Serie 2.ª Año I Zaragoza, Octubre de 1899 Núm. 6

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

Sobre una curva notable

por el Sr. Gomes Teixeira (F.)

Consideremos dos rectas fijas que formen un ángulo dado ω y una recta móvil tal, que el segmento comprendido entre las rectas fijas tenga una longitud constante l. La envolvente de la recta móvil es una curva cuya ecuación se obtuvo por Merlieux y Joachimsthal en los tomos I y VI de los *Nouvelles annales des mathématiques*. Respecto de esta curva, propone M. Barisien, en *l'Intermediaire des mathématiciens*, una cuestión que tiene por objeto determinar el área limitada por ella.

Varias respuestas se presentaron, entre la scuales una nuestra fundada en la propiedad que tiene esta curva de ser paralela á un astroide (*Intermediaire* t. V. p. 160-163).

Ahora vamos á demostrar, por un método directo y puramente analítico, el resultado expuesto en el lugar mencionado.

Tomemos por ejes de coordenadas las rectas fijas, y sea

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

la ecuación de la recta movil. Esta recta corta á las rectas fijas en dos puntos, puntos cuya distancia l está dada por la ecuación

$$l^2=a^2+b^2-2\,ab\cos\omega.$$

La envolvente de la recta móvil se obtiene eliminando a, b y $\frac{db}{da}$ entre las ecuaciones que preceden y las siguientes

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{db}{da} = 0$$

$$a - b\cos\omega + (b - a\cos\omega)\frac{db}{da} = 0$$

Para obtener esta eliminación, notemos en primer lugar que las dos últimas ecuaciones dan

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\,\frac{b\cos\omega - a}{b - a\cos\omega} = 0$$

y que esta ecuación combinada con la ecuación de la recta móvil da

$$l^2 x = a^2(a - b\cos\omega), \qquad l^2 y = b^2(b - a\cos\omega),$$

ó eliminando b,

$$l^2 x = a^2\left[a\,\mathrm{sen}^2\,\omega \mp \cos\omega\,\sqrt{l^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}\right]$$

$$l^2 y = \pm\left[a\cos\omega \pm \sqrt{l^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}\right]^2 \sqrt{l^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}\,]$$

Para obtener la ecuación de la envolvente pedida faltaba eliminar a entre estas dos ecuaciones. Pero puede estudiarse la curva sin hacer esta eliminación y, en particular, determinar el área, que limita, como vamos á ver.

Sea S un área limitada por un arco de curva y por los vectores de los extremos de este arco.

Tenemos

$$d\,\mathrm{S} = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{da} - x\frac{dy}{da}\right)\mathrm{sen}\,\omega$$

Luego el área limitada por la curva y por los vectores de los puntos en que $a = 0$ y $a = a_1$, está dada por la fórmula

$$S = \frac{\operatorname{sen}\omega}{2l^2}\left\{\frac{3}{2}a_1^4\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega - a_1^2 l^2\cos\omega\right.$$

$$\pm 3\operatorname{sen}^2\omega\cos 2\omega\int_0^{a_1}\frac{a^4\,d\,a}{\sqrt{l^2-a^2\operatorname{sen}^2\omega}}$$

$$\left.\pm l^2(3\operatorname{sen}^2\omega - 2\cos^2\omega)\int_0^{a_1}\frac{a^2\,d\,a}{\sqrt{l^2-a^2\operatorname{sen}^2\omega}}\right\}$$

donde se debe emplear el signo superior, cuando se considera un arco de curva en el que y es positivo, y el signo inferior, para el caso contrario.

Tenemos pues

$$\int_0^{a_1}\frac{a^4\,d\,a}{\sqrt{l^2-a^2\operatorname{sen}^2\omega}} = \frac{l^4}{\operatorname{sen}^5\omega}\left[-\frac{a_1^3\operatorname{sen}^3\omega}{4l^4}\sqrt{l^2-a_1^2\operatorname{sen}^2\omega}\right. -$$

$$\left.-\frac{3}{8}\frac{a_1\operatorname{sen}\omega}{l^2}\sqrt{l^2-a_1^2\operatorname{sen}^2\omega}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,sen}\frac{a_1\operatorname{sen}\omega}{l}\right],$$

$$\int_0^{a_1}\frac{a^2\,d\,a}{\sqrt{l^2-a^2\operatorname{sen}^2\omega}} = \frac{l^2}{\operatorname{sen}^2\omega}\left[-\frac{1}{2}\frac{a_1\operatorname{sen}\omega}{l^2}\sqrt{l^2-a_1^2\operatorname{sen}^2\omega}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{a_1\operatorname{sen}\omega}{l}\right]$$

luego

$$S = \frac{\operatorname{sen}\omega}{2l^2}\left\{\frac{3}{2}a_1^4\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega - a_1^2 l^2\cos\omega\right.$$

$$\mp\frac{3}{4}a_1^3\cos 2\omega\sqrt{l^2-a_1^2\operatorname{sen}^2\omega}$$

$$\pm\frac{l^2 a_1}{8\operatorname{sen}^2\omega}(\cos^2\omega+3\operatorname{sen}^2\omega)\sqrt{l^2-a_1^2\operatorname{sen}^2\omega}$$

$$\left.\pm\frac{l^4}{8\operatorname{sen}^3\omega}(\cos^2\omega+3\operatorname{sen}^2\omega)\operatorname{arc\,sen}\frac{a_1\operatorname{sen}\omega}{l}\right\}$$

Esta fórmula da el valor del área pedida.

Haciendo $a_1 = \frac{l}{\operatorname{sen} \omega}$, resulta para el valor el área limitada por los vectores de los puntos $(0, l)$ y $\left(\frac{l}{\operatorname{sen} \omega}, 0\right)$ y para la curva

$$S_1 = \frac{l^2}{4}\left\{\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega}{8 \operatorname{sen}^2 \omega}\pi\right\},$$

y para el valor del área limitada por los puntos $(0, -l)$ y $\left(\frac{l}{\cos \omega}, 0\right)$ y para la curva

$$S_2 = \frac{l^2}{4}\left\{-\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega}{8 \operatorname{sen}^2 \omega}\pi\right\}.$$

Un área tal, limitada por la curva, tiene pues por expresión

$$S = \frac{l^2}{8}\,\frac{\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega}\pi = \frac{l^2}{8}\,\frac{l + 2 \operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega}.$$

La clase de curvas de que hemos tratado tiene como caso particular una curva á que se da el nombre de *astroide*, que corresponde á $\omega = \frac{\pi}{2}$. También se le ha dado, como dice el Sr. Brocard, el nombre de *tetracúspide*, tal vez sea preferible darle el nombre de *astroide*, llamándose la que corresponde á $\omega = \frac{\pi}{2}$ *astroide de cuatro ejes* y á las otras *astroides de dos ejes*.

