, y cuando faltaban unos días para cumplir los 93 años de edad, la muerte le sorprendió el 5 de Noviembre último.

Alumno distinguido en el Liceo de Louis le Grand, donde fué premiado en el concurso general de 1815, Gerono se dedicó á la enseñanza de las ciencias matemáticas en la que ocupó el lugar que justificaba ampliamente su talento.

Sus relaciones con varios geómetras ilustres le designaban para proseguir con algunos años de intervalo la obra tan útil de Gergonne, el fundador de los *Annales de Mathématiques*, y tuvo la gloria de inaugurar la publicación de los *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1842 con un estudio sobre las fracciones contínuas, asociado á Terquem, su activo y notable colaborador que dió la medida de su infatigable entusiasmo en una multitud de artículos y de notas originales.

Sería injusto dudar de la influencia decisiva que ha ejercido sobre la evolución de las ciencias matemáticas en Francia y en Europa esta publicación que hoy ha llegado al 51.^{mo} año de su existencia, dirigida por Gerono desde su fundación en 1842 hasta Octubre de 1886, en que á los 87 años de edad tenía derecho al descanso. Sin embargo, en realidad, fué en el mes de Mayo siguiente cuando se despidió definitivamente de sus numerosos colaboradores.

Gerono era de hecho el decano de los profesores de matemáticas, y de los matemáticos contemporáneos el único que haya escrito en los *Annales de Gergonne*.

Uno de sus discípulos, nuestro sabio amigo Mr. Laisant, ha consignado en una improvisación muy sentida, los títulos de su venerable maestro á la estimación de la posteridad.

Lamentamos que el orador no haya conservado el texto de su discurso; pero éste nos ha ofrecido un testimonio no menos precioso que tenemos la inmensa satisfacción de poner en conocimiento de nuestros lectores, á saber, la carta que Mr. Laisant se ha dignado remitirnos, cuyo contenido es el siguiente:

MONSIEUR ET CHER DIRECTEUR.

Vous me demandez de vous donner un résumé des paroles que j'ai été appelé, sur la demande de quelques amis, à prononcer sur la tombe de M. Gerono. C'est une infirmité de mon esprit, lorsque je suis obligé de parler sans préparation, que de ne pouvoir me rappeler en rien ce que j'ai pu improviser, ni dans le fond, ni dans la forme.

Quant au sens général, je le vois parfaitement, car les pensées qui m'animaient en ce moment sont celles qui m'animent encore aujourd'hui. J'ai rendu hommage au savant qui poussait jusqu'au génie les qualités du bon sens et de la logique, au professeur méthodique, scrupuleux et dévoué dont je m'honore d'avoir été l'élève, et surtout à l'homme de bien dont je suis resté l'ami.

Je crois avoir signalé aussi le grand service rendu par Gerono par la création, en 1842, des *Nouvelles Annales de mathématiques*, qui ont été si précieuses pour l'enseignement et pour la science. Me permettrez vous d'insister sur ce point, alors que je m'adresse au fondateur du PROGRESO MATEMÁTICO, c'est à dire, à celui qui entreprend faire pour l'Espagne ce que mon véneré maître a fait pour la France?

Ces publications, et sourtout celles qui par leur nature même semblent plus particulièrement s'adresser aux élèves, sont un grand bienfait. Soit par les articles ou mémoires, soit simplement par les questions proposées, les journaux de cette nature attirent l'attention sur des points auxquels on n'avait pas réfléchi, provoquent des échanges d'observations, conduisent à la découverte de vérités nouvelles et à un continuel perfectionnement des méthodes.

Et puis, si je peux ainsi parler, ce sont des moyens de recrutement pour la science. Tel élève, qui tout d'abord s'est borné à publier quelques solutions de questions, s'attache graduellement de plus en plus par la lecture du journal à la culture des mathématiques, fait part aux lecteurs de ses découvertes, et devient plus tard un des hommes qui honorent le plus la science.

Pour s'en convaincre en ce qui concerne mon pays, il suffirait de parcourir les tables des matières des *Nouvelles Annales* pendant les premières années.

C'est donc encore une manière de rendre justice à la mémoire de Gerono et à son œuvre, que de souhaiter à votre œuvre tout le succès qu'elle mérite et que vous méritez; et c'est ce que je fais de grand cœur, Monsieur et cher Directeur, en vous envoyant l'asurance nouvelle de mes sentiments les plus sympathiques.

