Año II Zaragoza 15 Noviembre de 1892 Núm. 23

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOBRE LAS IGUALDADES DE DOS GRADOS (*)

POR EL SR. G. DE LONGCHAMPS
Profesor en el Liceo de San Luis de París.

1. DEFINICIONES PRELIMINARES.— El general Frolow ha presentado accidentalmente á la Academia de Ciencias (**) una Memoria sobre lo que ha propuesto llamar *las igualdades de varios grados.*

Recordaré desde luego la definición que sirve de base á la Memoria citada, y, para limitarme, consideraré solamente en esta Nota *las igualdades de dos grados.*

Cuando dos series de números

$$a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_p, \qquad \alpha_1, \; \alpha_2, \ldots \alpha_p$$

satisfacen simultáneamente á las dos igualdades

$$a_1 + a_2 + \ldots + ap = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + ap^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2$$

que se pueden escribir más sencillamente

$$\Sigma a = \Sigma \alpha, \qquad \Sigma a^2 = \Sigma \alpha^2,$$

diremos con el general Frolow, que estos números verifican una igualdad de dos grados (***).

(*) A pesar de que este artículo se publicó en el año 1889 en *Journ. de Math. élémentaires* del Sr. Longchamps, creemos que será oportuno el ofrecer á los lectores de EL PROGRESO MATEMÁTICO su traducción, por las curiosas y poco divulgadas propiedades que en él se desenvuelven por su autor.

(**) *Comptes-rendus*, séance du 19 novembre 1888. Véase también el *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1889, p. 69.

(*) Para demostrar, por un ejemplo evidente, la existencia de estas igualdades, basta tomar la serie

$$\begin{array}{lll} ab, & bc, & ca; \\ ba, & cb, & ac; \end{array}$$

designando a, b, c cifras cualesquiera ($ab = 10a + b; \ldots$)

Igualmente

$$\begin{array}{lll} abc, & bca, & cab; \\ acb, & bac, & cba; \text{ etc.} \end{array}$$

Si N es un número, y ν una cifra en el sistema de numeración que adoptamos, de base θ; entonces el símbolo $N\nu$ representa, en la convención ordinaria, el número obtenido escribiendo ν á la derecha de N.

Según esto, se tiene

$$N\nu = N \times \theta + \nu$$

Para más sencillez en la redacción que sigue, supondremos $\theta = 10$, y tendremos

(1) $$N\nu = N \times 10 + \nu.$$

Esta igualdad prueba que se tiene

(2) $$(N\nu)^2 = N^2 \times 100 + 20N \times \nu + \nu^2\ (*)$$

identidad evidente que utilizaremos en los desarrollos que siguen.

Para evitar repeticiones se sobreentenderá que las letras

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \qquad a, b, c, \ldots$$

representan *cifras*.

2. Teorema.— *Si*

(3) $$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \qquad a, b, c, \ldots$$

constituyen una igualdad de dos grados; los números

(4) $$\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha, \ldots \qquad ab, bc, ca, \ldots$$

poseen la misma propiedad.

Razonemos con tres cifras.

1.º Tenemos

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$ab + bc + ca = 11(a + b + c)$$

Por consiguiente, la igualdad

$$\alpha+\beta+\gamma=a+b+c,$$

conduce á la siguiente

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=ab+bc+ca.$$

2.º Falta verificar que

$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

Ahora

$$(\alpha\beta)^2=100\,.\,\alpha^2+\beta^2+20\alpha\times\beta$$

y por consiguiente

$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2=101(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+20(\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha)$$

(*) Conviene notar aquí, con cuidado, la diferencia que existe entre las dos escrituras $N\nu$ y $N \times \nu$.

Pero

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha)$$

De estas dos igualdades se deduce

$$\text{(F)} \qquad (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2=91(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+10(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

Según esto, si las series (3) forman una igualdad de dos grados, lo mismo sucede con las series (4).

Ejemplo (*). — Las cifras

$$1,\ 6,\ 8 \qquad 2,\ 4,\ 9$$

forman una igualdad de dos grados, puesto que se tiene

$$\begin{array}{l|l} 1+6+8=15 & 1^2+6^2+8^2=101 \\ 2+4+9=15 & 2^2+4^2+9^2=101 \end{array}$$

Los números

$$16,\ 68,\ 81; \qquad 24,\ 49,\ 92;$$

forman también una igualdad de dos grados, se tiene, en efecto:

$$\begin{array}{l|l} 16+68+81=165, & 16^2+68^2+81^2=17441, \\ 24+49+92=165, & 24^2+49^2+92^2=11441. \end{array}$$

3. Teorema.— *Si las dos series*

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$
$$ab+bc+ca$$

forman una igualdad de dos grados, las series

$$\beta\alpha,\ \gamma\beta,\ \alpha\gamma;$$
$$ba,\ cb,\ ac;$$

forman también una igualdad de dos grados.

1.º Se tiene

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11(\alpha+\beta+\gamma)$$

y asi mismo

$$\beta\alpha+\gamma\beta+\alpha\gamma=11(\alpha+\beta+\gamma)$$

de donde

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\beta\alpha+\gamma\beta+\alpha\gamma.$$

De esta observación se concluye

$$\beta\alpha+\gamma\beta+\alpha\gamma=ba+cb+ac.$$

(*) Este ejemplo está tomado de la Memoria del general Frolow (*Bulletin de la Société mathématique*, 1889, p. 75).

2.º La fórmula (F), arriba establecida, prueba que se tiene

$$(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2=(\beta\alpha)^2+(\gamma\beta)^2+(\alpha\gamma)^2,$$

luego, etc.

EJEMPLO.— Hemos hallado que las series

$$16,\ 68,\ 81$$
$$24,\ 49,\ 92$$

constituyen una igualdad de dos grados. Según el teorema precedente, las series

$$61,\ 86,\ 18;$$
$$42,\ 94,\ 29;$$

gozan de la misma propiedad.

Se tiene, en efecto,

$$61+86+18=165 \qquad 61^2+86^2+18^2=11441$$
$$42+94+29=165 \qquad 24^2+49^2+92^2=11441$$

4. TEOREMA.—*Sean*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \qquad a,\ b,\ c$$

cifras que forman una igualdad de dos grados; los números

$$\alpha a,\ \beta b,\ \gamma c, \qquad a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma$$

forman también una igualdad de dos grados.

En efecto, haciendo

$$\alpha+\beta+\gamma=a+b+c=\mathrm{S},$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a^2+b^2+c^2=\mathrm{T},$$
$$\alpha\times a+b\times\beta+c\times\gamma=\mathrm{P},$$

se tiene

$$\alpha a\beta+b+\gamma c=a\alpha+b\beta+c\gamma=11\mathrm{S}$$
$$(\alpha a)^2+(\beta b)^2+(\gamma c)^2=(a\alpha)^2+(b\beta)^2+(c\gamma)^2=101\mathrm{T}+20\mathrm{P}$$

EJEMPLO.— Con las cifras ya empleadas se obtienen, por aplicación del teorema precedente, las series

$$12,\ 64,\ 89;$$
$$21,\ 46,\ 98;$$

que constituyen una igualdad de dos grados. Se puede verificar, en efecto, que

$$12+64+89=21+46+98=165$$
$$12^2+64^2+89^2=21^2+46^2+98^2=12161$$

5. Se generalizarán sin dificultad las propiedades precedentes de las que se pueden deducir varios corolarios. Por otra parte, por aplicación del método indicado, se establecen fácilmente otras proposiciones análogas. Véase, para cada ejemplo, la marcha que debe seguirse.

Llamemos *características* de una serie dada A, B, C,... las cantidades ρ, σ.

$$\rho = A + B + C + \ldots \qquad \sigma = A^2 + B^2 + C^2 + \ldots$$

y hagamos

$$\tau = \frac{1}{2}(\rho^2 - \sigma) = \Sigma AB$$

Á esta serie se puede agregar, de una infinidad de maneras, otra serie

$$A', B', C', \ldots$$

cuyos diferentes términos son funciones de las cantidades dadas A, B, C, ...

Suponiendo que dos series formen una igualdad de dos grados; para ver si las series agregadas gozan de la misma propiedad, se debe verificar que sus características son iguales.

Así, para citar el caso más evidente, siendo de dos grados las series

$$\left.\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma; \\ a, & b, & c; \end{matrix}\right\} (\rho, \sigma, \tau)$$

siendo de dos grados las series

$$\begin{matrix} \beta+\gamma, & \gamma+\alpha, & \alpha+\beta; \\ b+c, & c+a, & a+b; \end{matrix}$$

son también de dos grados; y sus características son

$$2\rho \quad \text{y} \quad 2\sigma + 2\tau$$

Ejemplo.— Las series arriba consideradas dan

$$14,\ 9,\ 7; \qquad 13,\ 11,\ 6;$$

Igualmente las series

$$\alpha\beta\gamma,\ \beta\gamma\alpha,\ \gamma\alpha\beta; \qquad abc,\ bca,\ cab;$$

dan las igualdades de dos grados, cuyas características son

$$111\rho, \quad 10101\sigma + 2220\tau.$$

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

CONTINUACIÓN (Véase págs. 195-207)

24. PROPOSICIONES CONTRARIAS.—Hay teoremas contrarios de otros que se forman negando la hipótesis y la tesis de éstos.

Ejemplos: Los teoremas. *Todo punto situado* EN *la perpendicular levantada á una recta en su punto medio,* EQUIDISTA de sus extremos: *Si dos rectas forman con una secante* ÁNGULOS ALTERNOS Ó CORRESPONDIENTES IGUALES, *serán paralelas,* tienen por contrarios los siguientes; *Todo punto situado* FUERA *de la perpendicular levantada á una recta en su punto medio* DISTA DESIGUALMENTE de los extremos de ésta. *Si dos rectas forman con una secante* ÁNGULOS ALTERNOS Ó CORRESPONDIENTES DESIGUALES, NO serán paralelas.

