Año III Zaragoza 15 Septiembre de 1893 Núm. 33

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

REPARACIÓN JUSTÍSIMA

Las sucesivas disposiciones y decretos publicados en la *Gaceta* durante el mes de Septiembre, reponiendo á todos los profesores excedentes de Universidades é Institutos, y organizando algunos estudios, ha puesto fin al estado anormal en que dejó á la enseñanza, así como al profesorado, el decreto de 26 de Junio del año anterior, cuyos resultados contraproducentes ó nulos pronto se dejaron sentir.

Merece mencionarse con preferencia, entre las reformas acordadas por el actual ministro, el Excmo. Sr. D. Segismundo Moret, la consistente en haber creado la sección de ciencias físico-matemáticas en la Universidad de Zaragoza, al mismo tiempo que restablecía la de ciencias físico-químicas suprimida, por ser un acontecimiento favorable para los adelantos científicos cuya promoción nos es tan necesaria.

Plácemes entusiastas y profunda gratitud merece el señor Moret por los actuales beneficios, no sólo de los profesores restablecidos en sus cátedras, sino del país, que podrá disfrutar de estas nuevas facilidades que se le dan para proseguir en la senda de nuestro enaltecimiento moral é intelectual.

El Progreso Matemático, grandemente interesado en estos adelantos de las enseñanzas, se felicita de las iniciativas y excelentes deseos del señor ministro de Fomento y de cuantos á la obra de restaurar en nuestra Universidad la facultad de ciencias han contribuído, y á todos eleva la expresión de su gratitud, al par que les envía sus plácemes sinceros.

TEOREMAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS GEOMÉTRICOS

CONTINUACIÓN (Véase t. II págs. 195-207, y t. III, 171).

CAPITULO II

El método trigonométrico.

41. Concepto general — La trigonometría se puede considerar: 1.º Como un método geométrico, como un capítulo de la Geometría. 2.º Como un algoritmo constituído por las *funciones circulares.*

En la primera acepción, única de que se va á tratar aquí, hallamos que éste método es *una aplicación de la teoría de las proyecciones.* Así, el coseno y el seno son las proyecciones del radio de una circunferencia sobre una dirección ó sobre su perpendicular.

La cuestión fundamental de la trigonometría es la *determinación de ángulos* ó de *direcciones;* y si bien se trata en ella inmediatamente, como se acaba de decir, en el caso particular de ser los ejes de proyección rectangulares, el principio general se refiere á ejes cualesquiera.

Observaremos desde luego que: un sistema de proyecciones está definido por una recta ilimitada sobre la que se fija una dirección positiva y un plano no paralelo á la recta; que *existe una relación constante entre la proyección de un segmento, variable en magnitud, pero de dirección constante, y dicho segmento.*

Ciñéndonos al caso de estar los segmentos y sus proyecciones en un plano, la fig. 36 manifiesta que los segmentos AB, AC,... sus proyecciones A'B', A'C'... y sus proyectantes (ó direcciones, según las en que se efectúa la proyección) determinan triángulos semejantes MA'B', etc., y en éstos, A'B', A'C'... se hallan determinadas con respecto á AB, AC...,

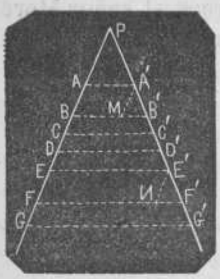


Fig. 36.

(multiplicándolas por el factor $\dfrac{\text{sen A'MB'}}{\text{sen MB'A'}}$ que llamaremos λ), pues, como cantidades proporcionales, de las unas se pasa á sus correspondientes multiplicándolas por un factor λ (en el caso de ser el eje de proyección PG' y la dirección proyectante perpendiculares se tiene que sen $MB'A' = 1$, $\lambda =$ sen $A'MB' =$ cos $MA'B'$, y $A'B' = AB$ cos $MA'B'$).

Resulta, pues, como proposición fundamental de la trigonometría, que:

En un triángulo rectángulo un cateto es igual á la hipotenusa por el *seno del ángulo opuesto ó por el coseno del ángulo adyacente,* ó más generalmente: *Un lado de un triángulo es igual á otro de ellos por la razón entre el seno del ángulo opuesto al primero y el del opuesto al segundo.*

Siendo $\frac{A'B'}{AB}=\lambda$, si $AB=1$, resulta $A'B'=\lambda$, es decir, que cuando el segmento proyectado es igual á la unidad, λ es el número que mide la proyección.

42. DEFINICIÓN DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS Y SUS RELACIONES. Si $OM=1$, entonces $\lambda=\frac{OP}{OM}=OP=\cos MOP$.

El coseno de un ángulo es la relación entre el cateto adyacente y el radio. De esta línea trigonométrica se derivan el seno, la tangente y cotangente que se expresan por las relaciones entre otro cateto y la hipo tenusa, entre el cateto opuesto y el adyacente y entre éste y aquél. Así

$$\frac{OP}{OM}, \frac{MP}{OM}, \frac{MP}{OP}, \frac{OP}{MP}$$

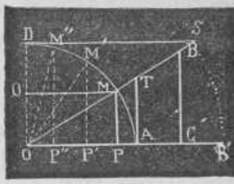


Fig. 37.

Vemos que si OM representa la unidad de longitud, al darse la longitud OP que debe ser su proyección, resulta determinada la dirección de OM en el cuadrante AOD (*); y si hacemos variar OP desde cero hasta OA, á la serie sucesiva de sus valores corresponderán todas las posiciones de OM en el cuadrante AOD; y lo mismo se verá para los otros. Repitiendo estas consideraciones para la proyección según la dirección perpendicular (que corresponde á los senos), también resultará determinada la dirección de OM en cada cuadrante; y si se da simultáneamente una proyección en cada uno de los ejes, la dirección de OM quedará determinada sin ambigüedad.

En resumen: cada triángulo rectángulo de los formados por el giro de OM podrá considerarse como *tipo* de una *especie* de triángulo, y cualquier punto B estará determinado por su triángulo homotético correspondiente OMP, de manera que las longitudes en el triángulo OBC estarán determinadas por las correspondientes del OMP multiplicadas por la razón $\frac{OB}{OM}$, es decir, por el valor numérico de OB (ya que $OM=1$).

(*) Si no se especifica el cuadrante, es decir, en general hay ambigüedad pues á OP (ó á OQ corresponden dos puntos). Es decir, que se necesita efectuar dos proyectos, ó dar, por ejemplo, además del coseno el seno, etc., para que desaparezca la ambigüedad.

Ó de otro modo, estando determinada la dirección OM por el factor directivo $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$, todos los puntos del plano quedarán determinados por la expresión $\lambda(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.