A. Laisant.

* * *

Nada podemos añadir á las interesantes y luminosas observaciones que Mr. Laissant expone con respecto á los periódicos que, como El Progreso Matemático tienen entre sus varios fines el de estimular á la juventud hacia los trabajos de investigación que tanto vigorizan las inteligencias y las hacen útiles lo mismo en la ciencia que en sus aplicaciones. Solo nos queda hacer constar, al mismo tiempo que le expresamos nuestra sincera gratitud por sus frases de simpatía respecto de nuestra publicación, que ésta ha podido vencer hasta ahora los naturales obstáculos anexos á toda empresa naciente por efecto del valiosísimo concurso de cuantos la han honrado con su colaboración, y de cuyos importantes resultados hemos hecho al principio de este número un ligero resumen.

Z. G. de G.

ENRIQUE BETTI

La pérdida del ilustre profesor Enrique Betti, arrebatado á la vida en este año, muy nefasto á las ciencias matemáticas en Italia, es un verdadero luto para los estudios y para los estudiosos. Para los primeros, que le eran ya deudores de tantos y tan originales incrementos y de otros que aun podían esperarse, para los segundos que se habían desde largo tiempo acostumbrado á reverenciar y á amar en él al maestro eficacísimo, al escritor límpido y tildado, al hombre recto, afable con todos, nacido para la pureza del corazón, de la palabra y del pensamiento.

Su egregio discípulo el profesor Volterra, terminaba hace poco una breve pero sustanciosa Conmemoración del *Nuovo Cimento* (*) expresando el deseo de que las «Memorias escritas por Betti y esparcidas en Periódicos y Actos académicos, difíciles de encontrarse, pudieran reunirse en un tomo, que constituiría el más hermoso monumento levantado á un hombre que, esquivo á toda vanidad vulgar, colocaba al frente de sus pensamientos, el amor sincero y desinteresado de la ciencia.» Este elevado deseo puede considerarse satisfecho. La Academia del Lincei, en una reciente sesión, asumió voluntariamente por sí el proyecto de realizar tal publicación, que su ilustre Presidente, el profesor Brioschi, ornará con una biografía del lamentado colega y amigo. Asi la gloriosa obra de éste, tendrá un comentador como no puede esperarse mejor, tanto por su incomparable competencia, como por su continuado afecto hacia el difunto.

Pero sería inoportuna toda nota anticipada á los tesoros de eximia investigación que se hallarán acumulados en el escogido tomo que á los jóvenes estudiosos y á los habituados á altos estudios darán motivo de fecunda admiración y nuevas excitaciones al impulso del ingenio italiano. Aunque me sea permitido desde ahora llamar la atención sobre la importantísima serie de trabajos físico-matemáticos de Betti, que habiendo sucedido á Mossoti en la enseñanza tan gloriosamente inaugurada por éste en la Universidad de Pisa, se envanezca ámpliamente por aquellas hermosas investigaciones, á que dedicó enteramente la segunda parte de su vida científica, y de mantener, casi solo entre nosotros, la representación (y qué representación!) de un orden de estudios demasiado descuidados en Italia, si bien tan dignos cual otros de culto asíduo en el país en que nació Galileo.

Verán los extranjeros, á quienes en gran parte pasaron inadvertidos estos magníficos trabajos cuan profundamente veía Betti en la más nutrida doctrina de todo orden hechos mecánicos y físicos, cuánta delicadeza de análisis derrochó por doquiera, cuánta lucidez y elegancia supo aportar á la solución de difíciles problemas, de cuánta originalidad y potencia estaban dotados los métodos por él elegidos para hacer accesible á la teoría racional muchas nuevas clases de cuestiones.

Estas excelsas dotes de la mente de Betti fueron las mismas que,

(*) Terza seria, tomo XXXII, fasc. luglio-agosto 1892 (publicato il 20 Octubre 1892).

ejercidas en el más modesto campo de la escuela, hicieron tan eficaz la obra de él como maestro, para esperarse con seguridad que hallarán entre sus discípulos más de un valioso continuador. Estas eran el reflejo intelectual de aquella amable sencillez de corazón, de aquél cuyos amigos y colegas guardarán siempre un triste pero dulce y caro recuerdo (*).