HISTORIA DEL PROBLEMA DE LAS TANGENTES

por M. A. Aubry

(*Conclusión*)

Los elogios que Descartes tributa á este problema de Beaunne (1) eran merecidos, porque se hallaba así frente á un género de cuestiones absolutamente distintas de las se habían presentado hasta entonces á los matemáticos: Conduce, en efecto, á la ecuación di-

(1) «.... la propriété dont vous m' en voyez la démonstration me paróit si belle, que ie la prefere à la quadrature de la parabole trouueé par Archimède; car il examinoit une ligne donnée, au lieu que vous déterminez l' espace contenu dans une qui n' est pas encore donnée.»

ferencial $d\,x = y\,d\,y - x\,d\,x$. Esta motivó que Jacques Bernoulli llegara á la integración de la ecuación más general que lleva su nombre.

Fermat había tratado desde luego el problema de las tangentes, como Apolonio y Descartes, buscando, por su método *de maximis et minimis*, la más corta distancia de un punto dado á la curva. Pero abandona este procedimiento, porque la expresión de la normal se presentaba bajo forma de radicales, lo que complicaba mucho el cálculo. Su método definitivo data de 1629, pero no fué conocido más que desde 1638 y publicado en sus *Varia opera* (Toulouse, 1679). Citaremos, entre otras de Fermat, la construcción de la tangente á la cicloide, á la cuadratiz y á las espirales de los diversos órdenes; para la primera emplea una transformación notable que se puede representar por $X = x$, $Y = s$, designando s el arco de la primera curva, X é Y las coordenadas de la segunda (Lalouvère, *De cycloide,* Toulouse 1660). Para estas curvas transcendentes Fermat sustituye á los infinitamente pequeños de la curva otros infinitamente pequeños á los que aplica su método.

Roberval parece haber conocido algo que se aproximase, porque, en 1636, anuncia el haber encontrado desde hacía largo tiempo la tangente á la concoide y determinado sus puntos de inflexión (punto desde el que no se puede trazar tangentes). Introduciendo, como Descartes, el movimiento en el estudio de las curvas, obtuvo hacia 1639 su método de las tangentes, fundado en la composición de los movimientos, y aplicable á un gran número de curvas definidas cinemáticamente, las cónicas, la espiral, la cuadratriz, la cisoide, la concoide, el caracol, etc. Fué divulgado en las *Cogitata* de Mersenna (París 1644), y casi al mismo tiempo por Torricelli. (*Opusc. geom.* Florence, 1644) que lo había obtenido por su parte hacia 1640.

Consignaremos también de Roberval su ingeniosa transformación de las curvas llamada *Robervaliana*, por Torricelli (véase J. S. 1896, p. 180).

Un progreso notable del método de Fermat es el descubrimiento de la expresión de la sub-tangente de una curva definida por una función implícita: se verificó por Huze en 1652 y por Hudde en 1657; pero solo se publicó en 1672, en las *Phil. Trans.*

James Gregory en su *Geometriæ pars universalis* (Padoue, 1668) reunió la mayor parte de los teoremas conocidos sobre las transformaciones de las curvas, destinadas á extender las construcciones de las tangentes, las cuadraturas, rectificaciones y cubaturas conocidas. Mencionaremos de él su elegante teoría de las *evoluta et involuta*, definidas por la transformación $S = s$, $Y = \rho$ (véase J. S. 1893, p. 133)

Terminaremos por Barrow que extendió y perfeccionó mucho la geometría infinitesimal (*Lectiones Geometricæ*. Londres 1672). Considera explícitamente una cuva como formada por elementos consecutivos, á los que corresponden los incrementos sucesivos de la abscisa y la ordenada; el triángulo que forman estos tres elementos es semejante al formado por la tangente la sub-tangente y la ordenada. El obtener la posición de la tangente se reduce á obtener la relación de los dos incrementos de que acabamos de tratar.

Principia por el examen de diversas transformaciones y de las relaciones que tienen entre sí las tangentes en los puntos correspondientes. Así, *si dos curvas son tales, que á una misma abscisa corresponden ordenadas inversas* $X = x$, $Yy = 1$, *las sub-tangentes serán iguales y de signos contrarios.*

Véanse otras transformaciones estudiadas por Barrow

$$P\rho = 1, \quad \Omega = \omega \qquad \text{(curvas inversas)}$$
$$P = \rho + a, \quad \Omega = \omega \qquad \text{(concoide)}$$
$$Y^2 = a^2 - y^2, \quad X = x; \quad Y^2 = t, \quad X = x; \quad Y = \frac{\rho^2}{y}, \quad X = x$$
$$Y = \rho, \quad X = x \qquad \text{(véase J. S. 1896)}$$
$$P = \rho + 1, \quad \Omega = \omega; \quad P = s, \quad \Omega = \omega, \quad X = ks + a, \quad \Omega = \omega.$$

Llega así al trazado de las tangentes de varias curvas que se derivan del círculo, como la cisoide, la estrofoide, la cappa, ecétera.

Expone enseguida, en estos términos, un método general de tangentes (véase figura 11):

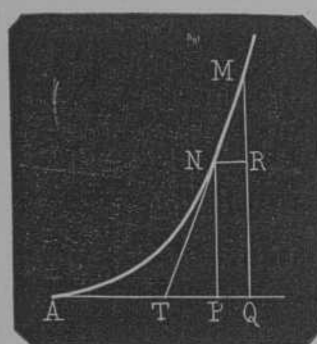

Figura 11

«Sint AP, PM positione datæ rectæ lineæ (quarum PM propositam curvam secet in M) et MT curvam tangere ponatur ad M, rectam AP secare ad T;

ut ipsius jam rectæ PT quantitatem exquiram; curvæ arcum MN indefinite parvum statuo; tum duco rectas NQ ad MP, et NR ad AP parallelas. Nomino MP $= m$, PT $= t$, MP $= a$, NR $= e$; reliquasque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem MR, RN (et mediantibus illis ipsas MP, PT) per *æquationem* è calculo reprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt).