43. Relaciones entre las líneas trigonométricas. — La conocidísima fig. 38 hace ver cómo se establecen las fórmulas que determinan

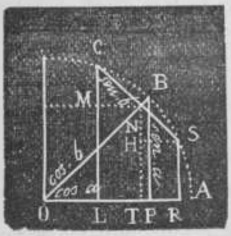


Fig. 38.

$$\operatorname{sen}(a+b),\ \cos(a+b),\ \operatorname{sen}(a-b),\ \cos(a-b),$$

proyectando el contorno ON+NC, ó ON+NS, ya sobre OA ya sobre el eje perpendicular á éste, ó también observando que el radio OC es el producto de los radios $OB = \cos a + i \operatorname{sen} a$ y el que corresponde á $\cos b + i \operatorname{sen} b$.

Las fórmulas que determinan sumas ó diferencias de senos y cosenos se deducen, como se sabe aplicando el teorema fundamental á los triángulos BRC′ y BFR′, cuyos catetos BR, RC′,... son respectivamente

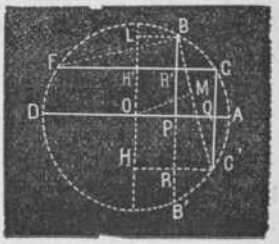


Fig. 39.

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b,\ \cos a - \cos b, \text{ etc.}$$

Si se considera una dirección OM en e espacio, para que la unidad OM quede determinada sin ambigüedad se necesita y es suficiente que OM sea la proyección de tres longitudes tomadas sobre tres ejes tales que ninguno sea paralelo al plano de los otros dos (*), que para mayor facilidad se suponen rectangulares como indica la fig. 40.

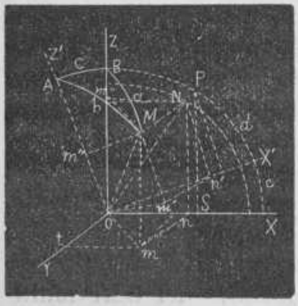


Fig. 40.

Proyectando ortogonalmente el vértice M sobre el plano de la cara AB correspondiente al lado AB del triángulo esférico ABM (fig. 40), ó plano XZ; si por la proyección N se traza una circunferencia de radio ON, que llamaremos r, y suponemos que el radio OA ú OP es la unidad, se tendrá (para los arcos c y d).

(*) Las constantes que determinan la relación de cada segmento con su proyección serán en este caso λ, μ, ν que cuando los tres ejes sean rectangulares, como en la figura ocurre, serán $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, siendo $OM=1$.

$$\text{PS} = \frac{\text{N}n}{r} = \text{sen}\, c \cos d + \cos c\, \text{sen}\, d \qquad [1]$$

$$\text{OS} = \frac{\text{OS}}{r} = \cos c \cos d - \text{sen}\, c\, \text{sen}\, d \qquad [2]$$

Pero $\text{N}n = \text{M}m = \cos a$, $\text{N}n' = r\, \text{sen}\, d = \text{M}m' = \cos b$, hallándose M$m$, N$n'$, M$m'$ respectivamente en los planos ZOm, ZOX, Z'Om', que contienen cada uno de los arcos, a, d, b, cuyos radios correspondientes son r para el segundo y la unidad para los otros dos.

Además On y On son catetos de los triángulos rectangulares Omn y O$m'n'$; luego

$$\text{O}n - = \text{O}m \cos \text{B} = - \text{sen}\, a \cos \text{B}$$

$$\text{O}n' = \text{O}m' \cos \text{A} = \text{sen}\, b \cos \text{A}, \quad \text{O}n' = r \cos d = \text{sen}\, b \cos \text{A};$$

luego sustituyendo en las fórmulas [1] y [2] resulta

$$\frac{\cos a}{r} = \text{sen}\, c \frac{\text{sen}\, b \cos \text{A}}{r} + \cos c \frac{\cos b}{r}$$

$$-\frac{\text{sen}\, a \cos \text{B}}{r} = \cos c \frac{\text{sen}\, b \cos \text{A}}{r} - \text{sen}\, c \frac{\cos b}{r}$$

que son las fórmulas de la trigonometría esférica.

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos \text{A} \qquad (\alpha)$$

$$\text{sen}\, a \cos \text{B} = \text{sen}\, c \cos b - \cos c\, \text{sen}\, b \cos \text{A} \qquad (\beta)$$

y, en fin, siendo

$$\text{O}t = mn = \text{O}m.\, \text{sen}\, \text{B}, \quad \text{O}t = \text{O}m'.\, \text{sen}\, \text{A},$$

por ser Ot la proyección de Om y Om' sobre Oy, resulta la fórmula

$$\text{sen}\, a\, \text{sen}\, \text{B} = \text{sen}\, b\, \text{sen}\, \text{A}\ (^*) \qquad (\gamma)$$

Las funciones circulares originan una especie de cálculo que se complica cuando se refiere á las funciones secundarias tangente y cotangente; y si al principio, como hemos visto, el cálculo y las operaciones gráficas se corresponden, más adelante llega á ser imposible la representación geométrica directa de muchas relaciones. Sin embargo algunas de éstas se han obtenido. Así, para demostrar geométricamente la fórmula

$$\frac{\text{sen}\, p + \text{sen}\, q}{\text{sen}\, p - \text{sen}\, q} = \frac{\text{tg}\, \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tg}\, \frac{1}{2}(p-q)} \qquad (\delta)$$

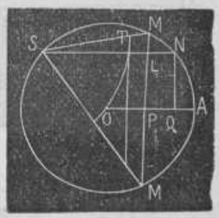


Fig. 41.

(*) *Geom. elemental* (P. 2.ª, págs. 339 y 340) y *Revista de los profesores de Ciencias.* (1876 año III, núm. 3).

tómense los arcos AM $= a$, AN $= b$ (fig. 41). Trácense MPM′ y NQ perpendiculares á OA y NLS paralela á OA. Desde el punto S como centro, con OS por radio, describamos un arco de circunferencia que corte á SN en I, y por este punto tracemos la tangente TIT′ terminada en las rectas SM, SM′.

Se tiene

$$\frac{\mathrm{IT}}{\mathrm{IT'}}=\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LM'}}$$

Pero

$$\mathrm{IT}=\mathrm{tg\ MSN}=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(a-b),\quad \mathrm{IT'}=\mathrm{tg\ M'SN}=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\mathrm{LM}=\mathrm{sen}\,a-\mathrm{sen}\,b,\quad \mathrm{LM'}=\mathrm{sen}\,a+\mathrm{sen}\,b$$

y sustituyendo resulta demostrada la fórmula (γ) (*)

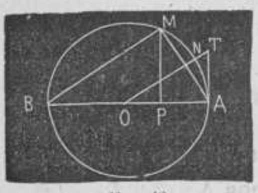


Fig. 42.

También podremos demostrar geométricamente la fórmula

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

En efecto, los triángulos OAT y BPM y los OAT y APM son semejantes (fig. 42); luego

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,a}{1}=\frac{\mathrm{sen}\,a}{1+\cos a},\qquad \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,a}{1}=\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PM}}=\frac{1-\cos a}{\mathrm{sen}\,a}$$

y multiplicando estas fórmulas resulta

$$\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\,a=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}.$$

Sea, por último, la fórmula (**)

Fig. 43.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

que expresa una relación entre los lados y ángulos de un triángulo ABC (fig. 43).