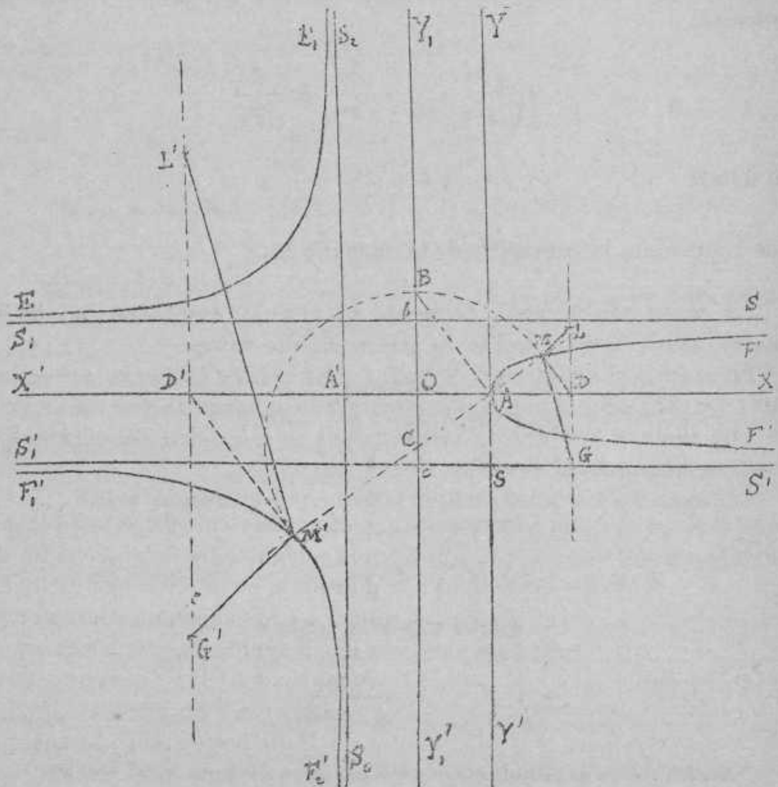
Roma 9 de Enero de 1893.

G. Beltrami.

NOTAS MATEMÁTICAS

NOTA acerca de la cuestión 69 *(t. II, p. 128, 300)*, **por M. H. Brocard.**

Habiendo sido la cuestión 61 objeto de muy interesantes desarrollos por parte del Sr. Schiappa-Monteiro, véase una construcción de



(*) Traducido de *Rendiconti del Circulo Matemático* di Palermo (1 VI. 1892. Nov.-Dicemb.)

la normal á la curva, puede ser que más sencilla, sino más directa.

Sean MD, M'D' perpendiculares á MAM' terminadas en la intersección con AX.

Tracemos por los puntos D, D' paralelas á AY, y tomemos los segmentos DG, DL iguales á AM; D'G', D'L' iguales á AM'.

Las rectas MG, ML, M'G', M'L' son paralelas dos á dos, y una de ellas es la normal en M ó en M', y la otra es paralela á la normal en M' ó en M.

Si, en efecto, se obtiene la ecuación diferencial de las curvas que satisfacen á esta condición, se halla la ecuación

$$y - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y^2}{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

que se integra facilmente por la sustitución $y = ux$, y se reduce entonces á

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

de donde $$u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{ux}{a}$$

que representa la curva (F) de la cuestión 61.

La curva considerada deducida de círculos variables, puede deducirse también de círculos de magnitud constante.

En efecto, si un círculo de radio a se mueve rodando sobre una recta fija AX, se puede proponer trazarle una tangente por un punto A de esta recta, y cortar esta tangente por el diámetro del círculo que pasa por el punto de contacto en la recta fija.