2. Post *æquationem constitutam*, onmes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a vel e (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipsam m; (vel MP) pro e ipsam (vel PT) substituo. Hinc demùm ìpsius PT quantitas dignoscetur.

Quod si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula utè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta....»

Barrow aplicó su método á la cappa, á la curva $x^3 + y^3 = 1$, al folium, á la cuadratriz y á la tangentoide.

Nuestra historia puede considerarse terminada aquí al menos como teoría. El descubrimiento del cálculo infinitesimal ha perfeccionado solamente la práctica, aplicando los signos del Algebra, y sobre todo, suprimiendo una multitud de consideraciones intermedias, que han llegado á ser inútiles, por efecto de haber intervenido la idea del infinitamente pequeño. También, en este sentido, sería la historia del cálculo infinitesimal, que se trata del modo más completo en varias obras; además se hallaría fuera de nuestro objeto. Terminaríamos de una manera màs racional dando una colección de cuestiones de geometría infinitesimal elegidas; pero esta ciencia casi abandonada según Barrow, ha alcanzado tanto favor en nuestros días, que forma una rama demasiado importante, y su historia exige, para ser tratada dignamente, un artículo aparte, que nos reservamos publicar en otra ocasión.

SUR LES LIGNES CYLINDRIQUES

par Geminiano Pirondini, à Parme

(*Conclusión*)

Si Λ *est une ligne dont les plans osculateurs coupent la surface cylindrique* K *sous un angle constant* ε, *et si* Λ_0 *est l'hélice tangente à* Λ *dans un point quelconque* A, *les rayons de courbure et de torsion* (ρ, τ), (ρ_0, τ_0) *de ces lignes* Λ, Λ_0 *au point* A *sont liés entre eux par les relations*:

$$\rho = \rho_0 \sin \varepsilon, \qquad \tau = \tau_0$$

4

Le problème: *construire une ligne gauche* Λ, *dont le rayon de courbure est une fonction donnée de l'arc* $\rho = f(\sigma)$, est indéterminé.

Si l'on fixe d'une façon arbitraire une fonction $\varphi(s)$ de s et ensuite on pose

$$\sin \theta = \varphi(s) \tag{11}$$

l'équation (1) donne:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varphi^2(s)} \sqrt{\frac{1}{f^2\left[\int \frac{d\,s}{\varphi(s)}\right]} - \frac{\varphi^2(s)\,\varphi'^2(s)}{1-\varphi^2(s)}} \tag{12}$$

Le problème est ainsi ramené à décrire, sur le cylindre K dont la sectión droite est la courbe (12), la ligne Λ coupant les génératrices sous l'angle θ donné par l'équation (11).

Pour la construction de la ligne dont le rayon de torsion est une fonction donnée de l'arc (problème aussi indéterminé) on a bien d'intérêt dans la transformation dont *M. Bianchi* a fait usage dans son Mémoire «*Sulle curve a doppia curvatura*». (1)

Elle est définie par les équations:

$$x_1 = \int \cos l \,.\, d\,s, \qquad y_1 = \int \cos m \,.\, d\,s, \qquad z_1 = \int \cos n \,.\, d\,s,$$

(1) Giornale di Battaglini — Vol. XXI, 1883,

l, m, n étant les inclinaisons de la binormale de L sur les axes coordonnés. La propriété caractéristique de cette transformation c'est de laisser inaltéré l'arc et de permuter entre eux les rayons de courbure et de torsion de la ligne donnée.

Nous allons maintenant exposer une autre transformation très remarquable dans l'étude des ligne gauches.

L (x, y, z) étant une ligne quelconque (*ligne primitive*); $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale; ρ, τ, s le rayon de courbure, le rayon de torsion et l'arc, considérons la ligne L_1 (*ligne dérivée*) définie par les équations:

$$x_1 = \int \cos\lambda \,.\, ds, \qquad y_1 = \cos\mu \,.\, ds, \qquad z_1 = \int \cos\nu \,.\, ds.$$

Celles-cì donnent:

$$\frac{dx_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \cos\lambda, \text{ etc.}$$

d'où:

$$ds_1 = ds, \qquad \text{et} \qquad s_1 = s.$$

Il résulte alors:

$$\cos\alpha_1 = \cos\lambda, \qquad \text{etc.}$$

d'où par dérivation:

$$\frac{\cos\lambda_1}{\rho_1} = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos l}{\tau}\right), \quad \text{etc.}$$

Il est donc:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} \tag{13}$$

et conséquemment:

$$\cos\lambda_1 = -\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\rho} + \dfrac{\cos l}{\tau}}{\sqrt{\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\tau^2}}} \text{ etc.}$$

Dérivons ces équations par rapport à s, élevons au carré et sommons membre à membre les équations qui résultent. Si l'on rappelle en outre la relation (13), on trouve:

$$\frac{1}{\tau^2} = \left(\frac{\rho\tau' - \tau\rho'}{\rho^2 + \tau^2}\right)^2$$

On a donc les équations:

$$(14) \qquad s_1 = s, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2}}, \quad \tau_1 = \frac{1 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'},$$

d'où l'on déduit aisement les autres:

$$(15) \qquad \rho = \frac{\rho_1}{\cos\left(\int \frac{d\,s_1}{\tau_1} + k\right)}, \quad \tau = \frac{\rho_1}{\sin\left(\int \frac{d\,s_1}{\tau_1} + k\right)},$$

k étant une constante d'intégration.

Les équations (14) nous apprendent qu'aux points de L où $\frac{1}{\tau} = 0$ correspondent, sur L_1, des points où $\rho_1 = \rho$, $\frac{1}{\tau_1} = 0$. Mais, à cause des équations (15), ces propriétés ne sauraient pas être vérifiées s'il n'était pas $k = 0$.