Trazando la semicircunferencia DAE con CA como radio, des-

(*) Véase *Eléments de Trigonométrie*, par l'Abbé E. Gelin (1888), pág. 41.
(**) Idem idem.

de el centro C, las cuerdas AD, AE y la paralela DF á EA, se tiene

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DF}}=\frac{\mathrm{AD}\,cot\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}}{\mathrm{AD}\,cot\,(\mathrm{B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C})}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

44. Los métodos geométrico y trigonométrico. — La geometría hemos visto que funda sus demostraciones acerca de relaciones métricas, en general, en la semejanza de triángulos, y particularmente en el teorema de Pitágoras, que es un principio fundamental de relaciones métricas en el triángulo. Pero, á su vez, el método trigonométrico no es más que un sistema especial de relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, derivado de las relaciones geométricas, siendo el empleo de las líneas trigonométricas un medio indirecto de aplicar las relaciones más simples y primitivas de la Geometría. Los dos métodos no son más que uno solo empleado á distancia distinta del punto de partida. Las relaciones que expresan el uno y el otro son entre sí como las relaciones de una figura expresadas por dos sistemas distintos de coordenadas, puesto que los diversos encadenamientos lógicos mediante los cuales la ciencia se sirve para llegar á la demostración de la verdad ó á fijar los conceptos de un razonamiento en una forma determinada que se llama teorema, son como los encadenamientos de líneas que determinan una figura referida, bien á uno, bien á otro sistema de coordenadas, de igual manera que los encadenamientos lógicos se refieren, bien á uno, bien á otro sistema de principios fundamentales, verdaderos ejes de coordenadas en el razonamiento ó en la concatenación de las ideas.

En cuanto se ha llegado á establecer las fórmulas que enlazan cada línea trigonométrica con los lados del triángulo

$$\cos \mathrm{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ldots\ldots, \ \mathrm{sen}\frac{1}{2}\,\mathrm{A}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}},$$

$$tg\frac{1}{2}\,\mathrm{A}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p(p-a)}},\ \text{etc.}$$

se ha llegado á la posesión de un instrumento precioso para establecer relaciones métricas y obtener por un procedimiento analítico los enlaces que la Geometría obtiene por medio de construcciones de líneas, y par asustituir uno á otro procedimiento con el fin de alcanzar un mismo resultado.

45. Simetría de las relaciones y sus aplicaciones.—La consideración del triángulo tiene la preciosa ventaja de que pudiéndose expresar cada uno de sus lados ó de sus ángulos bajo la misma forma que los otros dos, dichas relaciones triplicadas conducen por combinaciones sucesivas á multitud de expresiones analíticas de numerosas aplicaciones.

Una de estas aplicaciones es la del sistema de coordenadas baricéntricas que permite representar las figuras por medio de expresiones homogéneas que las hace en muchas ocasiones preferibles á las coordenadas cartesianas.

46. Relaciones entre los diversos sistemas de coordenadas.—La trigonometría, además del sistema de coordenadas baricéntricas, ha dado origen al sistema ae coordenadas polares, y aun la consideración simultánea del módulo y el factor binomio que corresponde á la dirección para determinar un punto, le permite representar las expresiones imaginarias y particularmente las raíces de las ecuaciones binomias, estableciendo un enlace entre la Geometría y el Álgebra.

El método trigonométrico, como dice Cournot (*), es un medio indirecto y simulado de aplicar la Geometría analítica que consiste generalmente en sustituir, sea á las coordenadas, sea á los parámetros que entran en las ecuaciones de la Geometría analítica, funciones de estas coordenadas ó de estos parámetros, y en plantear el problema con auxilio de ciertas relaciones derivadas y secundarias.

CAPITULO III

Los métodos de la Geometría proyectiva.

§ 1.º—Métodos generalizados de Poncelet

47. Generalidades *a*).— Define Poncelet las ***figuras proyectivas*** como aquéllas cuyas dependencias son indestructibles por efecto de la proyección, llamando *relaciones* ó *propiedades proyectivas* todas aquéllas que subsisten en las figuras dadas y en sus proyecciones.

Supuesto proyectado desde S un sistema de puntos A, B, C,..... en A′, B′, C′,...... las áreas de cada par de triángulos correspondientes SAB, SA′B′ son como los rectángulos SA.SB y SA′.SB′, de manera

(*) *De l'origine et des limites de la correspondence entre l'Algèbre et la Géométrie*, pág. 232.

que la relación del área de cada uno de estos triángulos al rectángulo que le corresponde es constante, si se llama $\frac{1}{2}m$ á esta relación y p á la altura del triángulo, se tiene

$$\text{Area de SAB} = \frac{1}{2}p.\text{AB} = \frac{1}{2}m.a.b \quad \text{de donde AB}=m.\frac{a.b}{p}$$

Análogamente para otra recta CD se tendrá $\text{CD} = m'\,\frac{c.d}{p}$ (*)

Dada una relación entre las partes de una figura dada ABCD....., observa Poncelet que, para que subsista, cualquiera que sea la posición de los puntos A, B, C, ... ó A′, B′, C′, ... sobre las proyectantes SA, SB, ...; si se reemplazan en vez de las cantidades que entran en dicha relación sus valores arriba obtenidos, deberá ésta satisfacerse independientemente de toda magnitud particular atribuída á las rectas SA, SB, ... ó *a, b, p,* ..... que fijan la posición de los puntos correspondientes A, B, ... y por consiguiente, deberán desaparecer estas rectas ó distancias del resultado de la sustitución, sea por reducciones parciales, sea como factores comunes á todos sus términos.

Entre las relaciones proyectivas son dignas de especial consideración las expresadas por ecuaciones de dos términos, sin denominador, compuestas cada una de un mismo número de factores, que representan simples distancias entre los diversos puntos de una figura dada, y tales que: 1.° *Se hallen las mismas letras en los factores lineales que componen los dos miembros.* 2.° *Que á cada distancia perteneciente á uno de los dos miembros corresponde otra en el segundo que esté en la misma recta que la primera,* tal es, por ejemplo, la relación

$$\text{CA.DB} = \text{DA.CB}$$

que constituye la relación armónica

Fig. 44

$$\frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{\text{DA}}{\text{DB}}$$

Así mismo la relación

$$\text{AP.AP}'.\text{BQ.BQ}'.\text{CR.CR}' = \text{BP.BP}'.\text{CQ.CQ}'.\text{AR.AR}'$$

que traduce el teorema de Carnot.