El lugar de las intersecciones tiene por ecuación polar

$$tg \frac{\theta}{2} = \frac{a}{\rho \cos \theta}$$

ó $$x(1 - \cos \theta) = a \operatorname{sen} \theta$$

y $$x^2 = \frac{a^2 y}{y - 2a}$$

NOTA acerca de la cuestión 69 *(t. II, pág. 215 y 306)* **por M. H. Brocard**

Si se forman los primeros valores de u_n se obtiene

$$u_0=0,\quad u_1=1,\quad u_2=2,\quad u_3=5,\quad u_4=10,\quad u_5=21,$$
$$u_6=42,\quad u_7=85,\quad u_8=170,\quad u_9=341,\quad u_{10}=682,\quad \text{etc.}$$

Estos numeros pueden repartirse en grupos de 2 en 2, en los cuales el segundo es doble del primero:

$$\begin{array}{ll} u_1=1, & u_2=2 \\ u_3=5, & u_4=10 \\ u_5=21, & u_6=42 \\ u_7=85, & u_8=170 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

se obtienen además las relaciones

$$u_5=2u_4+1,\quad u_7=2u_6+1,\quad u_9=2u_8+1,\ldots\ldots$$

y $$u_3-u_1=4,\quad u_5-u_3=16,\quad u_7-u_5=64,\ldots\ldots$$

Se obtienen, pues, definitivamente las expresiones

$$u_{2n+2}=\frac{2^{2n+3}-2}{3},\qquad u_{2n+3}=\frac{2^{2n+4}-1}{3}$$

NOTA sobre la fórmula $sen\,(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\,cos\,\beta+sen\,\beta\,cos\,\alpha$.

por M. Aug. Poulain, profesor en Angers.

El Sr. D. Pedro Teixeira ha dado (1892, p. 328) una demostración elegante de esta fórmula, para $\alpha+\beta<\pi$. Se puede abreviar todavía esta demostración.

Construyamos de nuevo el triángulo *abc*, cuyos ángulos son α, β y $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, y cuya altura es *cd*. Escribamos que su área es igual á la suma de los triángulos *cda,cdb*.

Resulta, doblando las áreas

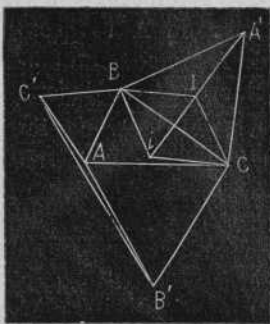
$$ca.cb\text{ sen}(\alpha+\beta)=cd.db+cd.da=ca\text{ sen }\alpha.cb\text{ cos }\beta+cb\text{ sen }\beta.ca\text{ cos }\alpha$$

NOTA del Sr. Van Aubel acerca de la cuestión 79.

«Acerca de la cuestión 79, ignoraba que hubiese sido propuesta por el Sr. Lemoine hace bastantes años (N.A. 1868), de la que EL PROGRESO MATEMÁTICO da dos elegantes soluciones; y debo manifestar que la había remitido tan sólo como una consecuencia de la cuestión número 34 (t. II, pág. 61).

Véase, sin embargo, otras dos soluciones que no necesitan la construcción del punto O en que se encuentran las rectas AA',BB', CC'.

1.ª *solución.* Si sobre los tres lados del triángulo A'B'C' se construyen los triángulos equiláteros B'A"C', C'B"A', A'C"B', los vértices



A, B, C del triángulo que se busca serán los medios de las rectas A'A", B'B", C'C" (*Cuestión* número 34, pág. 61, t. II).

2.ª *solución.* Se demuestra facilmente que el centro *i* del triángulo equilátero construído interiormente sobre el lado B'C' del triángulo A'B'C', coincide con el centro del triángulo equilátero construído interiormente sobre el lado CB del triángulo ABC. De esto se sigue que, siendo I el medio de A'*i*, B y C serán los vértices de los dos triángulos equiláteros construídos sobre *i*I, y A el vértice del triángulo equilátero construído sobre BC' ó sobre B'C.

Nota del Sr. Sollertinsky

A propósito de un problema (T. II, págs. 116 y 180), puede notarse una solución sumamente sencilla:

Si la paralela á la recta dada, trazada por un vértice A *del triángulo dado, encuentra al círculo circunscripto en* A', *la perpendicular de* A' *sobre* BC *encontrará á este círculo en el punto* M *buscado.*

Esta solución es una consecuencia inmediata de una propiedad conocida de la recta de Simson. (Véase *Catalan, Theór et problèmes,* página 36).

CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión núm. 405 (*) (Véase tomo I pág. 207)

Dadas dos circunferencias de las que una pasa por el centro de la otra, construir, con el solo empleo de la regla: Los centros de semejanza y de figura de ambas, las tangentes comunes y los puntos de contacto.