Une telle condition réduit les égalités (15) aux autres:

$$(16) \qquad \rho = \frac{\rho_1}{\cos\left(\int \frac{d\,s_1}{\tau_1}\right)}, \quad \tau = \frac{\rho_1}{\sin\left(\int \frac{d\,s_1}{\tau_1}\right)}$$

Les équations (14), (16) démontrent la propriété suivante: *Une des lignes* L, L_1 *définit complétement l'autre.*

Les équations (14) font voir que τ_1 et $\frac{\rho_1}{\rho}$ sont deux fonctions du rapport $\frac{\rho}{\tau}$. Il suit que *si l'on considère toutes les lignes courbes*

L *qu'on origine d'une ligne donnpe* L_0, *en déformant sa développable rectifiante de façon à conserver rectilignes les génératrices, et si l'on construit leurs lignes dérivées* L_1: 1) *les rayons de torsion correspondants de ces lignes* L_1 *sont égaux*; 2) *le rapport* $\frac{\rho_1}{\rho}$ *est le même dans tous les points des lignes* L *dérivant d'un même point de la ligne originaire* L_0.

La condition nécessaire et suffisante pour qu' il résulte

$$\frac{\rho}{\tau}=\frac{s}{a}$$

est

$$\tau_1=\frac{s_1^{\,2}}{a}+a.$$

Donc: *La ligne* L_1, *dérivée d'une géodésique d'un cône, a pour rayon de torsion le rayon de courbure d'une chaînette, et vice versa.*

On déduit de l'équation (13):

$$\frac{1}{\rho_1}=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}$$

Par conséquent: *la courbure totale* (*) *d'une ligne est égale à la courbure ordinaire de la ligne dérivée.*

On peut appliquer ce théorème à la recherche des lignes courbes, dont la courbure totale est une constante ou une fonction donnée de l'arc.

En supposant $\tau=$ constante $=k$, on a:

$$\rho_1=\frac{k\,\rho}{\sqrt{k^2+\rho^2}},\quad \tau_1=\frac{k^2+\rho^2}{k\,\rho'}.$$

Si donc R_1 est le rayon de la sphère osculatrice de L_1, on a:

$$R_1=\sqrt{\rho_1^{\,2}+\tau_1^{\,2}\rho'^{\,2}_1}=k.$$

(*) Aoust—Analyse infinitésimale des courbes de l'espace.

Et, comme ρ_1 n' est pas constant, cette condition démontre que L_1 est une ligne sphérique.

Si, vice versa, L_1 est tracée sur une sphère de rayon k, on a:

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{k^2 - \rho_1^2}}{\rho'_1},$$

et la deuxième équation (16) donne $\tau = k$.

Donc: *quand la ligne primitive* L *a le rayon de torsion constant et égal à* k, *la ligne dérivée* L_1 *est placée sur une sphère de rayon* k, *et vice versa.*

Cette propriété peut être mise à profit, dans la recherche des lignes à torsion constante.

La troisième équation (14) démontre que le problème de chercher une ligne le long de laquelle le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ est une fonction donnée de l'arc et l'autre de chercher une ligne dont le rayon de torsion est une fonction donnée de l'arc, peuvent se ramener l'un à l'autre.

Nous allons appliquer une telle liaison entre les deux problèmes, à la recherche d'une ligne L_1 dont le rayon de torsion est une constante m.

Remarquons d'abord que pour la ligne L (primitive de L_1) ona:

$$\frac{\rho}{\tau} = \operatorname{tang}\left(\frac{s}{m}\right).$$

Cela posé, soient g les droites rectifiantes de L et i l'inclinaison de ces droites sur la ligne L. On sait que

$$\operatorname{tang} i = \frac{\tau}{\rho},$$

et conséquemment:

$$i = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{m}$$

Si l'on déroule la développable rectifiante Σ de L sur un plan, cette ligne se réduit à une droite et l'arête de rebroussement de Σ à une certaine ligne plane L_0 qu' on peut déterminer aisément.

En désignant en effet par s_0 et ρ_0 l'arc et le rayon de courbure de

L_0, on a (*)

$$s_0 = \int \frac{2\cos i \left(\frac{d\,i}{d\,s}\right)^2 - \sin i \frac{d^2 i}{d\,s^2}}{\left(\frac{d\,i}{d\,s}\right)^2} d\,s$$

$$= 2 \int \sin\left(\frac{s}{m}\right) d\,s = -2\,m\,.\cos\left(\frac{s}{m}\right)$$

$$\rho_0 = \frac{2\cos i \left(\frac{d\,i}{d\,s}\right)^2 - \sin i \frac{d^2 i}{d\,s^2}}{\left(\frac{d\,i}{d\,s}\right)^3} = -2\,m \sin\left(\frac{s}{m}\right)$$

et conséquemment:

$$\rho_0 = \sqrt{4\,m^2 - s_0^2}$$

La courbe L_0 est donc une cycloïde dont le cercle générateur a le diamètre m.

Pour $s = 0$ on a $i = \frac{\pi}{2}$, $\rho_0 = 0$; la droite à laquelle se rèduit L est donc perpendiculaire á la base de la cycloïde L_0 à une de ses extrémités.

On a ainsi la construction suivante: *Pour déterminer une courbe* L_1 *à torsiou constante* $\frac{1}{m}$, *on décrit la cycloïde* L_0 *ayant le cercle générateur de diamètre* m *et ensuite on plie le plan de cette courbe, en lui donnant la forme d'une surface développable dont les génératrices rectilignes sont les tangentes de* L_0. *La perpendiculaire à la base de la cycloïde, dans son extrémité, se réduit, après cette opération, à une certaine ligne à double courbure* L. *La courbe* L_1, *dérivée de* L, *résout le problème.*

5

La section droite L du cylindre K soit la ligne:

(17) $$x = \varphi(s) \qquad y = \int \sqrt{1 - \varphi'^2(s)} \cdot d\,s$$

(*) Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc. § V = Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1896.

et la transformée Λ_1 de Λ soit la ligne représentée par l' équation cartésienne (6)

La condition que la ligne Λ soit sur la surface (S):