25. Hay muchas cuestiones que tienen cuatro partes ó que están expresadas completamente por cuatro teoremas: dos directos, contrarios entre sí, y sus dos recíprocos.

Ejemplos: A la cuestión de la posición de un punto respecto á los extremos de una recta, se refieren los teoremas:

1.° — (Directo afirmativo).

Todo punto situado en la perpendicular trazada á una recta en su punto medio, equidista de sus extremos.

2.° — (Directo negativo).

Todo punto situado fuera de perpendicular trazada á una recta en su punto medio, dista desigualmente de sus extremos.

3.° — (Reciproco afirmativo).

Todo punto que equidista de los extremos de una recta, se halla en la perpendicular trazada á ésta en su punto medio.

4.° — (Reciproco negativo).

Todo punto que dista desigalmente de los extremos de una recta, está fuera de la perpendicular trazada en su punto medio.

A la cuestión de una recta que corta á otras dos, se refieren los teoremas;

1.ª — (Directo afirmativo).

Si á dos rectas paralelas se corta por una secante, formarán con ésta ángulos alternos-internos iguales.

2.° — (Directo negativo).

Si á dos rectas no paralelas se corta por una secante, formarán con esta ángulos alternos-internos desiguales.

3.° — (Reciproco afirmativo).

Si dos rectas forman con otra ángulos alternos-internos iguales, serán paralelas.

3.° — (Reciproco negativo).

Si dos rectas forman con otra ángulos alternos-internos desiguales, no serán paralelas.

CAPITULO II

Análisis geométrico

15. El análisis geométrico, generalmente atribuído á Platon (1), consiste en suponer lo que se busca como obtenido, y caminar de consecuencia en consecuencia hasta llegar á reconocer como cierto ú obtenido lo que se trata de demostrar ú obtener. Así Euclides en el libro trece de sus *Elementos* lo define diciendo que «El Análisis es la admi»sión de la cosa buscada como obtenida para deducir de ella conse»cuencias que conducen á alguna verdad admitida». Pappo (Pappus) de Alejandría, que admite dos géneros de análisis, el *teorético* cuyo objeto es la demostración de la verdad y el *problemático* cuyo objeto es la ejecución de algo propuesto, dice; «En el género *teorético*, suponien»do cierto aquéllo de que se trata, y considerando como verdaderas »las consecuencias que se deducen, como lo son en efecto según la »hipótesis, avanzamos hasta que llegamos á algo conocido. Si esto es »cierto, la proposición lo será también, y la demostración se verificará »en sentido inverso al del análisis. Pero si hemos llegado á algo falso, »la proposición será por sí falsa. En el género *problemático*, conside»ramos como ejecutado lo que se ha propuesto; y según las conse»cuencias que resultan, tratamos de llegar á algo conocido. Si esto es »posible y factible, lo que los geómetras llaman *dada*, la propuesta lo »será también, y la demostración se hará en sentido inverso al del »análisis. Pero si aquéllo á que hemos llegado se reconoce que es im»posible, el problema también lo será. La *determinación* en la discu»sión que enseña cuando, cómo y de cuántas maneras el problema es »posible.

Siguiendo á Duhamel (1) diremos que; «Cuando se busca la demos-

(1) El Sr. Gino Loria, profesor de la Universidad de Gènova, en su obra *Nicola Fergola é la Scuola di matematici che lo ebbe a duce* reivindica para la escuela pitagórica, no sólo la invención del análisis geométrico atribuido á Platon, sino que también la de las secciones cónicas y la de los lugares geométricos (§ 3.º *Una rivendicazione).*

«Recurriendo, en efecto, á la obra magistral de Allmann *(Grek Geometry from Thales to Euclid)* sabremos que la elaboración gradual del *método de análisis geométrico*, mediante el que la matemática se elevó sobre los elementos, es debida á los filósofos pitagóricos, desde el fundador de la escuela hasta Teodoro Cirene y Archita de Tarento, que fueron maestros de Platon en la matemática, y fué practicado por Hipócrates de Chio y *transmitido* solamente de Platón á Leodama de Taso; así como las *secciones cónicas* fueron inventadas por Menechmo..... y en fin, los *lugares geométricos* fueron conocidos y empleados anteriormente á Platón.»

(2) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement.*

»tración de una proposición enunciada, se buscará primeramente si »puede deducirse como consecuencia necesaria de proposiciones ad»mitidas, en cuyo caso deberá ella ser admitida, y quedará demostra»da. Si no se ve de qué proposiciones conocidas puede ser deducida, »se buscará de qué proposiciones no admitida podría serlo, y enton»ces la cuestión se reducirá á admitir la verdad de esta última. Si ésta »puede deducirse de proposiciones admitidas, quedará reconocida »como verdadera, y por consiguiente la propuesta: sino se buscará de »qué proposición no admitida podría deducirse, y la cuestión quedará »reducida á demostrar la verdad de esta última. Y se continuará asi »hasta llegar á una proposición reconocida como cierta; y entonces la »verdad propuesta quedará demostrada.»

Asi, pues, el método qne se llama *análisis* consiste en establecer una cadena de proposiciones que comienza por la que se quiere demostrar, acabando por una proposición conocida, y tales, que partiendo de la primera, cada una sea una consecuencia de la que le sigue; resultando que *la primera es una consecuencia de la última, y por consiguiente verdadera como ella* [1].

16. *Caso en que puede invertirse la dependencia de las proposiciones.* Si dos proposiciones son recíprocas, puede considerarse la segunda como deducida de la primera en lugar de considerar que tiene á la primera por consecuencia. Así, pues, cuando se trata de proposiciones ciertas con reciprocidad, la cuestión se reducirá á *establecer el encadenamiento de manera que cada proposición sea consecuencia de la que le antecede hasta llegar á una reconocida como verdadera.*

17. *Método analítico en la resolución de los problemas.*— El método analítico en la resolución de los problemas consiste en reducir el propuesto á otro en que se trate de hallar nuevas relaciones entre los objetos de que se trata que tengan como consecuencia las correspondientes al primer problema, y así sucesivamente hasta llegar á un problema inmediatamente resoluble. En seguida se retrocederá por un encadenamiento inverso desde el último problema hasta el primero que se encontrará resuelto.

Observación.—Cuando las relaciones sustituídas á las supuestas en el problema primero, no les son recíprocas, toda solución del segundo problema será solución de aquél; pero podría haber resoluciones del primero que no lo fueran del segundo.

En el caso de ser recíprocas las condiciones de los dos problemas, tambien las soluciones del primero lo serán del segundo, de manera

(1) *Idem* pág. 41.

que al resolver éste no se perderá ninguna solución, Por consiguiente: *Si en los problemas que se sustituyan sucesivamente, á partir del propuesto, las condiciones de dos consecutivos son recíprocas, las soluciones del primero son idénticas con las del último y con cualquiera de los demás.*

Cuando las relaciones sustituídas son simplemente consecuencias de las propuestas, toda solución del primero será solución del segundo; pero todas las del segundo no lo son necesariamente del primero. Por consiguiente:

Si de los problemas sustituídos sucesivamente á partir del propuesto, las condiciones de una cualquiera son consecuencias del precedente, las soluciones de uno cualquiera de ellos contienen todas las del propuesto, y pueden contener otras extrañas.

18. Esta hipótesis facilita el obtener una figura, con la cual pueden combinarse otras figuras ó *líneas auxiliares,* que se juzguen como las más adecuadas para llegar á deducir de sus relaciones con la supuesta, la *verdad* ó *resultados* propuestos.

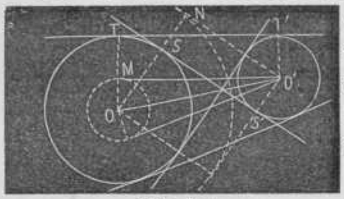


Fig. 5.ª

Ejemplos:

1.º *Trazar una tangente común á dos circunferencias dadas* (figura 5.ª).

HIPOTÉTICAMENTE (análisis), se principia por considerar:

1.º T'T tangente á las dos circunferencias.

2.º De esta hipótesis, unida á las CONSTRUCCIONES AUXILIARES: radios OT y O'T' y la

O'M $\parallel^{a}$ á TT'

resúlta:

O'M tangente á circunferencia de radio R=R', pues

O'M es $\perp$ á OT.

3.º Deduciéndose, en fin que:

TT' es $\parallel^{a}$ á MO'

Este resultado deducido de suponer resuelto el problema con duce.

PRÁCTICAMENTE (síntesis), á la CONSTRUCNIÓN FINAL siguiente.

1.º Trazar la tangente á la circunferencia de rádio R – R', desde O'.

2.º Trazar los rádios OT' y O'T' $\perp$ á O'M'.

3.º Trazar la

$\parallel^{a}$ TT' á MO'

que resuelve el problema.