Si un triángulo ABC *cualquiera situado en el plano de una sección cónica, cuyos lados* AB, BC, AC, *ó*

(*) *Traité des propriétés projectives,* pág. 7.

sus prolongaciones, encuentran, respectivamente, en P *y* P′, Q *y* Q′, R *y* R′ *á esta curva, se verificará dicha relación.*

Esta relación que se verifica en el caso del círculo, en virtud de la propiedad de las secantes trazadas al mismo desde un punto, tiene también lugar para una sección cónica cuya proyección puede considerarse ser un círculo.

Cuando los lados AB y AC son paralelos, el vértice pasa al infinito y la relación anterior se simplifica resultando que:

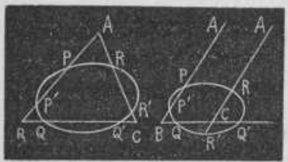


Fig. 45

$$\mathrm{BQ.BQ'.CR.CR'} = \mathrm{BP.BP'.CQ.CQ'}$$

ó

$$\frac{\mathrm{BP.BP'}}{\mathrm{BQ.BQ'}} = \frac{\mathrm{CR.CR'}}{\mathrm{CQ.CQ'}}$$

es decir, que: *el producto de las ordenadas* BP *y* BP′ *está en una relación constante con el de las abscisas correspondientes* BQ *y* BQ′, *para todas las paralelas á* AB.

Aplicando la fórmula obtenida á la fig. 46. se reduce á

$$\frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\mathrm{OA.OB}} = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2}{\mathrm{QA.QB}} \quad \text{ó} \quad \overline{\mathrm{OM}}^2 = p.\mathrm{OA.OB},$$

siendo p una cantidad constante que sólo varía con la direccíón del diámetro AB.

48. Cónicas suplementarias. — Ya se expuso en la *Introducción* (t. II, pág. 85), como se inició una nueva evolución de la Geometría en la época de Pascal y Desargues con el empleo de la perspectiva para la generación de las cónicas y métodos de transformación de las figuras en que se distinguieron La Hire y Le Poivre y también Newton, evolución que vemos presentarse de una manera brillante y vigorosa cuando Monge dió á conocer la *Geometría descriptiva* por la cual sintetizó en un reducido número de principios abstractos y generales multitud de relaciones, por los que se enlazaban de una manera sistemática las figuras de tres dimensiones con las figuras planas, transformándose unas en otras con auxilio de la proyección, y también se hizo especial mención del nuevo método de demostración, por el que rompe completamente con las prácticas de los geómetras griegos, introduciendo el concepto del *imaginarismo* en la Geometría, mediante el cual da unidad á los razonamientos así como á multitud de relaciones que de otro modo sería preciso considerar como aisladas ó distintas, cuando sólo difieren por alguna modificación ó restricción incidental, que no las impiden hallarse sometidas á una ley general común. Y por esta nueva vía se encaminaron Carnot con su Geometría de posición y teoría de la *correlación de las figuras* y Poncelet con el *principio de continuidad* á cuya admisión en la Geometría encaminó sus esfuerzos, siendo uno de los resultados obtenidos con este propósito el que constituye su teoría de las *cónicas suplementarias* y de las *secantes y cuerdas ideales*, las cuales le conducen á establecer definitivamente la grandiosa generalización y unidad con que hoy se nos presenta la Geometría, pues distinguiendo entre lo *imaginario* que implica lo enteramente imposible ó inconstructible en la figura correlativa de otra dada, de lo *ideal* que designa un modo particular de existencia de un objeto, el cual, *permaneciendo real en la transformación de la figura primitiva, cesa de depender de una manera absoluta y real de otros objetos que lo definen gráficamente, porque estos objetos han pasado á ser imaginarios,* aplica este nuevo concepto á las figuras que pasan por todos sus estados ó modos de ser mediante una transformación contínua.

Así, estando los puntos O y O′ ligados en la fig. 46 por la relación armónica

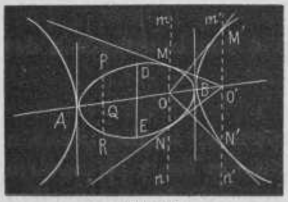


Fig. 46.

$$\frac{O'A}{O'B}=\frac{OA}{OB}$$

mediante la cual pueden construírse independiente de los de intersección M y N de la cónica y la secante *mn*, de manera que al estar determinada cualquiera de las entidades *mn*, *m′n′*, O, O′ quedan determinadas las otras tres, pues dado, por ejemplo, el punto O′ quedan determinadas las dos tangentes O′M, O′N que á su vez determinan la secante *mn* y el punto O de intersección con el diámetro AB, siendo O′ el polo de MN.

Pero permaneciendo la misma la relación entre los puntos O, O′ y las rectas *mn*, *m′n′*, independiente de la existencia de los puntos M y N (que desaparecen cuando *mn* se transforma en *m′n′*), no hay ninguna razón para prescindir de ellos; y así como en Geometría hay palabras tales como las de *infinitamente pequeños, infinitamente grandes* para expresar diversos modos de existencia, debe haberlos para expresar los de la no existencia, con objeto de conservar la analogía entre las ideas y el lenguaje al persistir en considerarla como secante, Poncelet adopta la denominación de *secante ideal* de dicha curva, distinguiéndola de la que es absolutamente inconstructible, que se denomina á su vez *recta imaginaria*. Además O′ será el *centro ideal* de la cuerda imaginaria que determina $m'n'$, O el *concurso ideal* de las tangentes imaginarias que corresponden á los extremos de esta cuerda, ó *cuerda de contacto* relativa á O.

Si habiéndose determinado el diámetro AB (fig. 46) de la sección cónica conjugado á la dirección la secante ideal $m'n'$ que divide, por consiguiente, en dos partes iguales todas las cuerdas que le son paralelas, se toman sobre $m'n'$ dos puntos M′ y N′ que satisfagan á la relación.

$$\overline{O'M'}^2 = p.\, O'A.\, O'B,$$

idéntica con lo que define los puntos M y N, según los que la secante mn paralela á la primera encuentra realmente á la sección cónica, se obtendrá una longitud M′N′ dividida en dos partes iguales por el punto O′, y continuado así la construcción llega Poncelet á construir la cónica suplementaria de la primera que es una hipérbola si ésta es una elipse y viceversa, hallando también que cada cónica tiene infinidad de cónicas suplementarias correspondientes á la infinidad de sistemas de diámetros conjugados.

Con estos preliminares, Poncelet lleva la Geometría á un alto grado de generalización característico de la ciencia moderna, emancipada por completo de las trabas que la restringían en la época griega, que ya hemos visto está caracterizada por el empleo de las proporciones y por el espíritu de individualización.