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

est alors exprimée par l' équation:

$$\Phi\left[\varphi(s), \int \sqrt{1-\varphi'^2(s)} \cdot ds, F(s)\right] = 0$$

Puisque celle-ci conduit à une équation différentielle du premier ordre, de laquelle on peut déduire φ en fonction de s, on conclut: *Si Λ_1 est une ligne plane quelconque, on peut toujours déterminer un cylindre* K *de façon, qu'en pliant le plan de Λ_1 sur la surface de ce cylindre, la ligne Λ à laquelle se réduit Λ_1 arrive à être placée sur une surface quelconque* S *donnée à priori.*

En supposant que S soit une sphère de rayon k avec le centre à l'origine, on a:

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - k^2$$

et conséquemment:

$$\int \sqrt{1-\varphi'^2(s)}\, ds = \sqrt{k^2 - \varphi^2(s) - F^2(s)}$$

La détermination de $\varphi(s)$ se fait donc à l'aide de l'équation différentielle:

$$[k^2 - F^2(s)]\,\varphi'^2 + 2\,F(s)\,F'(s)\,\varphi\,\varphi' + \varphi^2 + F^2(s) + F^2(s)\,F'^2(s) - k^2 = 0$$

Pour éviter la difficulté insurmontable de l'intégration effective d'une telle équation, il suffit de remarquer que:

$$\sqrt{\varphi^2(s) + [\int \sqrt{1-\varphi'^2(s)}\, ds]^2} = \sqrt{k^2 - F^2(s)},$$

ce qui conduit au théorème:

Pour réduire la ligne plane Λ_1 représentée par l'équation (6) *à une ligne sphérique Λ de rayon* k, *il faut plier le plan de Λ_1 sur la surface du cylindre* K *dont la section droite* L *est la courbe définie par la relation:*

$$R = \sqrt{k^2 - F^2(s)} \tag{18}$$

entre l'arc s *et le rayon vecteur* R *issu de l'origine.*

Si l'on rappelle que:

$$r = \frac{R\sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}}{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R\frac{d^2R}{ds^2}},$$

on a: *La section droite* L *du cylindre* K *est représentée* (*en coordonnées intrinsèques* r, s) *par l'équation*:

$$r = \frac{\sqrt{k^2 - F^2(s) - F^2(s)F'^2(s)}}{1 + F'^2(s) + F(s)F''(s)}$$

Si, par exemple Λ_1 est la droite

$$\zeta_1 = \alpha s,$$

la ligne sphérique Λ est une hélice et la section droite L a pour équation:

$$r = \sqrt{\frac{k^2}{(1+\alpha)^2} - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}s^2}$$

Donc: *la section droite du cylindre contenant une hélice sphérique est une épicycloïde.*

En résolvant l'équation (18) par rapport à F (s), on arrive au résultat suivant: *Si une ligne plane* Λ_1 *se réduit à une ligne sphérique* (*de rayon* k) *en pliant son plan sur la surface du cylindre* K *dont la section droite est la courbe:*

$$R = R(s)$$

cette ligne Λ_1 *est représentée par l' équation cartésienne*:

$$\zeta_1 = \sqrt{k^2 - R^2(s)}$$

Si, par exemple. on remarque qu' entre les lignes de la famille:

$$R = \sqrt{a s^2 + 2 b s + c}$$

on trouve l'hypocycloïde pour a positif et >1 et l'épicycloïde pour $a < 0$ (*), on a: *Les lignes planes qui sont réductibles à des lignes sphériques en pliant leur plan sur un cylindre dont la section droite est une hypocycloïde ou une épicycloïde, sont respectivement les ellipses et les hyperboles.*

Si au lieu de la ligne Λ_1 (6) on place la ligne (Λ_1)

$$(\zeta_1) = \sqrt{k^2 - F^2(s)}\,,$$

la courbe (18) est remplacée par l' autre:

$$(R) = F(s).$$

Cette remarque conduit au théorème suivant: Λ_1 *étant une ligne plane quelconque, soit* (Λ_1) *la ligne déduisible de* Λ_1 *par la transformation*

$$(\zeta_1) = \sqrt{k^2 - \zeta^2}$$

et (L) *la section droite du cylindre sur lequel on doit plier le plan de* (Λ_1) *por réduire celle-ci à une ligne sphérique de rayon* k.

La ligne Λ_1 *(en coordonnées cartésiennes* ζ_1 , s*) et la ligne* (L) *(en coordonnées* R, s*) sont représentées par deux équations ayant même forme.*

A l'aide de ce résultat on peut trouver aisément des constructions géométriques pour le passage des lignes:

$$\varphi(\zeta_1, s) = 0\,, \quad \psi(R, s) = 0$$

aux autres:

$$\varphi(R, s) = 0\,, \quad \psi(\zeta_1, s) = 0\,,$$

pour le passage de la ligne:

$$\chi(R, s) = 0$$

(*) Sur les lignes sphériques — Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas — Vol. IX.

á l'autre:

$$\chi[f(R), s] = 0 \qquad , \text{etc. etc.}$$

Quand la surface S est le plan passant par l'axe des y incliné de l'angle θ sur le plan coordonné $x = 0$, on a:

$$\Phi(x, y, z) = x - z \operatorname{tang} \theta .$$

Par conséquent: *Si l'on donne une ligne plane quelconque Λ_1 représentée par l'équation (6), on peut déterminer (d'une infinité de manières) un cylindre* K *tel, qu'en pliant le plan de Λ_1 sur sa surface, la courbe Λ à laquelle se réduit Λ_1 soit une section plane de* K. *La section droite du cylindre* K *est déterminée par les équations*:

$$(19) \qquad x = \operatorname{tang} \theta \,.\, F(s), \qquad y = \int \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \theta \,.\, F'^2(s)} \,.\, d s,$$

θ étant l'angle arbitraire défini ci-dessus.