Así el cuadro:

Hipótesis . .	TT' tangente pedida.	*Construcción final*. . .	O'M tangente á la circunferencia auxiliar.

Construcciones auxiliares ó intermedias. .	radios OT y O'T' que son perpendiculares á TT' y O'M paralela á TT'	Realización de las construcciones auxiliares, antes hipotéticas. . .	OT y O'T' perpendiculares á MO', que son rádios, y TT' paralelas á MO'
Solución final. . . .	Luego: O'M es tangente á la circunferencia auxiliar.	Realización de la hipótesis primera. . .	TT' es tambien tangente á la circunferencia O'

hace ver más claramente que el anterior, la perfecta reciprocidad é inversion del problema en su fase HIPOTÉTICA (análisis), y en su fase REÁL (síntesis ó construcción final).

2.º Sea demostrar que:

Si dado un punto M *de una circunferencia se trazan perpendiculares á cada uno de los lados de un triángulo* ABC *inscripto en la misma,* SUS PIÉS SE HALLARÁN EN LÍNEA RECTA.

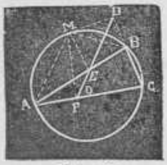


Fig. 6.ª

Supongamos los puntos D, E y F en línea recta, lo cual equivale á suponer,

$$\text{áng. FEA} = \text{áng. BED}$$

De esta hipótesis, unida á las perpendiculares del enunciado y á la construcción de las líneas auxiliares MA, MB, resulta;

$$\text{áng. AMF} = \text{áng. BMD},$$

$$\text{pues áng. AMF} = \text{áng. FEA y áng. BMD} = \text{áng. BED},$$

en los cuadriláteros inscriptibles AMEF y MEBD, en virtud de los ángulos rectos en T, E y D.

Añadiendo á ambos ángulos el ángulo FMB, resulta:

$$\text{áng. FMD} = \text{áng. BMA;}$$

pero áng. FMD es suplemento de áng. C; luego el áng. AMB también lo será: luego *el punto* M *pertenece á la circunferencia.*

SIENDO ESTO CIERTO, también SERÁ CIERTA la relación supuesta

$$\text{áng. DEA} = \text{áng. BEF},$$

y el teorema queda demostrado.

18. El análisis geométrico lleva consigo la necesidad de SUSTITUIR unas cuestiones á otras, y por esta razón puede muy bien llamarse MÉTODO DE SUSTITUCIONES SUCESIVAS.

CAPITULO III

El método sintético

20. La síntesis ya se sabe que es el encadenamiento inverso al obtenido en el análisis geométrico desde que se ha llegado á una proposición admitida ó á un problema inmediatamente resoluble. Solo en este caso el encadenamiento está regulado, ó mejor, calcado sobre el que sirvió en el análisis.

En otro caso, la síntesis no se somete á ninguna regla, pues su éxito depende tan sólo del caudal de conocimientos que posee el que resuelve una cuestión y de la oportunidad con que vienen á su memoria aquellas proposiciones más adecuadas ó más conducentes para llegar al resultado.

Esta indeterminación ó falta de reglas fijas en sus procesos que caracteriza al método sintético está suplida en parte: 1.º por multitud de métodos particulares ó procedimientos. 2.º Por el empleo de ciertos teoremas capitales, que por efecto de sus múltiples consecuencias se constituyen en el hilo conductor de la inteligencia hacia su fin·

21. Estos procedimientos lo mismo se emplean en el método de invención, que contribuyen é formar la síntesis ó el organismo científico, y son: 1.º La *duplicación* de los datos mediante las figuras simétricas. 2.º El *giro* al rededor de un punto. 3.º El *rebatimiento* al rededor de una recta. 4.º El *movimiento* sin deformación de una figura para pasar de una posición á otra, etc.

Todos estos procedimientos corresponden ó son formas diversas del método de *superposición*, que más bien pudiera llamarse de *identificación*, porque lo esencial no es que se haya llegado á la superposición efectiva, sino que se haya demostrado que *existen las condiciones necesarias y suficientes* para dicha superposición, lo cual depende de los teoremas que tratan de los casos fundamentales en la igualdad de triángulos.

La parte de la Geometría que trata de la igualdad se halla constituída por el empleo de estos procedimientos (1).

Otro procedimiento que es el de la demostración *ad absurdum*, aunque, como dice Lacroix (2), es análisis, no siendo método inventivo. Por él no se halla ú obtiene ninguna nueva verdad, pues sólo consiste

(1) Por esta razón hemos dividido nuestra Geometría elemental, 2.ª edición (1888) en dos partes: Teoría de la igualdad y desigualdad y Teoría de la proporcionalidad.

(2) *Essais sur l'enséignement*, etc. (págs. 210-211).

en hacer explícitos dos casos de una proposición implícitamente contenidos en los otros dos que ya se demostraron (directo y recíproco, ó directo y contrario, etc. Véase *Complemento de Geometría, 1881*, ó *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas*, 1877).

Otros métodos particulares son los que sirven para constituir la segunda parte de la Geometría (que en mi *Geometría elemental* he llamado *Teoría de la proporcionalidad geométrica*) y estriban en el empleo de *razón* y la *doble razón* ó *relación anarmónica*. Mediante el primero se determina un punto ó una recta, y de ello tenemos numerosos ejemplos en los tratados elementales, y también sistemas de puntos con relación á otros sistemas *(figuras homotéticas)*. Mediante el segundo, se determinan inmediatamente sistemas de puntos en una recta *(series homográficas y en involución)* ó de rectas al rededor de un punto *(sistemas de haces homográficos y en involución)*.

El empleo de productos conduce á las *figuras inversas*, etc.

Ejemplos: La teoría de igualdad de triángulos y polígonos se basa, ya en la superposición, ya de una manera más breve en los casos fundamentales de la igualdad de triángulos. La teoría de las perpendiculares y oblicuas se halla en el mismo caso. La de paralelas se establece haciendo la superposición mediante un giro. Así al demostrar Lacroix en su *Geometría elemental*, que si dos rectas forman con una secante ángulos alternos internos iguales, son paralelas; hace girar la figura al rededor del punto medio del segmento de secante comprendido entre las dos rectas, para concluir, que, si estas se encontrasen á un lado se encontrarían al otro, y entonces dos rectas tendrían dos puntos comunes sin coincidir; y otros autores, trazando por dicho punto una perpendicular á una de las rectas forman dos triángulos, que al superponerse, mediante el giro, conducen á que *también dicha perpendicular lo será á la otra*; y por consiguiente *serán paralelas*.

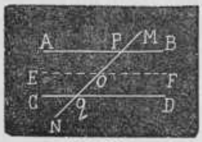


Fig. 7.ª

Las propiedades del paralelogramo se establecen enseguida, como consecuencia de los casos elementales de igualdad ó desigualdad de triángulos, transformando además la condición de paralelismo en igualdad angular ó recíprocamente.

La determinación del *punto* ó de la *recta* por medio de una *razón* constituye una generalización del método de superposición ó de igualdad de triángulos, pues en la primera parte de la Geometría en que se emplean, sólo se trata del caso de la igualdad, ó sea el en que la razón *de segmentos* ó *angular* es igual á la unidad. En este primer caso entra la consideración de rectas especiales, como las *bisectrices*, las *medianas* y las *alturas*. En el segundo caso se puede tratar de *puntos* y de *rectas* cualesquiera, pues una *razón numérica*, entera fraccionada ó aun incomensurable *determinan* un *punto* ó una *recta* correspondientes al valor de la misma.

El principio fundamental de la determinación del punto, se enuncia diciendo que: *En la recta que une dos puntos existen dos y solamente dos tales,* que *la razón de sus distancias á aquéllos es una cantidad dada* (1). Este principio implica ya el concepto de *continuidad*.

El teorema recíproco del siguiente: *Toda paralela* ca *á la base* AC *de un triángulo* BAC, *divide á los otros dos lados en partes proporcionales*, ó sea que: *si* $\frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} = \frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{C}}$ (1) *la recta* ab *será paralela á la base* AB, es un caso particular del teorema de Menelao, el en que la transversal *ca* (figura 8.ª) es paralela á la base, es decir, en que el punto *b* está en el infinito, pues entonces en la relación

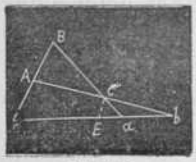


Fig. 8.ª

$$\frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{C}a}\,\frac{\mathrm{C}b}{\mathrm{A}b}\,\frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{B}c} = 1,$$

$\frac{\mathrm{C}b}{\mathrm{A}b}$ tiene que ser igual á 1.

Así, pues, el teorema de Menelao debe seguir á dicho teorema; como el teorema que determina la paralela por medio de ángulos alternos internos iguales sigue al principio de la *existencia* de la paralela (3).

Observaremos, además, que con dichos teoremas se ha hecho un empleo tácito en todos los tratados de Geometría del *triángulo de referencia*, en la Geometría del *plano* y de los *puntos bases* en la Geometría de la *recta*.

Además puede observarse que en el caso de la transversal *ca*, paralela á la base AC del triángulo, el cuadrilátero completo AC*ac*B*b*, tiene el vértice *b* en el infinito, y el lugar geométrico del punto móvil *m* es la mediana BM, lugar de los conjugados armónicos del punto *b* respecto á los lados del ángulo B, lo cual puede demostrarse directamente diciendo que por los triángulos semejantes *mcm'* y *m*MC, *mm'a* y *m*MA, *m'* es la intersección de la mediana BM con la paralela *ca* á la base *m*, es la de las diagonales A*a* y C*c*, resulta

(1) Teniendo en cuenta el signo como se debe, existe *uno solo*.