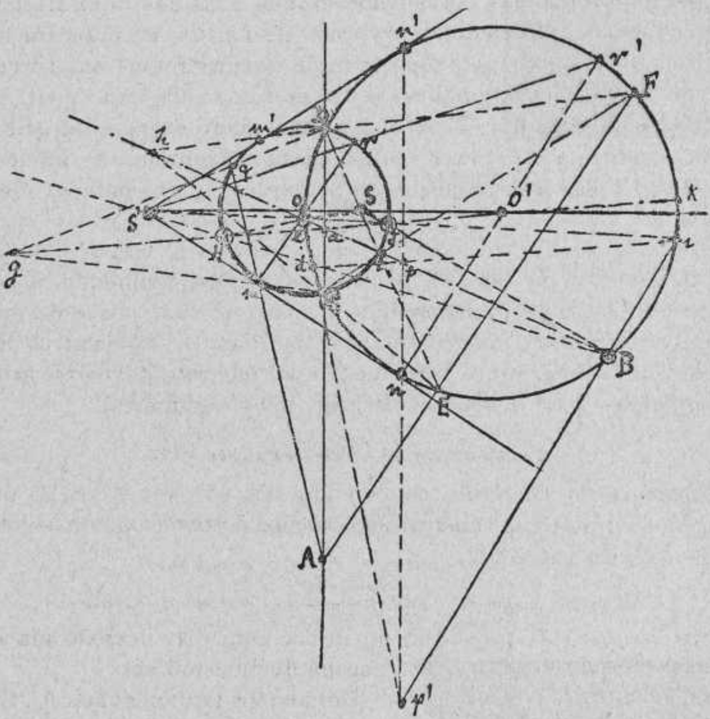
(B. Sollertinsky).

Solución por D. Cecilio Jimenez Rueda, profesor auxiliar de la Universidad de Madrid

Sean las dos circunferencias CDB y CDH, de las cuales la primera pasa por el centro de figura de la segunda. — Trácese la cuerda común CD y tómese en ella un punto arbitrario A; trácese desde A á cada circunferencia una secante arbitraria AEF y A*mq;*

(*) Este uúmero corresponde al J. de M. S. de Longchamps.

únase D con E y C con F, y obtendremos el punto *t*, despues D con F y C con E, y hallaremos el punto *h*; la recta *ht* es la polar de A en la circunferencia CDB. Unase D con *q* y C con *m*, y obtendremos *g*: el punto *a* es el conjugado armónico de A respecto de C y D, y por él han de pasar las polares de A tomadas en ambas circunferencias; luego la recta *ga* es la polar de A en la circunferencia CDH. Se sabe que dos cónicas son siempre homológicas respecto de su cuerda común como eje de homología, y las po-



lares *ht* y *ga* de un mismo punto del eje son rectas homólogas; luego cortarán á las circunferencias respectivas en puntos homólogos Suponiendo que sean homólogos B con H y J con *e*, las rectas que unen estos dos pares de puntos homólogos concurrirán en uno de los centros S' de homología; y si tomamos como homólogos B con J y H con *e*, las rectas de unión se cortarán en el otro centro S de homología. Pero como dos circunferencias tienen siempre otra secante común en el infinito, dichas curvas son siempre homotéticas; por lo tanto los puntos S y S' que para dos cónicas arbitrarias no pasarían de ser centros de homología, son en este caso particular centros de semejanza; la recta SS' que pasa por ellos es la línea de los centros, y el punto O en que corta á la circunferencia DCB será por hipótesis el centro de la DCH. Para determinar el centro O' de DCB bastaría construir con un cuadrilátero completo el conjugado armónico de O, respecto de S y S', para lo cual solo se necesitaría el empleo de la regla; pero tambien se puede construir, como veremos luego, valiéndose de la relación de homotecia de las dos curvas.

Para determinar las tangentes comunes á las dos circunferencias, basta hallar las polares de S' respecto de ambas; en la figura se ha determinado la polar *pp'* respecto de la circunferencia mayor valiéndose del cuadrilátero completo *ied*B del que dos lados *ie* y *d*B pasan por S'; los puntos *u* y *u'* en que dicha polar corta á la circunferencia, son los de contacto de las tangentes comunes, de modo que uniéndolos con S', tendremos estas tangentes; de una manera idéntica se suponen hallados los otros dos puntos de contacto *m* y *m'*.