Al aplicar Poncelet su nueva teoría á los sistemas de cónicas ó de círculos que tienen una cuerda real ó ideal común (*), distingue desde luego en la serie de círculos que tienen una secante ideal común, los dos de dimensiones infinitamente pequeñas que llama *puntos ó círculos límites*, de capital importancia en las cuestiones que trata, puntos reales cuando la cuerda común es ideal, é imaginarios cuando ésta es real; y puede con auxilio de los nuevos principios tener en cuenta los puntos reales ó ideales de las cónicas en el infinito al estudiar la sección cónica *que contiene todos los puntos recíprocos de los de una recta dada en el plano de una serie de círculos que tienen una secante común*. Así, dicha sección cónica, además de pasar por los dos puntos límites del sistema de círculos (C), (C′),... pasa por dos puntos en el infinito pertenecientes á la secante común mn y á una perpendicular á la recta dada ó directriz, pudiendo deducir que *dos hipérbolas semejantes*

(*) *Traité des Propriétés projectives* (t. I, págs. 35-50).

y semejantemente colocadas tienen una secante común en el infinito, y si dos elipses son semejantes y están semejantemente situadas en un plano, existe una infinidad de sistemas de hipérbolas suplementarias á ellas, relativamente á direcciones dadas cualesquiera, cuyos diámetros de contacto son paralelos ó concurren en el infinito, de manera que, para cada uno de estos sistemas, las hipérbolas suplementarias son todas semejantes y están semejantemente colocadas, teniendo una cuerda ó secante real común en el infinito, que puede suponerse paralela á la dirección dada, y por consiguiente las elipses propuestas tienen una *secante ideal* común en el infinito ó en otros términos, dos *puntos imaginarios* comunes en el infinito. Por último, si además de ser semejantes las hipérbolas y estar semejantemente situadas, son concéntricas, serán tangentes en los dos puntos comunes del infinito, y por consiguiente las elipses tendrán una *secante ideal de contacto en el infinito*, ó un *doble contacto imaginario en el infinito*. Y como dos círculos situados arbitrariamente en un plano, son siempre homotéticos, tienen una secante ideal en el infinito, y en el caso de ser concéntricos, esta recta será la sola *secante ideal de contacto* común á dichos círculos; y como dos círculos cualesquiera situados en un plano tienen otra secante común real ó ideal, á distancia dada ó finita, salvo el caso de ser concéntricos en el que esta secante se confunda en el infinito con la primera, se pueden considerar como dos secciones cónicas que tienen *cuatro puntos comunes*, de los que dos son necesariamente *imaginarios* en el infinito, mientras que los otros dos á la vez *reales* ó *imaginarios* están en general situados á distancia dada y finita.

Estas conclusiones que hemos expuesto constituyen el resumen de los resultados á que se elevó Poncelet introduciendo las entidades imaginarias en la Geometría, para dar una nueva generalidad á los enunciados, á los conceptos y á las propiedades de las figuras, y que tanto en el *Traité des propriétés projectives* como en sus *Applications d'Analyse et de Géométrie* desenvuelve con gran detalle y suma de razonamientos.

(Se continuará). Z. G. de G.

CUESTIONES RESUELTAS

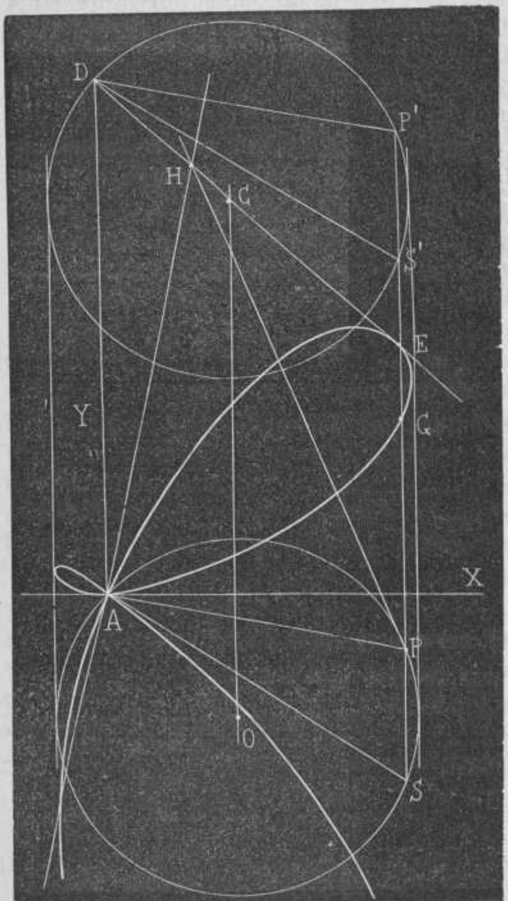
CUESTIÓN 32 (Véase t. III, p. 241).

Un hilo de longitud d *está fijo á un punto* A *de una circunferencia de radio* a, *y lleva en su otro extremo un peso* M *que lo tiende. El hilo* *pasa por un pequeño anillo* B *que se mueve á lo largo de la circunferencia* OA. *Hallar el lugar de los puntos* M.

(*H. Brocard.*)

Solución por el Sr. Brocard.

Sean C el círculo dado de radio r, D el punto fijo de la circunferencia DγA la vertical del punto D, DA la longitud d del hilo; P′S′PS una vertical que encuentra á la circunferencia C en P′ y S′



Transportemos la figura C á una distancia d sobre la vertical en O; después efectuemos en la circunferencia O la transformación siguiente:

Rebatir sobre la vertical de los puntos P, S de la circunferencia, los radios vectores trazados desde estos puntos variables al punto fijo A.

Se tendrán así puntos E, G de cierta curva (M), que no es otra que el *trifolium* estudiado en una memoria publicada en J. S. (1891) y resumida en El Progreso Matemático (t. II, pág. 271.)

Digo que este *trifolium* (M) es también la curva destrita en las condiciones del enunciado 32.

Para demostrarlo, basta establecer la igualdad de los perímetros

$$DA = DP' + P'E = DS' + S'G$$

Ahora, $\qquad DP' = AP.$

$$P'E = P'P - PE = AD - PE = AD - PA;$$

luego $P'E+PA=AD$; pero $PA=DP'$, luego $P'E+DP'=AD$

Lo mismo para la otra igualdad.

El *trifolium* tiene, pues, en general, un punto triple en A; una de las tangentes AX es horizontal, y las otras dos se cortarán según un ángulo recto (J. S. *loc. cit.* p. 38).

La parte del *trifolium* situada sobre la tangente horizontal en A es la sola que está recorrida por el lápiz; pero el lugar comprende también el arco de curva situado debajo del punto A, y que comprende al punto D′ diametralmente opuesto á D sobre la circunferencia C.

La tangente al *trifolium* (M) en el punto E transformada del punto P de la circunferencia O pasa por el punto H de intersección de la tangente PH á la circunferencia y de la perpendicular AH trazada á AP por el punto A (J. S., *loc. cit.* p. 124.)

Según esto, la ecuación más sencilla del lugar (M) se obtendrá refiriéndolo á los ejes AX, AY, y se tendrá entonces, designando EA, EAX, OAX, PAX por ρ, ω, θ, u,

$$\omega=2AP.\cos(\rho+u),\quad AP=2r\cos(\theta-u,\quad \omega+u=90-\omega$$

Luego $$\rho=4r\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,(\theta+2\omega)$$

El *trifolium recto* corresponderá á $\theta=90^\circ$, y el *folium doble* á $\theta=0$.