(2) En el caso de ser la igualdad de productos, queda determinada la recta *antiparalela*

(3) Véase mi *Geometría Elemental*, 1.ª parte, pág 21 (2.ª edición, 1888).

$$\frac{mm'}{m\text{M}} = \frac{cm'}{\text{CM}}, \quad \frac{mm'}{m\text{M}} = \frac{m'a}{\text{MA}}; \text{ luego } \frac{cm'}{\text{CM}} = \frac{am'}{\text{AM}}$$

También por los triángulos Bcm' y BAM, B$m'a$ y BMC,

$$\frac{cm'}{\text{AM}} = \frac{am'}{\text{CM}}; \text{ luego } \frac{\text{AM}}{\text{CM}} = \frac{\text{CM}}{\text{AM}}; \text{ luego AM} = \text{CM}.$$

Después que la razón simple determina un punto en una recta dada por los dos puntos de referencia (los infinitos puntos de la recta están determinados por la serie de valores de esta razón comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$), se determina un punto con relación á otro mediante la doble razón ó relación anarmónica; y desde este momento queda establecida la teoría del punto en la recta, ó la Geometría de una dimensión.

El primer caso que se presenta en la Geometría de la determinación de un punto con relación á otro es el de los *conjugados armónicos* en un triángulo, mediante las bisectrices de uno de sus ángulos (*Geom. Elem.*, p. 2.ª pág. 130); y es claro que esto es independiente de la dirección de la base del triángulo, resultando de aquí determinados el *polo* y la *polar*, con respecto á un ángulo, pues *cada bisectriz es la polar del punto de intersección de la otra con la base del triángulo.*

22. Nos hallamos ya en la línea divisoria de las dos regiones de la Geometría, es decir, la Geometria elemental y la Geometría llamada *superior, moderna, proyectiva,* etc. La primera está caracterizada por el predominio de la idea de *igualdad*, de la que se destaca la de la *proporcionalidad.* La segunda toma como punto de partida este superior concepto de la *proporcionalidad,* que la permite extenderse indefinidamente mediante nuevas relaciones que se derivan por combinaciones ulteriores de este concepto.

En la segunda rama de la Geometría, el empleo de las proporciones resultaría demasiado prolijo y dificultoso; por esto toma como puntos de partida nuevos elementos que condensan en sí ya proporciones, ya otras relaciones más complejas diversamente combinadas.

23. No es posible en la exposición de la ciencia proceder por síntesis rigurosa de lo general á lo particular. Así es que en dicha exposición el análisis suele combinarse con la síntesis, por más que haya predominio de ésta sobre aquél.

Por ejemplo: en la teoría de paralelas se demuestra ante todo que *dos perpendiculares á una recta son paralelas*, y de este teorema se deduce el más general, que *dos rectas que forman con otra ángulos alternos internos iguales, son paralelas.*

En cambio la igualdad de los *triángulos rectángulos* se establece como un caso particular de la igualdad de los *triángulos cualesquiera*

El fin esencial de la Geometría es la *determinación*, y éste se obtiene encadenando unas figuras con otras por medio de las *construcciones auxiliares*, que son en el razonamiento geométrico lo que los términos medios en el razonamiento silogístico, términos medios que deben ser eliminados, reduciéndose la demostración á la *eliminación* de los *elementos introducidos en las construcciones*, unida á la *legitimación de relaciones que los ligan con los extremos.*

24. La Geometría elemental se limita á emplear el *paralelismo,* la *perpendicularidad* y la *bisección* como procedimientos fundamentales que la conducen en su último grado, según ya se ha dicho, al empleo de las proporciones como su *instrumento* de mayor eficacia y de superior generalización.

Aquí de detuvo la Geometría elemental y aquí comienza una nueva rama ó un desarrollo de esta ciencia más amplio, que tiene por punto de partida la relación anarmónica (ó en un caso particular la armónica), conforme hemos también manifestado; y nuestra insistencia en este punto tiene por objeto el presentar algunos ejemplos de eliminación mediante la cual los geómetras de la antigüedad, basándose en el paralelismo de rectas y en la igualdad de razones llegaban á proposiciones de orden superior al de los elementos.

En efecto, los enunciados de los lemas I y II de Pappus son:

I. *Sea la figura* ρbBQPaA, *sea* $\frac{\rho A}{\rho B} = \frac{\rho P}{\rho Q}$, *únase* ms *Se tendrá que* mS *es paralela á* ρB (fig. 9).

II. *Sea la figura* BbQaARPS. *Si* BR *es paralela á* ab *y se tiene además que* $\frac{BA}{AR} = \frac{QP}{PR}$; *los tres puntos* S, m, R están en línea recta.

Demostración.—Para el lema I, trácese por el [.] P la ‖ª PL á Qb, y únase L con A. Se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\rho A}{\rho B} = \dfrac{\rho P}{\rho Q} \ (\textit{hipót.})^{(1)} \\ \dfrac{\rho P}{\rho Q} = \dfrac{\rho L}{\rho b} \ (\textit{constr.}) \end{array}\right\} \text{luego } \frac{\rho A}{\rho B} = \frac{\rho L}{\rho b} \text{ ;luego LA es } \|^{a} \text{ á } b\text{B};$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{luego } \dfrac{ab}{Lb} = \dfrac{aS}{AS}; \\ \text{además } \dfrac{ab}{Lb} = \dfrac{am}{Pm} \ (\textit{constr.}) \end{array}\right\} (a) \quad \begin{array}{l} \text{; luego } \dfrac{aS}{AS} = \dfrac{am}{Pm}; \\ \text{luego PA es } \|^{a} \text{ á } m\text{S.} \end{array}$$

(1) Esta hipótesis equivale en el lenguaje moderno á suponer una involución entre los puntos A, B; P, Q y el punto central ρ (éste corresponde al punto en el infinito R).

Para el lema II (fig. 10), trácese LP $\|^a$ á aA, y únase L con Q. Se tendrá

$$\left.\begin{aligned} &\frac{QP}{BA}=\frac{RP}{RA}\ (\textit{hipót.}),\\ &LP \|^a \text{ á } aA\ (\textit{constr.}) \end{aligned}\right\}\ ;\ \text{luego} \left\{\begin{aligned} &\frac{LP}{aS}=\frac{mP}{ma}=\frac{PQ}{ab} \quad (b),\\ &\text{ó}\ \frac{LP}{QP}=\frac{aS}{ab}=\frac{AS}{AB} \quad (c). \end{aligned}\right.$$

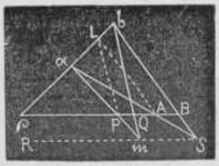


Fig. 9.ª

Siendo, pues (*d*) $\dfrac{LP}{AT}=\dfrac{QP}{AB}$

y además $\dfrac{QP}{BA}=\dfrac{RP}{RA}$ (*hipót.*);

será $\dfrac{LP}{AS}=\dfrac{RP}{RA}$ (*e*);

luego los [.]^s R, m, S están en línea $|^a$ (13, *constr.*)

En la demostración del primer lema, la hipótesis unida á la construcción, permite eliminar el término medio $\dfrac{\rho P}{\rho Q}$; y la igualdad resultante produce la determinación de la recta LA como paralela á bB. Este paralelismo permite á su vez continuar el encadenamiento de nuevos segmentos en proporción, y la eliminación de la razón común $\dfrac{ab}{Lb}$ entre las relaciones (a), conduciendo la igualdad final $\dfrac{aS}{AS} = \dfrac{am}{Pm}$ al paralelismo de PA y mS.

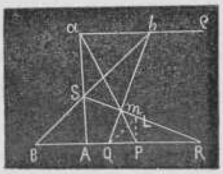


Fig. 10

Z. G. de G.

(*Se continuará*).

NUEVOS PUNTOS DE VISTA EN MATEMÁTICAS

por D. Lauro Clariana

Catedrático de la Universidad de Barcelona

Obsérvanse en la inteligencia humana ciertas irregularidades que desdicen del noble fin á que debe dirigirse, y que se acentúan cuando se trata de que dicha inteligencia siente sus reales en el terreno de la Matemática.

Desde los pristinos tiempos descúbrese en dicha ciencia una como tendencia hacia lo abstracto é indeterminado; empero esta tendencia á la generalización dista mucho de haber adquirido todo su apogeo en la actualidad; aun nos molestan los moldes estrechos entre los cuales nos movemos, no siendo fácil encontrar la línea media que nos debe facilitar el avance en nuestra marcha; por eso, unas veces nos estacionamos, y otras, cansados de buscar el sendero que nos interesa sin hallarlo jamás, en medio de nuestra desesperación tomamos el hacha con la mano para destruir todo lo que se nos presente al paso. Estos dos escollos se manifiestan de una manera muy visible en dos cuestiones fundamentales: en el desenvolvimiento de una función y en el concepto verdadero de cantidad; no parece sino que las neblinas de la Gran Bretaña vengan á empañar el cielo azul y transparente de las naciones del mediodía de Europa.