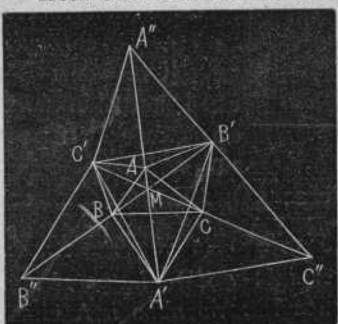
Tracemos ahora el diámetro *mor*; uniendo S' con *r* hallaremos el *r'* homotético de este, el de *m* lo es *u*; luego uniendo *u* con *r'* tendremos el diámetro homotético del *mr*, el cuál nos determinará el centro O' por su intersección con la línea de los centros SS'.—(Puede consultarse sobre esta cuestión á Poncelet, *Propriétés projectives des figures;* part. I, section III, pág. 150 y siguientes).

Cuestión núm. 79 (*Véase tomo II. pág. 279*).

Construir un triángulo conociendo los vértices A, B, C de los triángulos equiláteros construídos exterior é interiormente sobre sus lados.—*(H. Van Aubel.)*

Solución por D. Ricardo Caro, alumno de la Universidad de Zaragoza

Esta cuestión es un corolario de la núm. 34, demostrada en la página 61 de este tomo.



Únanse los puntos dados A', B' y C' formando sobre las rectas trazadas los triángulos equiláteros A"B'C' B"A'C' y C"A'B' (fig. de la página 61) (*) Trácense las rectas A'A", B'B" y C'C" y los puntos medios de ellas, nos darán los vértices del triángulo pedido. (Véase la demostración de D. Angel Bozal de la citada cuestión 34).

(*) Para comodidad del lector reproducimos la figura á que alude el texto.

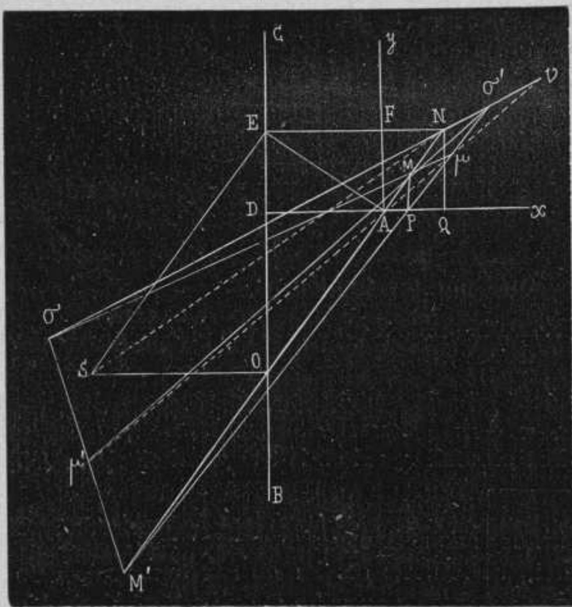
Si los puntos dados A', B' y C' fueran vértices de triángulos equiláteros construídos interiormente, la construcción y demostración serían las mismas, pero aplicadas á la figura de la página 62, (tomo II).

Cuestión 61. *(Véase t. II, pág. 128).*

Hallar el lugar de los focos M *de las hipérbolas que tienen un vértice* A *y una asintota* CB *fijos* (problema clásico). *Dar una construcción gráfica de la tangente en el punto* M. (H. Brocard)

Solución por el Sr. SOLLERTINSKY.

Siendo el punto *M* el foco de una de las hipérbolas, la recta MA encontrará á CB en el centro O de la curva; y el simétrico M' del punto M, con relación á O, será el otro foco.



Sean $AD = a$ la distancia de A á BC, E el punto en que la perpendicular en A, sobre MM' encuentra á BC, F la proyección de A sobre EN.

Siendo el segmento AE igual al semi-eje imaginario de la hipérbola, se tiene $OE = OM$. De esto resulta una construcción por puntos de la curva U, lugar de M.

Se trazan por A dos rectas rectangulares AO, AE, y se toma en estas rectas, á partir de los puntos O, E, á una y otra parte de estos puntos, la longitud OE.