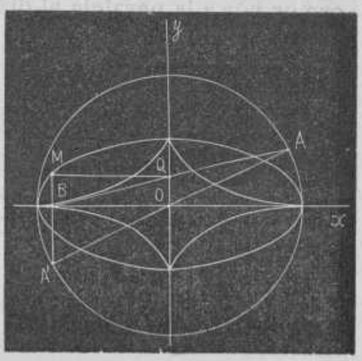
CUESTIÓN 118 (Véase t. III, pág. 111).

Envolvente de la recta que une un punto A *de una circunferencia á la proyección sobre un diámetro fijo, del punto* A′ *diametralmente opuesto al primero.*

(H. Brocard).

Solución por el Sr. Retali (V).

Llamemos B á la proyección del punto A′ sobre el diámetro fijo, r al radio del círculo, y sean α, β las coordenadas del punto A.



Tomando por ejes el diámetro fijo y el diámetro perpendicular, la ecuación de la recta AB es

$$(1)\qquad -\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

cuyos parámetros α y β están ligados por la relación.

$$(1)\qquad \alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

Diferenciando las (1) y (2), considerando α y β como funciones de una misma variable independiente, se tienen las

$$(3) \quad -\frac{x}{\alpha}.\,d\alpha + \frac{2y}{\beta^2}.\,d\beta = 0; \qquad (4) \quad \alpha.\,d\alpha + \beta.\,d\beta = 0;$$

de las cuales, multiplicando la (4) por un factor indeterminado K, sumando con (3) é igualando á cero los coeficientes de $d\alpha$ y $d\beta$;

$$(5) \quad = \frac{x}{\alpha^2} + k\alpha = 0, \qquad (6) \quad \frac{2y}{\beta^2} + k\beta = 0$$

Sumando miembro á miembro las dos últimas ecuaciones después de haberlas multiplicado respectivamente por α y β, y teniendo presentes las (1) y (2), se obtiene

$$1 + kr^2 = 0, \qquad k = -\frac{1}{r^2},$$

y por esto, de las (5) y (6), tenemos

$$\alpha = -\sqrt[3]{r^2x}, \qquad \beta = \sqrt[3]{2r^2y},$$

valores que sustituídos en la (1) dan para las ecuaciones de la envolvente buscada

$$x^{\frac{2}{3}} + (2y)^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{2}}$$

Una curva simétrica respecto á los ejes coordenados que tiene una cúspide en cada extremo del diámetro fijo y en cada uno de los dos puntos $(0, \pm\frac{\gamma}{2})$, los ejes son tangentes cuspidales.

Otra solución por el Sr. Retali.

Sea α el punto de intersección de la recta AB con el eje Oy; y tracemos por α la paralela al diámetro fijo, hasta encontrar á la A'B en el punto M. Designado con θ el ángulo AOx, se tiene:

$$OB = MQ = -r\cos\theta, \quad OQ = MB = \frac{1}{2}A'B = \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta,$$

y por consiguiente

$$\frac{\overline{OB}^2}{r} + \frac{\overline{MB}^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 1$$

El lugar del punto M es, pues, una elipse que tiene los ejes iguales á $r2$ y r, y la envolvente de la recta AB coincide con la envolvente de las rectas que unen los pies de las perpendiculares bajadas á los ejes desde un punto variable de la elipse mencionada; la ecuación de esta envolvente, que en el caso general de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{es} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

se reduce en el caso actual á

$$x^{\frac{2}{3}}+(2y)^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$$

Solución por el Sr. Luzón de las Cuevas.

La recta variable depende del punto paramétrico A sujeto á moverse sobre la circunferencia paramétrica cuyo radio suponemos sea r.

Las coordenadas de A y A′, considerando como ejes el diámetro fijo y el perpendicular á éste y expresándolas en función de la anomalía φ, son

$$A\begin{cases} r\cos\varphi \\ r\cos\varphi \end{cases} \qquad A'\begin{cases} -r\cos\varphi \\ 0. \end{cases}$$

La recta móvil tiene, pues, por ecuación

$$2y-r\operatorname{sen}\varphi-x\operatorname{tang}\varphi=0 \qquad [1]$$

y derivando con respecto á φ.

$$r\cos\varphi+\frac{\cos^2\varphi}{\varphi}=0. \qquad (2)$$

Eliminando φ entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene para la envolvente la ecuación

$$2y \mp r\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{x^2}{r^2}}} \mp x\,\frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{x^2}{r^2}}}}{\sqrt[3]{\frac{x^2}{r^2}}}$$

en la que los signos se corresponden.

Simplificando llegamos á

$$y=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2-\sqrt[3]{r^4x^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{r^2x^4-x^2}}\right)$$

Curva simétrica con relación á los dos ejes coordenados que toca al de las X en los puntos $\pm r$ y al de las y en los $\pm\frac{1}{2}r$ y que vuelve su convexidad hacia el centro, y que está encerrada en un rectángulo concéntrico con la circunferencia paramétrica cuya dimensión es r y la horizontal $2r$.

Solución por el Sr. Sollertinski (B).

Sean: P′ la proyección de A′ sobre el diámetro fijo OX, Q′ la intersección de AP′ con el diámetro OY perpendicular á OX, Q la proyección de A sobre OY.

Se tiene evidentemente $P'Q = OA = const.$

Luego la recta envuelve una hipocicloide de cuatro retrocesos. Pero, porque se tiene siempre $OQ' = \frac{OQ}{2}$, se puede mirar P′Q′ como la proyección de OQ. Por consiguiente, AP′ envuelve á la evoluta de una elipse.

Siendo la ecuación de la hiposicloide

$$x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}},$$

la de la evoluta será

$$X^{\frac{2}{3}} + (2Y)^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

designando R el radio del círculo dado.

CUESTIÓN 407 (*)

(Véase t. I, página 208).

Dos elipses iguales tienen el mismo centro y sus ejes mayores perpendiculares: P *es un punto cualquiera de la primera,* Q *y* Q′ *los puntos de la segunda en que las tangentes son perpendiculares á* OP *y* M, M′ *los puntos medios de* PQ, P′Q′.

Siendo a *y* b *los semi-ejes de las elipses demostrar que* OMPM′ *es un paralelogramo cuyos lados son*

$$\frac{a+b}{2} \quad y \quad \frac{a-b}{2}$$

y en que las bisectrices de los ángulos tienen las direcciones de los ejes de las curvas.

(C. Laisant).

(*) Este número es del *Jour. de math. élém.* de M. Longchamps.

Solución por el Sr. Retali (V.)