Vamos, pues, á manifestar en este trabajillo y á grandes rasgos: 1.º Que los conceptos de Taylor procuran un cierto estacionamiento para la ciencia. 2.º Que la teoría de los límites de Newton destruye ciertas cantidades importantes, que no deben confundirse, ni mucho menos despreciarse cuando se trata de ensanchar los conceptos hasta lo último.

Respecto al primer punto, puede decirse que las tentativas de Wronski, Fus, etc. acerca de los desarrollos de funciones en Facultades, factoriales, grupos, etc. demuestran de un modo fehaciente el deseo que se tiene de salirse del estacionamiento en que nos ha colocado Taylor.

Ciertamente que podrá objetarse que esas investigaciones aun no han dado los resultados que fueran de apetecer; pero no por eso debemos desmayar en nuestra empresa; esto es, no debemos cejar en procurar nuevos puntos de vista para el desenvolvimiento de las funciones; véase, si no, el impulso que ha tomado la matemática por la idea feliz de Cauchy al suponer que la variable independiente de una función, en vez de moverse por una sola recta, tome movimientos cualesquiera sin sujetarse á raíl alguno.

Sin embargo, fuerza es confesar que el espíritu de Taylor y Newton hállase tan arraigado entre muchos matemáticos, que, con razón, tememos haya quien encuentre algo exageradas las ideas que apuntamos aquí, si bien tenemos la seguridad de que ellas pueden servir para promover el desenvolvimiento de ciertas inteligencias aletargadas ó demasiado confiadas en sus maestros.

En verdad que cabe preguntarnos: ¿Qué queda de la Matemática si quitamos el teorema de Taylor?

Ciertamente que nadie ignora que, tal como está constituída hoy la ciencia, poco se salva de su influencia; empero ¿es esto razón suficiente para que no procuremos salir de este círculo de hierro en que nos hallamos aherrojados?

¿Las reglas de derivación son las únicas que pueden proporcionarnos funciones que estén enlazadas con las primeras? ¿No hay otras leyes que puedan proporcionar nuevas funciones secundarias? ¿No descubrimos en la teoría de las formas nuevos puntos de vista de más alcance y más complejos? La Jacobiana, por ejemplo, no es un nuevo elemento analítico, que guarda íntimo parentesco con las derivadas, bien que con un carácter más general? ¿No podríamos entrelazar entre sí nuevos determinantes funcionales que guarden conexión con las funciones primitivas, sin necesidad de que apareciera en los términos del desarrollo la marcha pesada y constante de las potencias crecientes y enteras de la variable independiente, origen de las series, elementos sospechosos y expuestos á mil errores, de los cuales van siendo víctimas distinguidos matemáticos?

Ahora bien, si de la primera cuestión pasamos á la segunda, suben de punto nuestras observaciones, pues tenemos la convicción de que el método de los límites debe quedar relegado á la historia como el célebre método de las fluxiones.

En la primera cuestión hemos visto los perjuicios que pueden resultar para la ciencia matemática el ser demasiado esclavos del teorema de Taylor; empero como no se hayan encontrado aún nuevas leyes que puedan venir á sustituirle con ventaja, no estamos en el caso de abandonarlo del todo, si bien estamos en el deber de trabajar para poderlo dar al olvido. No sucede respecto al segundo punto lo propio, pues las discusiones de á últimos del siglo pasado, amén de algunos estudios metafísicos del cálculo hechos por insignes matemáticos en el siglo que se nos va, es suficiente para sentar bases sólidas y exactas sobre la verdadera noción de cantidad, manifestándonos al propio tiempo la pobreza del método de los límites.

En una memoria que tuvimos el gusto de remitir en el último Congreso internacional científico celebrado en París y que mereció la distinción de insertarse en el *Compte rendu* del mismo, dimos á comprender la necesidad que existe de introducir en Matemáticas la cantidad indefinida, como elemento fundamental, lógico y verdadero de la cantidad, extirpando así de una vez el *infinito* y el *cero*, como algoritmos matemáticos. La idea de la variabilidad, siendo la única que nos puede quedar de la cantidad cuando se llega al fin de su generalización, no permite conceder carta de naturaleza á lo que le falte esta nota precisa, como así sucede con el cero y el infinito.

Verdaderamente que en lo indefinido no se encuentra el valor cuantitativo; pero presenta la inmensa ventaja de que la relación por cociente de dos indefinidos puede resolverse dentro de la finitud, fin determinativo de todo problema matemático; además, en la cantidad indefinida pueden establecerse diferentes órdenes, constituyendo esta condición la esencia del cálculo llamado infinitesimal, condición que dentro de la buena lógica no puede concederse ni al cero ni al infinito.

Así, entre lo finito y lo indefinido, dividido en órdenes y referido respectivamente á lo grande y pequeño, establecemos una escala indefinida que, cual notas de la *gamma* musical, se pasa de lo más grave á lo más agudo, aunque dichas notas estén escritas muy lejos del pentágrama, y aunque nuestro oído sea incapaz de apreciar su tono. ¿Hemos de creer, por ventura, que no existe sino lo que pueden apreciar nuestros sentidos? ¿Puede, en ninguna ocasión, todo buen matemático dejar de aunar el mundo de la materia con el mundo de las ideas, siendo la ciencia de que se trata la condensación de dichos dos mundos como reflejo del yo personal? ¿Podemos negar la existencia de la belleza absoluta, porque no llegue á dibujarse en el espacio, ó porque no la alcance la punta del pincel ó la pluma del literato?

Séanos, pues, permitido, en virtud de las razones aducidas, que demos solución á la segunda parte que hemos presentado en este artículo, admitiendo los indefinidamente grandes y los indefinidamente pequeños como únicos elementos para constituir la base de la cantidad en Matemáticas, sintetizados en lo finito, únicos y verdaderos conceptos de cantidad que se enlazan directamente con la diferencial de Leibnitz.

Nadie debe ignorar que en la teoría de los límites se prescinde por completo de esa infinidad de mundos que constituyen los diferentes órdenes de los indefinidamente pequeños, así como de los indefinidamente grandes; el partidario de la escuela de los límites cubre con velo tupido todo aquello que podría mortificarle; podríamos decir que, cual tenedor de libros perezoso, se propone de un solo hachazo destruir todos los edificios comerciales, donde se halla hacinada la riqueza, á fin de evitarse el trabajo ímprobo á que le sujeta el *debe* y el *haber*, con que juega constantemente el capital.

Además, para que desaparezcan de nuestros cálculos en cuanto sea posible el 0, y en particular el signo ∞, podríamas designar los indefinidamente grandes por I y los indefinidamente pequeños por i; de esta suerte evitaríamos que los citados símbolos, desprovistos de variabilidad, vengan á expresar de una manera impropia todos los diferentes órdenes de los indefinidos, resultando, por ende, confusiones sin cuento dentro del análisis, como se puede apreciar cuando se trata de las formas indeterminadas expresadas por $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, &.

En verdad que es difícil averiguar lo que representan estas expresiones según la buena lógica, mientras que si se escribiera

$$\frac{i^m}{i^n}, \quad \frac{I^m}{I^n}, \quad I^m - I^n \;\&$$

en el concepto de que m y n representaran diferentes órdenes de los indefinidos, podríamos fácilmente según fuese

$$m \overset{<}{\underset{<}{=}} n$$

darnos cuenta de cómo se viene á parar á una cualquiera de las tres categorías que hemos señalado para la cantidad.

Hay que advertir, no obstante, que dichas tres categorías de cantidad no deben tomarse de una manera absoluta, pues cabe situarnos en un mundo cualquiera de los muchos indefinidos que existen para colegir inmediatamente cuáles estarán por encima y debajo de nosotros, recabando así las últimas trincheras por donde la inteligencia humana puede extender su vuelo.

Antes de dar término á nuestro reducido trabajo, debemos manifestar que fuera de utilidad que se estudiase desde la geometría elemental la cantidad en sus tres categorías, para que muchas demostraciones no fuesen tan laboriosas y, sobre todo, para que se presentaran más francas, olvidando un poco á los griegos para recordar más á Leibnitz.

De esta suerte, aunando lo moderno con lo antiguo, obrando con libertad de acción, sin irregularidades y con la lógica en la mano se podría algún día manifestar de una manera clara y evidente de lo que es capaz la ciencia Matemática.