Remarque.—Si l'on fait usage des coordonnées intrinsèques r, s, *la section droite dite est représentée par l'équation:*

$$(20) \qquad r = \frac{\sqrt{\cot^2 \theta - F'^2(s)}}{F''(s)}$$

Si, par exemple Λ_1 est le cercle:

$$\zeta_1 = F(s) = \sqrt{a^2 - s^2},$$

pour le réduire à une ligne plane il faut plier son plan sur le cylindre K dont la section droite est la courbe:

$$r = \frac{s^2 - a^2}{a^2 \sin \theta} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta - s^2}$$

En comparant les équations (19), (17), on a le théorème:

Si une ligne plane Λ_1 se réduit à une nouvelle ligne plane, en pliant son plan sur la surface du cylindre K *dont la section droite* L *est la courbe* (17), *cette ligne Λ_1 est représentée par l'équation cartésienne:*

$$\zeta_1 = \varphi(s) \,.\, \cot \theta$$

Remarque.—Si l'on suppose que, dans l'équation (20), r soit une fonction donnée et F une fonction inconnue de s, on trouve par intégration:

$$\mathrm{F}(s) = \cot\theta \cdot \int \sin\left(a + \int \frac{ds}{r}\right) ds,$$

a étant une constante.

Il suit que *si, dans le dernier théorème, la section droite* L *du cylindre* K *est représentée par l' équation intrinsèque*:

$$r = r(s),$$

la courbe Λ, *est représentée par l' équation cartésienne:*

$$\zeta_1 = \cot\theta \int \sin\left(a + \int \frac{ds}{r}\right) ds.$$

Si, par exemple, la section droite du cylindre K est la cycloïde

$$r = \sqrt{m^2 - s^2},$$

la courbe Λ_1 qu'on doit plier sur la surface de K pour la réduire à une nouvelle ligne plane, est la courbe représentée par l'équation:

$$\zeta_1 = \frac{\cot\theta}{2\,m}\left\{ s\sqrt{m^2 - s^2} + m^2 \text{ arc. sin}\left(\frac{s}{m}\right)\right\} \sin a$$
$$+ \frac{\cot\theta}{2\,m} s^2 . \cos a$$

Pour la valeur particulière $a = 0$, on a

$$\zeta_1 = \frac{\cot\theta}{2\,m} s^2$$

Entre les lignes Λ_1 qu'on vient de déterminer, il y a donc aussi la parabole.

En se rappelant les formules relatives á l'applicabilité des surfaces de révolution, on a le théorème: *Quelle que soit la valeur de* θ, *la ligne* (19) *et l'autre:*

$$x_0 = \mathrm{F}(s), \quad y_0 = \int \sqrt{1 - \mathrm{F}'^2(s)}\, ds, \tag{21}$$

dans la rotation autour de l'axe des y, engendrent deux surfaces de révolution applicables l'une sur l'autre par déformation.

Par conséquent: *Les sections droites (en nombre infini) des cylindres sur lesquels on doit plier le plan d'une ligne plane quelconque* Λ_1 *pour la réduire à des nouvelles lignes planes, sont les lignes méridiennes d'une suite de surfaces de révolution applicables par déformation les unes sur les autres.*

Application — En posant succesivement:

$$\zeta_1 = F(s) = \left\{ \frac{s^2}{a}, \sqrt{a^2 + s^2}, a e^{\frac{s}{a}} \right. .$$

la première équation (21) donne respectivement:

$$x_0 = F(s) = \left\{ \frac{s^2}{a}, \sqrt{a^2 + s^2}, a e^{\frac{s}{a}} \right.$$

On a d'ici la propriété: *Les surfaces de révolution dont les lignes méridiennes sont les secctions droites* L, L', L", ... *des cylindres* K *sur lesquels on doit plier le plan d'une hyperbole équilatère, ou d'une courbe logarithmique* $\left(\zeta_{.} = a e^{\frac{s}{a}}\right)$, *pour que ces lignes se réduisent à des lignes planes, sont respectivement applicables sur la surface engendrée par la rotation d'une cycloïde autour de la tangente au sommet, sur l'alysseïde* (*) *(surface engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice), ou sur la pseudo-sphère.*

SOBRE LOS CÍRCULOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

por D. Juan J. Durán Loriga

Comandante de Artillería

(*Conclusión*)

4. Si en la ecuación del círculo ε se invierten dos de los parámetros p_a, p_b, p_c, se obtienen tres nuevos círculos ε_1, ε_2, ε_3 representados por:

(*) Bour — Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l'École Polytechnique — Ch. 39.

$$\sigma(p_a\alpha+p_c\beta+p_b\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$
$$\sigma(p_c\alpha+p_b\beta+p_a\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$
$$\sigma(p_b\alpha+p_a\beta+p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

los llamaremos *semi-asociados* de ε.

Las siguientes propiedades se demuestran facilmente.

Los tres círculos semi-asociados tienen por centro radical el centro de gravedad G; los ejes radicales de un círculo ε con relación á sus semi-asociados son las medianas de ABC; los ejes radicales de los círculos semi asociados son las rectas semi-recíprocas de los ejes radicales de un círculo con relación á sus asociados; un círculo cualquiera, sus asociados y sus semi-asociados tienen un mismo círculo ortotómico.

Sobre los círculos derivados y semi-derivados

5. Si en la ecuación de un círculo ε

$$\sigma(p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

se cambia el signo de los parámetros p_a, p_b, p_c, se obtiene un nuevo círculo σ que es el círculo anti-radical (sobre los círculos anti-radicales véase (*Journal de* M. *de Longchamps* 1897) de ε con relación al círculo circunscripto al que llamamos el círculo *derivado* de ε; así, por ejemplo, el círculo derivado del de Longchamps tiene por centro el ortocentro de ABC y su radio es 2 R, es decir, es circunscripto al anti-complementario del triángulo fundamental. Se pueden también considerar círculos derivados de un punto notable del triángulo; así el círculo derivado del punto de Lemoine tiene por ecuación

$$\frac{\sigma}{m^4}\cdot\varepsilon b^2c^2(3a^2-2m^2)\alpha-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

El círculo derivado de un punto M es siempre real, su radio está expresado por

$$\delta=\sqrt{2(\mathrm{R}^2+d^2)}\qquad(d=\mathrm{MO})$$

y su centro es el punto simétrico de M con relación á O.

6. Si en la ecuación del círculo ε

$$\sigma(p_a\alpha + p_b\beta + p_c\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

se cambia el signo uno de los parámetros, se obtienen los círculos σ_1, σ_2, σ_3 representados por

$$\sigma(-p_a\alpha + p_b\beta + p_c\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$
$$\sigma(p_a\alpha - p_b\beta + p_c\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$
$$\sigma(p_a\alpha + p_b\beta - p_c\gamma) \quad \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

y diremos que σ_1 es el *primer semi-derivado*, σ_2 el segundo y σ_3 el tercero de ε.