Si la ecuación de la primera elipse es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

la de la segunda será

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

y las rectas OP, QQ′ tendrán respectivamente por ecuaciones

$$(1)\qquad y=x\operatorname{tg}\theta \qquad\qquad (2)\qquad y=x\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\theta$$

Si hacemos, pues, por brevedad

$$\lambda=\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+b^2\cos^2\theta}},\quad \mu=\frac{b\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+b^2\cos^2\theta}},$$

de las que se obtiene elevando al cuadrado y sumando.

$$(3)\qquad \lambda^2+\mu^2=1$$

las ordenadas del punto P estarán expresadas por $a\mu$ y $b\lambda$, las de los puntos P′, Q′ por $\pm b\mu$ y $\pm a\lambda$. De esto se sigue que las coordenadas del punto M

$$\text{son}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mu,\ \left(\frac{a-b}{2}\right)\lambda$$

y las de M′

$$\text{son}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mu,\ \left(\frac{a-b}{2}\right)\lambda$$

y por esto, teniendo presente la (3), se tiene

$$\mathrm{OM}=\frac{a+b}{2},\quad \mathrm{OM'}=\frac{a-b}{2}$$

Las dos rectas tienen respectivamente por ecuaciones

$$y=\frac{\lambda}{\mu}x,\quad y=-\frac{\lambda}{\mu}x$$

que se hallan por consiguiente igualmente inclinadas sobre los ejes

CUESTIÓN 67

(Véase tomo II, página 215).

Si por el punto recíproco del centro del círculo inscripto á un triángulo se trazan paralelas á los tres lados, la diferencia entre un lado y *la longitud de la paralela á este lado, comprendida entre los otros doe lados del triángulo es la misma para los tres lados. ¿Cuál es la propiedad análoga para los puntos recíprocos de los centros de los círculos ex-inscriptos.*

(N. C. M.) *(E. Lemoine).*

Solución por el SR. SOLLERTINSKY.

Sean: M un punto del plano ABC; D y E los puntos en que la paralela á BC, trazada por M, encuentra á BA y CA; A′ el punto de intersección de AM y BC.

Se tiene, en magnitud y signo,

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AM}{AA'},\quad \text{de donde}\quad \frac{BC-DE}{BC}=\left(\frac{MA'}{AA'}\right)=\frac{MBC}{ABC}$$

Por consiguiente, designando α, β, γ las coordenadas baricéntricas de M, y a', b', c' las longitudes de las paralelas, trazadas por M, afectadas de los signos convenientes (*), se tendrá

$$(a-a'):(b-b'):(c-c')=a\alpha:b\beta:\gamma c$$

se sabe que las coordenadas baricéntricas de los recíprocos do los centros de los círculos inscriptos, son

$$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right),\left(-\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right),\left(\frac{1}{a},-\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right),\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},-\frac{1}{c}\right)$$

Luego, para el primer punto se tiene

$$a-a'=b-b'=c-c',$$

donde a', b', c' son siempre positivos; y, para el segundo punto

$$\mp(a-a')=\pm(b-b')=\pm(c-c')$$

donde algunas de las cantidades pueden ser negativas.

CUESTIONES 35 y 37 (V. t. I, pág. 295).

35. *Construir un triángulo conociéndose los puntos que dividen* (seguido el perímetro en el mismo sentido) *sus tres lados en la razón de* 1 *á* 2.

(N. C. M.) *(H. Van Aubel).*

37. *Sean* A′, B′, C′, D′ *los puntos que dividen á los lados* AB, BC, CD, DA *de un cuadrilátero en la razón de* 1 *á* 2. *Si se prolonga* A′B′ *en*

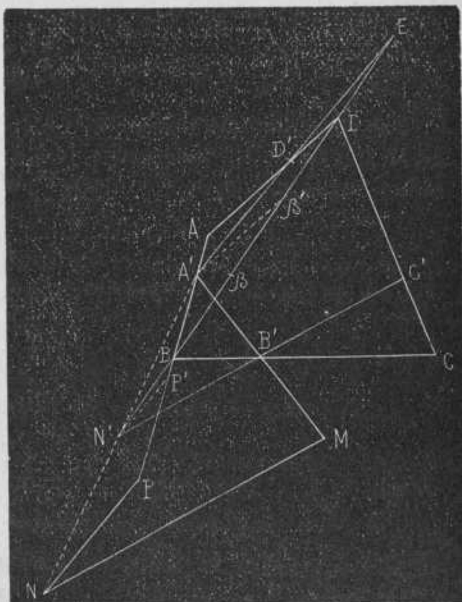
(*) BC y DE tienen las direcciones contrarias cuando los puntos D, E están en las prolongaciones de los lados más allá de A; el valor de a' es entonces negativo.

una longitud B'M=A'B', *y se traza enseguida la recta* MN=2C'B', *paralela á* C'B' *y dirigida en el mismo sentido, después* NP *igual y paralela á* AD *y dirigida en el mismo sentido, los puntos* A, A', P *estarán en línea recta, y el punto* A' *dividirá á la recta* AP *en la relación de* 1 *á* 5. (esta propiedad permite construir el cuadrilátero cuando se conocen los puntos A', B', C', D').

(N. C. M.) *(H. Van Aubel).*

Solución por el Sr. Sollertinski.

Sean A', β, D' los puntos que dividen los lados del triángulo ABD, en la razón 1 : 2; E la intersección de A'D' y BD.



Si A'B' paralela á AD encuentra á BD en β', se tendrá

$$A'\beta' = \left(\frac{2}{3} AD\right) = 2D'D,$$

$$\beta'D = \frac{1}{3} BD.$$

Por consiguiente, en el triángulo A'Eβ' se tendrá

$$D'E = A'D', DE = (D\beta') = \frac{1}{3} EB$$

De aquí la construccion siguiente: Se prolonga A'D' en una longitud

$$D'E = A'D',$$

se divide Eβ por el punto D en la razón 1 : 2, y se trazan las rectas DD' y BA'.

2.° Según esto, para construir el cuadrilátero ABCD, dados A', B', C', D', se prolongan A'D' y C'B' de manera que D'E=A'D', B'N'=C'B'. Dividiendo los puntos D y B á EN' en la razón 1 : 4 son los vértices del cuadrilátero.

Los otros dos vértices son las intersecciones de DD' y DC con BA' y BB'.

Sea P' el punto en que la paralela N'P' á A'D' encuentra á AB,

se tendrá $$\frac{N'P'}{A'E} = \frac{BP'}{BA'} = \frac{N'B}{BE} = \frac{1}{4}$$

de donde $N'P' = \left(\frac{1}{4}A'E\right) = \frac{1}{2}A'D'$; $BP' = \frac{1}{4}A'B$,

y por consiguiente $A'P' = \left(\frac{5}{4}A'B\right) = \frac{5}{2}AA'$

Luego si se toma

$$AM = 2A'B',\ A'N = 2A'N',\ A'P = 2A'P',$$

se tendrá

$$MN = (2N'B') = 2C'B',\ NP = (2N'P') = A'D',\ A'P = 5AA'$$

lo que debía demostrarse.