INTRODUCTION AUX MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES DE H. GRASSMANN

PAR M. VICTOR SCHLEGEL

Profeseur à l'Ecole Technique de Hagen i/W

(CONTINUACIÓN)

L'équation de $(P_1 P_2)$ est:

$$(P_1\, P_2\, x) = 0,$$

ou

$$\alpha_2 \alpha_3 x_1 + \alpha_3 \alpha_1 x_2 - \alpha_1 \alpha_2 x_3 = 0,$$

ou

$$\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} - \frac{x_3}{\alpha_3} = 0.$$

Et l'équation de $(A_1 A_2)$:

$$(A_1 A_2 x) = 0,$$

ou

$$\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} = 0.$$

En comparant les équations (7) et (24) on reconnait aussitôt la solution du problème: Trouver la droite p conjuguée à un point donné P. — Étant donné, au contraire, une droite

$$p \equiv \beta_1 (e_2 e_3) + \beta_2 (e_3 e_1) + \beta_3 (e_1 e_2),$$

on trouve les coordonées du point conjugué P, en résolvant les équations

$$\alpha_2 \alpha_3 = \beta_1, \quad \alpha_3 \alpha_1 = \beta_2, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \beta_3.$$

9. Soit P un point fixe, P' un point variable. Alors (PP') est un rayon quelconque du faisceau (P), et, en multipliant les équations

(7) $$P \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

(7') $$P' \equiv \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3,$$

on obtient

(25) $$\xi = (PP') \equiv (\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1')(e_1 e_2)$$
$$+ (\alpha_2 \alpha_3' - \alpha_3 \alpha_2')(e_2 e_3) + (\alpha_3 \alpha_1' - \alpha_1 \alpha_3')(e_3 e_1)$$

Soit

(26) $$x \equiv x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

le point conjugué au rayon ξ. Alors, en remplaçant dans l'équation (24) les α par les x, on trouve:

(27) $$\xi \equiv x_3 x_3 (e_2 e_3) + x_3 x_1 (e_3 e_1) + x_1 x_2 (e_1 e_2)$$

donc, en comparant (25) et (27):

$$x_1 x_2 = \alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1', \quad x_2 x_3 = \alpha_2 \alpha_3' - \alpha_3 \alpha_2', \quad x_3 x_1 = \alpha_3 \alpha_1' - \alpha_1 \alpha_3'.$$

En éliminant les coordonnées variables α_1', α_2', α_3', on obtient:

(28) $$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_2 x_3 x_1 = 0.$$

Cette équatión représentant le lieu géométrique du point x, on peut énoncer le théorème:

Si une droite ξ *tourne autour d'un de ses points* P, *le point conjugué* x *décrit une conique passant par les sommets du triangle donné* $(e_1 e_2 e_3)$, *et vice versa.*

III. — Multiplication interiéure.

10. Si l'on égale le segment de droite $(e_1 e_2)$ à l'unité, on obtient:

(29) $$(e_1 e_2) = 1.$$

Alors on peut déterminer chacun des points e_1 et e_2 par l'autre. Pour ce but nous posons

(30) $$e_2 = \mid e_1,$$

et nous appelons e_2 le *supplément* de e_1.

Comme

$$-(e_2 e_1) = 1, \quad \text{ou} \quad [e_2(-e_1)] = 1,$$

on a, selon la définition (30):

(31) $$-e_1 = \mid e_2.$$

On déduit encore de (30) et (31):

(32) $$\| e_1 = \mid e_2 = -e_1$$

(33) $$\begin{cases} (e_1 \mid e_1) = (e_1 e_2) = 1; \; (e_2 \mid e_2) = -(e_2 e_1) = (e_1 e_2) = 1, \\ (e_1 \mid e_2) = -(e_1 e_1) = 0; \; (e_2 \mid e_1) = (e_2 e_2) = 0. \end{cases}$$

Si

(34) $$a \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

la grandeur $\mid a$ est définie par l'équation:

(34a) $$\mid a \equiv \alpha_1 \mid e_1 + \alpha_2 \mid e_2 \equiv \alpha_1 e_2 - \alpha_2 e_1.$$

De même, si

(35) $$b \equiv \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

on a:

(35a) $$\mid b \equiv \beta_1 \mid e_1 + \beta_2 \mid e_2 \equiv \beta_1 e_2 - \beta_2 e_1.$$

Puis:

$$(a \mid b) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2, \quad (b \mid a) = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2.$$

Donc:

(36) $$(a \mid b) = (b \mid a)$$

Si deux grandeurs (points) a et b sont dérivées des mêmes points e_1 et e_2, alors le *produit interieur* de a et b est le produit de l'une grandeur par le supplément de l'autre. On voit de (36) que la multiplicatión intérieure est commutative, et que le trait | peut être regardé comme signe de cette multiplication.

Si l'on pose $b=a$, on a: $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2$, et

(37) $$(a \mid a)=\alpha_1^2+\alpha_2^2.$$

La grandeur

$$(a \mid a)=a^2$$

se nomme *carré intérieur*, et la grandeur

(38) $$+\sqrt{(a \mid a)}=+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$$

valeur numérique de a.

11. Les équations du numéro précédent admettent une autre interprétation, si l'on suppose que e_1 et e_2 soient deux distances égales et normales entre elles, sortant du même point (O). Alors, le signe | peut être identifié avec l'unité imaginaire $i=\sqrt{-1}$. Le produit $(e_1 e_2)$ est l'unité plane (carré, dont l'arête est égale à 1), a et b son deux distances sortant du même point O ($a=$ OA, $b=$ OB), et α_1 y α_2 sont les coordonnées rectangulaires du point A; β_1, β_2 celles du point B.

Supposons, pour simplifier le calcul suivant, que a et b aient la même longueur 1 que e_1 et e_2. Soit en outre

$$\varphi_1=\angle(a e_1),\ \varphi_2=\angle(b e_1),\ \varphi_1-\varphi_2=\varphi;$$

alors on a

$$\alpha_1=\cos\varphi_1,\ \alpha_2=\sin\varphi_1,\ \beta_1=\cos\varphi_2,\ \beta_2=\sin\varphi_2.$$

Puis (34 y 35):

$$(ab)\equiv(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(e_1 e_2)=-\sin\varphi,$$

ou

(39) $$+\sqrt{(ab)^2}=\sin\varphi.$$

De même (34 et 35a):

(40) $$(a \mid b)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=\cos\varphi.$$

Si l'on multiplie encore la distance a par un facteur numérique m, et de même b par n, en posant

$$ma=a_1,\ nb=b_1,$$

on obtient:

(39a) $$\sqrt{(a_1 b_1)^2}=mn\sin\varphi$$

(40a) $$(a_1 \mid b_1)=mn\cos\varphi.$$

Donc on a le théorème suivant:

La valeur numérique du PRODUIT EXTÉRIEUR *de deux distances (*ma *et* nb*) est égal au produit (*mn*) de leurs valeurs numériques et du* SINUS *de l'angle formé par elle; le* PRODUIT EXTÉRIEUR *de deux distances est égal au produit de leurs valeurs numériques et le* COSINUS *de l'angle formé par elles*

Ainsi l'aire d'un parallélogramme formé par les arêtes a_1 et b_1 est représentée également par les deux membres de (39a). (Voir (19)).— Et si a_1, b_1, c_1 sont les arêtes d'un triangle quelconque, et m, n, p leurs valeurs numériques, on obtient, en élévant l'équation

$$a_1 + b_1 = c_1$$

(voir n.° 1) au carré intérieur

$$(41) \qquad a_1\underline{{}^2} + 2(a_1 \mid b_1) + b_1\underline{{}^2} = c_1\underline{{}^2}$$

ou en regardant (40a) et observant que

$$a\underline{{}^2} = m^2, \; b_1\underline{{}^2} = n^2, \; c_1\underline{{}^2} = p^2:$$

$$(42) \qquad m^2 + 2mn \cos \varphi + n^2 = p^2,$$

ce qui est le théorème généralisé de Pythagoras.

12. Si l'on égale le segment de plan $(e_1 e_2 e_3)$ à l'unité, on peut tirer des équations (22a) les suivantes:

$$(43) \qquad \begin{cases} (e_2 e_3) = \mid e_1, \; (e_3 e_1) = \mid e_2, \; (e_1 e_2) = \mid e_3, \\ e_1 \mid = (e_2 e_3), \; e_2 = \mid (e_3 e_1), \; e_3 = \mid (e_1 e_2). \end{cases}$$

Los développements suivants s'effectuent analoguemente comme au n.° 10. De même on donne à ces formules une interprétation relative à l'espace, en suposant que e_1, e_2, e_3 soient trois distances égales et normales entre elles, sortant du même point.

IV.—Multiplication algébrique.—Équation d'une courbe.—Pole et polaire.

13. Soit α une droite quelconque et x un point variable, alors l'équation

$$(44) \qquad (\alpha x) = 0, \quad \text{ou bien} \quad \alpha x = 0$$

dit que le point x est situé sur la droite α (20). Donc (44) *est l'équation de cette droite.* En remplaçant x par sa valeur (26) on trouve:

$$(45) \qquad (\alpha e_1)x_1 + (\alpha e_2)x_2 + (\alpha e_3)x_3 = 0.$$

(Se continuará).

BIBLIOGRAFÍA

Principi di Logica esposti secondo le doctrine moderne di Dr. Albino Nagy. Torino, 1891.— La obra que publicó poco ha el profesor de filosofía del Liceo de Velletri Sr. Nagy resume en un tomo de 214 páginas en 4.º menor los resultados de las investigaciones que en estos últimos años se deben principalmente á los filósofos y matemáticos ingleses y norteamericanos, y que ahora está exponiendo en su obra magistral, de que ya me he ocupado (y aun voy á ocuparme en el número próximo), el sabio matemático y filósofo Sr. Schröder. De manera que la obrita del Sr. Nagy forma una preciosa síntesis de la lógica exacta, ó del Álgebra de Lógica, muy útil para los principiantes, y que debía de corresponder á una asignatura de la 2.ª enseñanza, adecuada para desenvolver el hábito del razonamiento, y de carácter educativo conforme con las tendencias de la época actual.

Distingue el Sr. Nagy la parte de la lógica que considera la forma y no se ocupa del contenido, que deja indeterminado, y que se llama *doctrina de las formas elementales*, de la que se llama *doctrina de las formas sistemáticas* ó *metodología,* que además de la forma tiene en cuenta el contenido (siempre indeterminado), las cuales constituyen la *lógica pura teorética* ó *formal* (en un sentido más estricto) en cuanto estudia la forma del pensamiento dejando, como se ha dicho, indeterminado el contenido, y que tiene un carácter universal como el álgebra, que represente con símbolos cantidades cualesquiera.