Los ejes radicales de los pares (ε, σ_1), (ε, σ_2), (ε, σ_3) son los lados del triángulo, y por consiguiente los centros radicales de los triples $(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2)$, $(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_3)$ etc. son los vértices.

Los ejes radicales de los pares (σ_1, σ_2), (σ_1, σ_3), (σ_2, σ_3) son respectivamente las transversales angulares

$$p_a\alpha - p_b\beta = 0, \quad p_a\alpha - p_c\gamma = 0. \quad p_b\beta - p_c\gamma = 0$$

y el centro radical tiene por coordenadas

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{p_a}} = \frac{\beta}{\frac{1}{p_b}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{p_c}}$$

Así, los círculos semi-derivados del círculo de Longchamps tienen por centro radical el punto recíproco del punto de Lemoine.

Los semi-derivados del círculo polar conjugado tienen por centro radical el ortocentro. Para el círculo de Brocard se obtiene el punto de Lemoine, etc., etc. Igualmente para los puntos notables. Así, por ejemplo, el centro radical de los círculos semi-derivados del punto retrógado de Brocard es el factoriano de este punto y el punto de Lemoine, etc., etc.

Los círculos semi-derivados de un círculo cualquiera concéntrico con el círculo circunscripto tienen por centro radical el centro de gravedad del triángulo.

7. La consideración de los círculos derivados da origen á algunos ejercicios; citaremos los siguientes:

1.° Sea ε un círculo cualquiera del triángulo ABC; At, Bt', Ct las tangentes trazadas por A, B, C al círculo ε; αA, αB, αC las rectas que unen el punto α simétrico del centro de ε, con relación á O, á los vértices del triángulo de referencia, en fin, PQ, RS, TU las perpendiculares á los extremos de las rectas αA, αB, αC.

Si tomamos en sentido contrario $AP = AQ = At$, $BR = BS = St'$, $CT = CU = Ct''$, los puntos P, Q, R, S, T, U son concíclicos. Se puede reemplazar el círculo ε por un punto notable cualquiera y deducir un teorema análogo.

2.° En particular, sea (I) la circunferencia inscripta al triángulo A B C, p, q, r los puntos de tangencia con BC, AC, AB, hagamos la construcción anterior, y tomemos $AP = AQ = Ar$, $BR = BS = Bp$, $CT = CU = Cq$, los puntos P, Q, R, S, T, U son concíclicos.

3.° Sean P, Q, R, los medios del lado BC, AC, AB del triángulo, H el ortocentro; tomemos sobre estos lados, en sentido contrario, $PH_1 = PH_2 = PH$, $QH_3 = QH_4 = QH$, $RH_5 = RH_6 = RH$. Los puntos H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 son concíclicos.

4.° Sea P, Q, R el triángulo polar de un punto M, O_1 el centro del círculo circunscripto á P Q R, M_1 el punto simétrico de M con relación á O_1; tomemos sobre BC, AC, AB, en sentido contrario, $PP_1 = PQ_1 = PM_1$, $QP_2 = QQ_2 = QM_1$; $RP_3 = RQ_1 = RM_1$; los puntos P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, P_3 son concíclicos.

ESTUDIOS SUPERIORES EN EL ATENEO DE MADRID

LA MODERNA ORGANIZACION DE LA MATEMÁTICA

(Curso breve explicado por D. Zoel G. de Galdeano en Marzo de 1898)

EXTRACTO DE LA CONFERENCIA TERCERA

Geometría moderna. Carácter propio de la geometría en la escuela de Monge.—Direcciones dadas por Carnot, Poncelet, Chasles, Plücker y Clebsch.—Lo imaginario y lo infinito.—Las geometrías infinitesimales y vectoriales.

Ninguna rama de la Matemática reune, como la Geometría, la claridad y elegancia á la riqueza de sus variados é inagotables desarrollos, bien que sea, en realidad, la esquematización de los conceptos analíticos, es decir la forma concreta de las relaciones algorítmicas, la huella de éstas en el dominio de nuestras representaciones sensibles, llevando por tal correspondencia íntima y recíproca á la unidad de la ciencia matemática, que también somete á la ley del número las manifestaciones de la fuerza.

La Geometría primero se desarrolla en sí, luego se combina con el Análisis y da formas siempre nuevas á las leyes de la Algoritmia, á sus cálculos abstractos, iluminando estos conceptos oscuros con las representaciones intuitivas.

Una graduación seguiremos desde los elementos de Euclides hasta los métodos modernos proyectivos, que encadenan bajo la ley de unidad las más variadas propiedades, y que hace esta ciencia de fácil comprensión.

Euclides había encadenado las proposiciones geométricas bajo la unidad del razonamiento *ad absurdum*, que implícitamente comprende la correspondencia unívoca de los tiempos modernos, pues en efecto, una proposición recíproca implica una equivalencia entre los términos del teorema, una ecuación entre la hipótesis y la tésis. Por esta razón, demostradas la directa y la recíproca ó la directa y la contraria, subsisten las otras dos partes de una proposición.

Euclides prescinde de analogías aparentes, para subordinar su exposición á un riguroso encadenamiento de verdades, encadenamiento que había de subsistir necesariamente, ya que, según veremos, todas las verdades no son más que expansiones ó desarrollos de la propiedad fundamental de la recta, unida á la propiedad de la única paralela, en cuanto á la posición y de la continuidad del espacio, en cuanto á las relaciones de magnitud.

Una exposición de la Geometría puede hacerse (y así lo hize en el tomo V de El Progreso Matemático, bajo el título de *La sistematización de la Geometría*), comenzando por demostrar, mediante un giro, que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

La propiedad de la recta, de no poder cerrar dos un espacio, es decir, de quedar determinada una recta por dos puntos, equivale á dar un sistema de puntos invariablemente unidos que siempre coincide consigo mismo, cuando se hallan fijos dos de sus puntos, sistema que forma la dirección de la recta, de igual manera que el plano es un sistema de puntos que siempre coincide consigo mismo cuando se fijan tres de sus puntos, y análogamente pudiera decirse del espacio de tres dimensiones cuando se fijan cuatro de sus puntos.