En el triángulo rectángulo OEN se tiene

$$\overline{OM}^2 = \overline{OE}^2 = OA \cdot ON \qquad [1]$$

Luego, siendo P, Q las proyecciones de M y N sobre DA,

$$\overline{DP}^2 = DA \,.\, DQ$$

ó haciendo

$$AP = x, \quad MP = y,$$

$$(a + x)^2 = a^2 + a \,.\, AQ\,.$$

Pero en el triángulo rectángulo EAN se tiene

$$\frac{EF}{FN} = \frac{\overline{EA}^2}{\overline{AN}^2},$$

ó, á causa de los triángulos semejantes EAN y MPA

$$\frac{a}{AQ} = \frac{y^2}{x^2}$$

La eliminación de AQ dará la ecuación de U:

$$y^2(2a + x) - a^2x = 0.$$

Sean: $\mu\mu'$ otra posición de MM'; σ la intersección de las rectas $M\mu$, $M\mu'$.

De la igualdad [1] resulta que N es conjugado armónico de A con relación á MM'. Luego, la tercera diagonal $\sigma\sigma'$ del cuadrilátero $M\mu'M'\mu$ pasa siempre por los puntos N, ν.

Cuando el punto μ llega coincidir con M, las rectas $M\mu$, $M'\mu'$ llegan á ser las tangentes á las curvas descritas por los puntos M, M', N, y concurren en la posición límite S del punto σ.

Del triángulo rectángulo EAN resulta $\overline{AF}^2 = EF \,.\, FN$, ó haciendo $AQ = x'$, $NQ = y'$,

$$y'^2 = ax'$$

Luego el punto N describe una parábola cuyo vértice es A, DA el eje, y a el parámetro. La tangente en el punto N, pasa, pues, por el medio de FA, y por consiguiente, por el medio de EO.

Además, NS como el límite de la diagonal $\sigma\sigma'$, tiene su medio en EO. Luego, para obtener la interseccion S de las tangentes en M y M' á la curva U, se levanta en O la perpendicular á EO hasta la intersección con la paralela á MA trazada por E.

Observación. Designando por X, Y las coordenadas de S, se tiene

$$X = -(2a + x'), \qquad \frac{-Y}{y} = \frac{2a}{2x}$$

y la eliminación de x' é y' da

$$Y^2(2a + X) + a^3 = 0.$$

CUESTIONES PROPUESTAS

99. Sean F_m, U_n, V_{m-n}, R_{n-1} cuatro polinomios algébricos enteros, de grados $m, n, m-n, n-1$ tales, que

$$F_m = U_n V_{m-n} + R_{n-1}$$

Para cierto valor a de x, se tiene

$$F_m(a) = V_n(a) \,.\, V_{m-n}(a).$$

¿Se puede concluir necesariamente que $x = a$ es raíz de la ecuación

$$R_{n-1}(x) = 0?$$

(H. Brocard).

100. *Ejercicio numérico.* Dada la ecuación

$$12\,x^5 - 7x^4 + x^2 - 300 = 0,$$

se pide establecer que no admite más que una sola raiz real, y determinar el valor de esta raiz con seis decimales exactas.

(H. Brocard).

101. Se dan dos rectas rectangulares que se cortan en O. El punto A está sobre la una, el punto B sobre la otra. Se tiene $\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = L^2$.

La envolvente de AB es

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$$

OA es eje de las x, OB el de las y. Estudio de la curva.

(E. Lemoine).

102. Se suponen dos pentágonos regulares, el uno inscrito y el otro circunscrito á un mismo círculo, se pide el radio de este círculo, sabiéndose que la diferencia entre los perímetros de los dos polígonos es igual á A, ó que la diferencia entre sus áreas es igual á B^2.

Aplicaciones numéricas: $A = o^m, 1$; $B^2 = o, m^2 o 1$.

(J. M.) (*) *(Chellier)*

(*) Habiéndonos autorizado nuestro sabio colaborador y amigo M. G. de Longchamps á reproducir algunas cuestiones no resueltas en los periódicos de que es director, tenemos la satisfacción de publicarlas aquí, sea textualmente, sea con ligeras variaciones acompañándolas con la indicación (J. M.) para señalar su origen.—Z. G. DE G.

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.