La *parte primera* trata de las formas elementales: el concepto, el juicio y el silogismo á que corresponden la palabra, la proposición y el razonamiento; formas independientes entre sí. Define el concepto psicológica, metafísica y lingüísticamente, y sus distinciones absolutas por las que son individuales concretos ó abstractos y generales concretos ó abstractos, así como las relativas, considerando las relaciones fundamentales entre los conceptos, á saber: la *subordinación* (*) (inclusión), la *interferencia* (inclusión ó exclusión parcial) y la *disyunción* (exclusión total), llegando después de muchos ejemplos y consideraciones á definir la *suma* de dos conceptos a y b como el mínimo concepto que contiene á a y b, y su *producto* como el máximo concepto contenido en ambos (**).

(*) Tiene cuidado de distinguir la subordinación de la *subsunción*, teniendo ésta lugar entre el concepto (concreto) de un objeto y el (abstracto) de una cualidad, pudiéndose la subsunción convertir en subordinación, Así: Rosa blanca es una subsunción que se convertirá en subordinación cuando la rosa se considere como objeto blanco.

(**) El Sr. Peano, en su obra *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Gras-*

Pasa á examinar la suma de todos los elementos de un concepto ó su esfera (*extensión*) y el producto de todos los conceptos del que es parte (*comprensión*), la *negación* de un concepto y modo de representarse, así como su representación gráfica mediante las figuras geométricas llamadas *símbolos eulerianos*, las dos operaciones inversas: determinación y generalización, mediante la agregación ó supresión de factores, acompañando como complemento una extensa colección de ejercicios y de problemas.

Expone varias acepciones relativas al juicio de algunos filósofos, distinguiendo de la subordinación la *subsunción*. Trata del caso de la subordinación recíproca ó igualdad, y de los juicios existenciales cuyos símbolos son: $0 < A$, $A = 0$, que expresan: A es, ó A no es, ó no existe. Además, no siendo siempre los términos del juicio (a, b) idénticos á los conceptos por él expresados, presenta dichos términos a y b como funciones de los conceptos A y B

$$a = \varphi(A), \quad b = \psi(B),$$

siendo A y B la materia y φ, ψ la forma. Esto le conduce á considerar la *cantidad* y la *calidad*, la *suma* y el *producto* de juicios y sus relaciones sintetizadas en el cuadrado lógico, que expresa las relaciones en que se hallan las proposiciones como *contrarias*, *contradictorias*, etc. reduciéndolo todo al algoritmo de la Lógica exacta.

Así, representando como es costumbre por a y por e las proposiciones universales afirmativa y negativa, por i y por o las particulares afirmativa y negativa, de

$$a = 1, \text{ se deduce } i = 1, \text{ de } i = 0 \text{ se deduce } a = 0, \text{ etc.}$$

$$\text{De } a = 1 \text{ se deduce } e_1 = 1 \text{ y } e = 0, \text{ de } e = 1, \ a_1 = 1, \ a = 0, \text{ etc.}$$

Trata enseguida de los juicios *disyuntivo* y *conjuntivo*, *divisivo* y *definitivo* ó *definitorio*, teniendo éste lugar cuando son válidos simultáneamente los juicios.

$$a < bd, \ bd < a, \text{ por lo que } a = bd$$

---

mann, que aplica á las *formaciones geométricas*, las *operaciones* de la lógica deductiva designa con la notación $A \frown B \frown C \ldots$ ó $ABC\ldots$ la máxima clase contenida en las clases A, B, C,... ó sea la clase formada por todos los entes que son simultáneamente A, B y C,... ó *conjunción* de la lógica y con $A \smile B \smile C$ la mínima clase que contiene á las clases A, B, C,... ó sea la clase de los entes, que son ó A, ó B,... siendo el signo $\smile$ el de la *disyunción* de la lógica.

Aprovechamos esta ocasión para consignar que el señor Peano ha realizado en varios de sus trabajos esta representación mediante el nuevo algoritmo de las proposiciones geométricas. Véase *I.—Principi de Geometria logicamente esposti* (1889), *Les propositions du cinquième livre d'Euclides reduit en formules*, etc.— (Z. G. DE G.)

Después de reducir el juicio $a < b$ á la forma $ab_1 = 0$ (pues multiplicando por b_1 se tiene $ab_1 < bb_1$, $ab_1 < 0$, y en virtud de la definición del cero, $ab_1 >$ ó $= 0$), y el juicio elemental entre varios conceptos.

$$f(a, b, c, \ldots n) < \varphi(a, b, c, \ldots n) \quad \text{á} \quad f(a, b, c \ldots)\, \varphi(a, b, c \ldots)_1 = 0$$

$$\text{ó} \quad F(a, b, c \ldots) = 0 \quad \text{ó su negación á} \quad F(a, b, c \ldots) > 0,$$

trata del problema que consiste en obtener el número de juicios elementales universales y particulares correspondiente á n conceptos, y termina el capítulo III con una colección muy nutrida de ejercicios muy adecuados para dar á conocer este cálculo aplicado á las diferentes clases de juicios.

El capítulo IV está destinado á exponer la doctrina del silogismo, que comprende: Definición.—Distincion del silogismo.—Transformación y resolución de las relaciones elementales (inversiones, silogismos inmediatos).—Eliminacion de las relaciones elementales (silogismos mediatos).—La figura silogística.—Trasformacion, resolucion y eliminaciones de las relaciones compuestas (silogismos compuestos).

No vamos á seguir paso á paso el desarrollo de la doctrina del silogismo que hace el autor con claridad y sensillez y en conformidad el orden de ideas de que ya estará el lector suficientemente enterado por nuestra reseña, pues, además, ya acerca de la notación que se sigue por el Sr. Nagy hemos hecho también indicaciones pertinentes al objeto.

Nos bastará citar, por ejemplo, de entre todos los modos y figuras del silogismo que examina con arreglo al algoritmo de la Lógica exacta, el siguiente:

Sean las premisas $\quad x < b$ y $a < x$

que se pueden escribir así: $xb_1 = 0$, $ax_1 = 0$.

Multiplicando la primera por a y la segunda por b_1, y sumando, se tiene

$$abx_1 + ab_1x_1 = 0 \quad \text{ó} \quad ab_1(x + x_1) = 0.$$

De esto resulta $\quad ab_1 = 0 \quad$ ó $\quad a < b$.

El capítulo V trata de la *doctrina de las leyes del pensamiento,* ocupándose de las leyes de la *cantidad lógica,* principios de identidad, contradicción, etc.

La parte 2.ª de la obra trata de las formas sistemáticas, que comprende: 1.º La teoría general, en la cual se trata de la *definición* y *división* en general. 2.º La *doctrina sistemática del concepto,* en que explana la teoría de la definicion y de la división á que corresponden respectivamente las fórmulas

$$x = abc \ldots \qquad x = a + b + c + \ldots$$

siendo juicios de identidad conjuntivo y disyuntivo.

O también.

$$x = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad x = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

extendiéndose en varias particularidades, entre ellas el que sean las definiciones *analíticas* ó *sistemáticas, nominales, reales*, etc., terminando con la *clasificación*.

3.° *Doctrina sistemática del juicio*. En este capítulo trata de la argumentación que es *sintética* (ó progresiva y *analítica* (ó regresiva), siendo sus esquemas respectivamente:

$$\text{(directa)} \quad \frac{\alpha > 0 \quad \alpha < \beta}{\beta > 0} \quad \frac{\beta > \alpha \quad \alpha > 0}{\beta > 0} \qquad \text{(indirecta)} \quad \frac{\frac{\beta_1 < \gamma \quad \gamma = 0}{\beta_1 = 0}}{\beta = 1} \quad \frac{\frac{\beta_1 < \gamma \quad \gamma < 1}{\beta_1 < 1}}{\beta > 0}$$

Por último, la *doctrina sistemática del silogismo* conduce al autor á tratar del método en general, del método *inventivo, coordinativo y expositivo.*

Z. G. DE G.

CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión núm. 62 (véase t. II, págs. 128 y 184).

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = a, \qquad \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = b$$

(R. Guimaraes).

Otra solución de M. H. Brocard (véase t. II, pág. 184).

Haciendo

$$a = 2\alpha, \quad b = 2\beta, \quad x + y = t, \quad x - y = z$$

se obtienen las ecuaciones

$$t^3 - 6\alpha t^2 + 3(\beta^2 + 3\alpha^2)t - 8\alpha\beta^2 = 0$$
$$z^3 - 6\beta z^2 + 3(\alpha^2 + 3\beta^2)z - 8\beta\alpha^2 = 0$$

que por las sustituciones

$$t = u - 2\alpha, \qquad z = v - 2\beta$$

se reducen á

$$u^3 + 3(\beta^2 - \alpha^2)\, u + 2\alpha(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

$$v^3 + 3(\beta^2 - \alpha^2)\, v + 2\beta(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

á las que es aplicable la fórmula de *Cardan*, y da para los valores de u y de v las expresiones:

$$u = \mathrm{AB}(\mathrm{A} + \mathrm{B}), \qquad v = \mathrm{AB}(\mathrm{A} + \mathrm{B})$$

donde se ha puesto, para abreviar,

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\alpha + \beta}, \qquad \mathrm{B} = \sqrt[3]{\alpha - \beta}.$$

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro.