CUESTIÓN 112 (Véase t. III, págs. 72, 109 y 168).

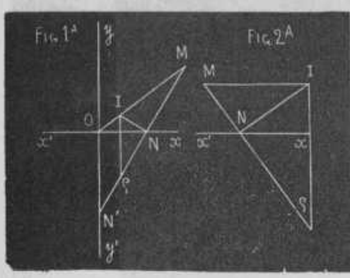
Dados en dirección los ejes xCx', yCy' *de una cónica* Σ (fig. 1.ª) *y la normal* MNN' *á esta curva en un punto dado* M, *así como los puntos de intersección* N, N' *de esta normal con los ejes, determinar el centro* ρ ó el radio de curvatura ρM *en este punto* M, *no empleando más que dos rectas en la construcción.*

***Resolver** asimismo este problema en el caso particular en que el eje* yCy' (fig. 2.ª) *y, por consiguiente, el punto* N *se halle en el infinito, es decir, cuando la cónica* (Σ) *se convierte en una parábola.*

(A. Schiappa Monteiro).

Solución por M. H. Brocard.

Volvamos á tomar la fig. 1.ª de la pág. 109; pero por el punto O tracemos á OIM la perpendicular $O\rho'$ que encuentra á MNN' en el punto ρ'.



Digo que $N'\rho' = N\rho$. En efecto, designando por α, θ, φ los ángulos OMN, MON, MNx, por n, r las longitudes MN y OM, se tendrá fácilmente

$$N\rho = n \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi,\quad N'\rho' = r\,\frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\theta}{\cos\varphi}$$

Pero se tiene $r \operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\varphi$

De esto resulta $N'\rho' = N\rho$.

Habiéndose determinado $N'\rho'$ por la construcción anterior, falta tomar el segmento $N\rho$ igual á $N'\rho'$ para tener el centro de curvatura de la elipse en el punto M.

En el caso de la parábola esta propiedad no se presenta, y creo que es preciso adoptarse la construcción dada en la figura 2 (*loc. cit.*)

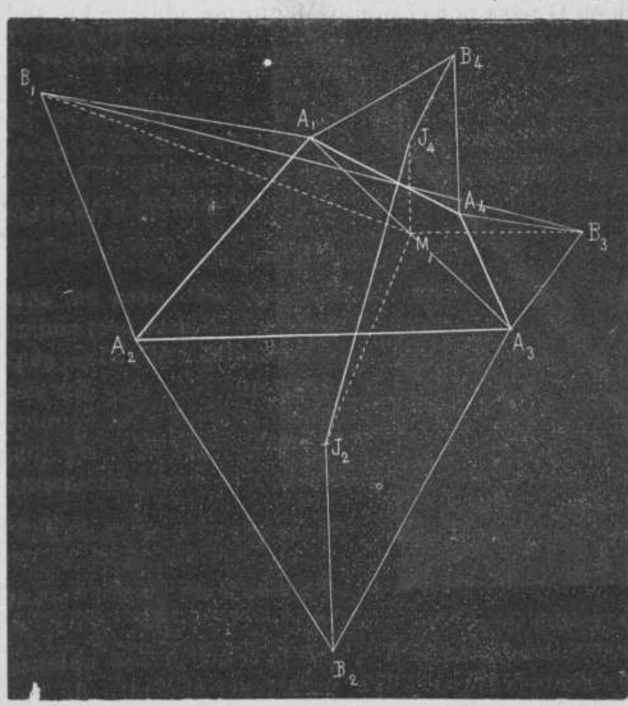
CUESTIÓN 84 (Véase t. II, pág. 280).

Sobre los cuatro lados de un cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ *se construyen exteriormente los triángulos equiláteros* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_4$, $A_4B_4A_1$ *é interiormente los triángulos equiláteros* $A_2b_1A_1$, $A_3b_2A_2$, $A_4b_3A_3$, $A_1b_4A_4$. *Sean* I_1, I_2, I_3, I_4, i_1, i_2, i_3, i_4 *los centros de estos triángulos:*

1.° *La recta* I_2I_4 (ó i_4i_2) *es perpendicular á* B_1B_3 (ó b_1b_3) *é igual al radio del círculo circunscripto al triángulo equilátero construído sobre* B_3B_1 (ó b_3b_1).

2.° a) *Si sobre* I_3I_1 *se construye el triángulo equilátero* I_3MI, *y se prolonga* I_3M *en una longitud* $MN=I_3M$, *el cuadrilátero* $I_1B_2B_4N$ *es un paralelogramo.* b) *Construir el cuadrilátero* $A_1A_2A_3A_4$, *dados los puntos* I_1, I_2, I_3, B_4 *ó los puntos* I_1, B_2, B_3, B_4.

(H. Van Aubel).



Solución por el Sr. Sollertinsky

1.° Sea M_1 el medio de A_1A_3. En los triángulos $M_1J_2J_4$, $M_1B_1B_3$, siendo los lados homólogos M_1J_2 y M_1B_1, M_1J_4 y M_1B_3 perpendiculares y tales, que el primero es igual al radio del triángulo equilátero construído sobre el segundo (véase cuest. 83, 2.º a); lo mismo sucede con los terceros lados J_2J_4 y B_1B_3.

2.º La primera parte es una consecuencia inmediata de 1.º

Según esto, al estar dados los puntos J_1, J_3. B_4, se puede construir B_3, é inversamente, dados B_2, B_4, J_1 se obtendrá J_3.

Después, siendo conocidos B_2 y J_2, se construyen fácilmente A_2 y A_3, y los puntos A_2 y J_1, A_3 y J_3 determinan respectivamente A_1 y A_4.

CUESTIONES PROPUESTAS

143. Sea G el centro de gravedad del segmento formado por una curva ABC y un radio vector AP, sea ABC' el lugar del punto G. La tangente en G pasa por el punto M que se obtiene tomando, en PA, $PN = \frac{1}{3} PA$.

(N. C. M.) (*E. Catalán*).

144. Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo. Si representamos por D_1 la distancia entre las proyecciones del vertice A_1 sobre las bisectrices exteriores de A_2 y A_3; por d_1, d_2, d_3, las distancias entre las proyecciones de cada vértice sobre las bisectrices exteriores de los otros dos, el área del triángulo está dada por la fórmula

$$T = \sqrt{D_1 d_1 d_2 d_3}$$

(*Jorge Luzón de las Cuevas*).

145. Siendo A, B, C, D cantidades imaginarias dadas, y x una cantidad imaginaria variable, formemos el determinante

$$\begin{vmatrix} A+x & B+x \\ C+x & D+x \end{vmatrix} = \Delta,$$

Demostrar

1.º Que si el módulo de Δ permanece constante, la extremidad de x recorre una circunferencia cuyo centro se pide determinar.

2.º Que si el argumento de Δ permanece constante, la extremidad de x recorre una recta. Determinar la dirección de ésta cuando el argumento de Δ es nulo.

(*C. A. Laisant.*)

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.