De las ecuaciones propuestas se deduce la ecuación homogénea

$$b(x - y)(x^2 + y^2 + xy) = a(x + y)(x^2 + y^2 - xy) \qquad (1)$$

en la que se hace x igual á zy, y resulta,

$$b(z^3 - 1) = a(z^3 + 1) \qquad (2)$$

y por consiguiente,

$$z^3 = \frac{a + b}{b - a} \qquad (3)$$

Sustituyendo ahora x por zy en la primera ecuación propuesta, se tendrá

$$y = a \frac{z + 1}{z^2 + z + 1} \quad (4) \qquad \text{ó} \qquad y = a\frac{z^2 - 1}{z^3 - 1} \quad (5)$$

de donde

$$x = az\frac{z + 1}{z^2 + z + 1} \quad (6) \qquad \text{ó} \qquad x = az\frac{z^2 - 1}{z^3 - 1} \quad (7)$$

Sólo falta reemplazar en estas ecuaciones el valor de z de la ecuación binomia (3).

Observación: En el caso particular en que $a = b$ se tiene $y = \infty$ y $x = a$.

Solución del Sr Sollertinsky.

Dividiendo

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = a \quad (1) \qquad \text{por} \qquad \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = b \quad (2)$$

se obtiene (*)

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{a}{b} \quad \text{de donde} \quad \frac{x^3}{y^3} = \frac{b + a}{b - a} \qquad (3)$$

En fin, restando (2) de (1), después de haber quitado los denominadores, se tendrá:

$$2\,xy = (b + a)\,y - (b - a)\,x$$

de donde

$$x = \frac{1}{2}\left[\,b + a - (b - a)\,\frac{x}{y}\,\right] \ \text{y} \ \frac{1}{2}\left[\,(b + a) : \frac{x}{y} - (b - a)\,\right]$$

Cuestión núm. 12 (Véase t. I, pág. 239).

Sean AB *la tangente en* A *á una circunferencia* O; DE *la polar del punto* A *con relación á otra circunferencia* O′. *Hallar el lugar geométrico de la intersección* M *de las rectas* AB, DE *cuando el punto* A *describe la circunferencia* O.—*Zahradnik.*

Solución por el Sr. V. Retali, profesor en el R. Liceo Beccaria de Milán.

Resolvamos el problema general para dos cónicas C^2, K^2. Sea a la tangente en A á la cónica C^2; a' la polar de A respecto á K^2. Determínese el lugar geométrico del punto (aa') cuando A describe la cónica C^2. En tanto resulta manifiesto que el lugar buscado pasa por los cuatro puntos comunes á las dos cónicas C^2, K^2 y por los cuatro puntos en que la cónica K^2 toca á las tangentes comunes á C^2, K^2.

Cuando A recorre K^2, la tangente a describe un haz de segunda clase y a' otro haz de segunda clase proyectivo con el primero. El lugar del punto (aa'), intersección de los pares de radios homólogos de los dos haces, es, pues, una curva de cuarto orden.

Es fácil ver en seguida que esta curva tiene un punto doble en cada uno de los vértices del triángulo conjugado común á C^2 y K^2.

En efecto, las tangentes á C^2 en los dos puntos x_1, x_2, en los que ésta se halla cortada por un lado x de dicho triángulo, encuentran á las polares de x_1 y x_2 respecto á K^2, en el vértice X opuesto á x; por consiguiente X es un punto doble del lugar. Podemos, pues, concluir que el lugar buscado es una curva de cuarto orden y de sexta clase, y que tiene sus tres puntos dobles en los vértices del triángulo conjugado común á las dos cónicas dadas, que pasan por los cuatro pun-

(*) Se sabe que $x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$; $x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 - xy + y^2)$.

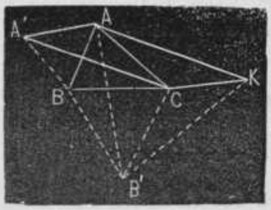
tos comunes á las cónicas supuestas y por los cuatro pnntos de contacto de K^2 con las tangentes comunes á C^2 y K^2.

Cuestión 72 (Véase t. II, pág. 216).

Sean A', B' *los vértices de los triángulos equiláteros construídos exterior ó interiormente sobre los lados* AB, BC *de un triángulo* ABC. *Si sobre* B'A *se construye el triángulo equilátero* B'KA, *el cuadrilátero* A'CKA *será un paralelogramo.*

Solución por D. Ricardo Caro, alumno de la Universidad de Zaragoza.

Primer caso.— Supongamos que los triángulos equiláteros ABA, y BCB', son exteriores al triángulo dado ABC.



Los triángulos B'CK y B'AB son iguales, por tener B'A = B'K y B'B = B'C por lados de triángulos equiláteros, siendo el valor de los ángulos comprendidos

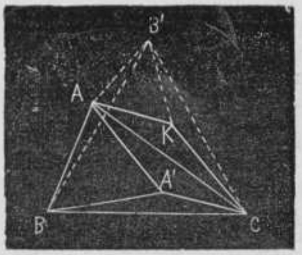
$$\angle BB'A = \angle AB'C - \angle AB'C = 60^o - AB'C$$
y $$\angle CB'K = \angle AB'K - \angle AB'C = 60^o - AB'C$$

Resulta, por lo tanto,

$$KC = AB = AA' \quad (1)$$

También son iguales los triángulos B'BA y CBA', por tener CB=B'B y BA'=BA por lados de triángulos equiláteros, siendo el valor de los ángulos comprendidos

$$\angle CBA' = \angle A'BA + \angle ABC = 60^o + ABC$$
y $$\angle ABB' - \angle B'BC + \angle ABC = 60^o + ABC$$
luego $$CA' = AB' = AK \quad (2)$$



Las igualdades (1) y (2) nos dicen que el cuadrilátero A'CKA, tiene sus lados opuestos iguales; luego es un paralelogramo.

Segundo caso.— Cuando los triángulos equiláteros ABA' y BCB' son interiores al triángulo dado ABC, basta aplicar los razonamientos anteriores á la figura adjunta, para llegar á la demostración.

Cuestión núm. 398 (Véase tít. I, pág. 184). (*)

Desde un punto M *se trazan á una parábola tangentes* MA, MB *que*

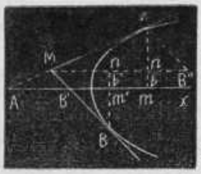
(*) Este número es el de la cuestión en el *Journal de Math. elem.* de M. de Longchamps.

cortan al eje de ésta respectivamente en los puntos A′, B′. *Demostrar que*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$$

Solución por el Sr. Retali, profesor del Liceo Beccaria de Milán.

De este problema se dió ya una solución analítica en la pág. 208, t. I. También puede darse otra solución geométrica sencillísima:



Trácese la cuerda AB (**), y unamos el punto medio C con M. Enseguida trácese por B la paralela al eje de la parábola hasta encontrar á MA en D.

Siendo MC paralela al eje de la parábola, y por consiguiente á la BD, será AM = MD; pero MA′ : MA = MB′ : MB; luego MA′ : AM = MB′ : MB

CUESTIONES PROPUESTAS

93. Hallar el lugar de las proyecciones del centro de una elipse sobre las cuerdas comunes á esta elipse y á sus círculos osculadores.

94. Si en un triángulo ABC se tiene: $1 + 256 \cos A \cos B \cos C = 3\,tg^2\,\omega$ (siendo ω el ángulo de Brocard de ABC), el círculo de *Brocard* y el círculo de *Longchamps* tienen el mismo radio.—(*E. Lemoine*).

95. Entre los números enteros de cuatro cifras sólo hay uno tal, que si se escribe á su derecha el número inmediatamente superior, se obtiene un número de ocho cifras, cuadrado perfecto. Hallar este número.—(*H. Van Aubel*).

96. Supuesto inscripto un triángulo A′B′C′ en otro triángulo ABC, se unen los vértices B y C del segundo á un punto cualquiera O del lado B′C′ del primero. La recta OC encuentra á A′C′ y AB en E y F. OB encuentra á A′B′ en D y AC á A′C′ en F. Demostrar: 1.° que los tres puntos A, D, E se hallan en línea recta; 2.° que las tres rectas BB′, FG, OA′ pasan por un mismo punto.—(*H. Van Aubel*).

97. Se propone establecer de una manera elemental la identidad $\mathrm{tg}\,nA + \mathrm{tg}\,nB + \mathrm{tg}\,nC = \mathrm{tg}\,nA.\ \mathrm{tg}\,nB.\ \mathrm{tg}\,nC$, para $n = 2^t$ (*H. Brocard*).

98. Un círculo vertical de radio dado se mueve rodando sobre un círculo horizontal fijo de igual radio.

Se propone estudiar la superficie reglada engendrada por un diámetro del círculo móvil, (secciones planas, línea de estricción, contorno aparente, pares de generatrices opuestas, etc.—(*H. Brocard*).

(*) La figura adjunta es la publicada para la solución citada que dió D. Nicolás Ugarte, á la que debe agregarse la cuerda AB y la recta MC, y la paralela á MC trazada por el punto B y prolongada hasta encontrar á MA en el punto D.

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.