Respecto á la exposición de la Geometría elemental, bastará decir que la determinación de una recta por dos de sus puntos equivale á la determinación de una paralela á una recta, dada como base de referencia, que pase por un punto, sustituyéndose por el segundo punto, la dirección, que equivale á darse un punto *impropio*, ó el punto del infinito (según el tenicismo actual).

Los teoremas relativos á las sumas angulares, son casos particulares del de la suma angular en un triángulo, constituyendo el caso de tres rectas que formen triángulo, las proposiciones contrarias de las en que dos de ellas sean paralelas, y los casos de determinación del triángulo, proposiciones recíprocas entre sí, y por esto, equivalentes; entrando en esta combinación los casos de desigualdad de ángulos y de lados, que se demuestran *ad absurdum* según las reglas de este método.

En los elementos de Euclides este método es auxiliar poderoso para establecer el encadenamiento de los teoremas; pero es fácil ver cómo esto equivale á establecer la correspondencia unívoca, latente en el método euclídeo. Así, conforme se extableció en el t. V de El Progreso Matemático, á cada posición de una recta que gira alrededor de un punto, corresponde un ángulo con otra recta fija exterior al punto (recta fundamental, ó base que varía desde cero á un ángulo llano (dos rectos), y cada ángulo exterior de los sucesivos triángulos formados es mayor que el interno (adyacente á la base) como cada segmento interceptado entre el punto y la base es menor que el que se opone á mayor ángulo (y recíprocamente).

Además, tomando segmentos iguales en una recta cualquiera (no paralela á la recta fundamental), se puede dividir el plano en una serie de fajas, y cualquiera otra recta (no paralela á la base) quedará dividida en partes iguales entre sí, y por consiguiente serán proporcionales los segmentos comprendidos entre las mismas paralelas. Como casos particulares están los triángulos formados por todas las secantes paralelas á dos de las dadas y con la base ó alguna paralela á la base, que son equiángulos, y queconducen á la relación métrica en cada triángulo (1) y por consiguiente á la Trigonometría, que es un capítulo de la Geometría, cuyo objeto es la determinación numérica de los elementos de los triángulos, por medio de los de un sistema de triángulos rectángulos cuya hipotenusa común es el radio de las tablas trigonométricas (2).

(1) Progreso Matemático t. V.
(2) *Geometría elemental* y *Geometría general.*

Resulta pues, que la exposición de la Geometría elemental puede simplificarse por medio del fecundo concepto de la correspondencia unívoca; y vemos por tanto, las propiedades de las figuras, y estas mismas figuras, como transformadas unas de otras y como equivalentes, en la série de tales transformaciones.

La relación unívoca adquiere mayor importancia en la escuela de Monge.

La Geometría descriptiva tiene por base los procedimientos de la proyección y la sección, refiriéndose las figuras del espacio á sus proyecciones en dos planos de referencia ó á una figura plana, mediante su perspectiva y, en general, á superficies cualesquiera sobre las que puedan establecerse las correspondencias con otras figuras.

Carnot buscó las correspondencias de las figuras mediante su deformación, que constituyera los diversos elementos de un sistema variable, estudiando los casos de las correspondencias directa, inversa y compleja.

Poncelet hizo reiterados esfuerzos por establecer esta unidad de correspondencia con auxilio del principio de continuidad, amplificó el método de Monge, llamado de *transmutación de las figuras*, por el que se extienden los razonamientos á casos en que algunos de los elementos de éstas se hacen imaginarios, para que subsistan las circunstancias generales de su construcción, é introdujo los elementos *ideales* y *en el infinito* para generalizar y unificar los conceptos geométricos, enriqueciendo el lenguaje matemático hasta para caracterizar las circunstancias que concurren á la no existencia de los objetos geométricos, con términos complementarios de aquéllos que sirven directamente para fijar las condiciones de la existencia ó realidad.

Mediante la elección conveniente de centros y planos de proyección, Poncelet enlaza los elementos en el infinito con los elementos á distancia finita por una relación de proyectividad, así como los imaginarios con los reales.

Chasles, que había llegado á la generación de la geometría moderna, cuyo gérmen encontró en los porismas de Euclides, emplea el concepto de proyectividad bajo la forma de *relación anarmónica*, hace depender los puntos y rectas imaginarios de sus *elementos*, ó sea del punto medio de aquéllos y el producto de sus distancias á un origen común, y del producto de las cotangentes de las inclinaciones de las segundas sobre una recta fija, juntamente con esta recta.

Plücker afianzó el concepto de polaridad de Poncelet y de dualidad de Chasles y Steiner con la invención de las coordenadas tangenciales, y amplificó la Geometría al introducir como elemento del espacio, la recta, exponiendo en su *Nueva geometría del espacio* su original doctrina de los *complejos de rectas* ó teoría del espacio reglado, que consideró su discípulo Sr. Klein, al entrar de lleno en tal estudio, como un sér dualístico en sí.

Una doctrina análoga ofrece Clebsch al exponer su teoría de los *conexos*, ó sea al estudiar formas algébricas que contienen juntamente series de coordenadas-puntos con series de coordenadas-rectas.

Una figura dada por una ecuación, que contiene homogéneamente las coordenadas de un punto móvil en la m^{sima} dimensión y las coordenadas de una recta móvil en la n^{sima}, es decir, de un modo que se tenga, simbólicamente,

$$f(x, u) = a_x^m u_t^n = 0$$

será un *conexo* de m^{simo} *orden* y de n^{sima} *clase*.

Un *elemento* (x, u) será una combinación de un punto x del plano con una recta u del mismo; y combinándose cada uno de los puntos en número doblemente infinito x, con cada una de las rectas en número doblemente infinito u, *formará el conjunto de los elementos un sistema cuádruplemente infinito, de cuatro dimensiones.*

Los puntos que forman con una recta dada los elementos de un conexo (m, n), *se hallan situados en una curva* C_m *de orden* m^{simo}, *y las rectas que forman con un punto dado los elementos del mismo, envuelven una curva* K_n *de la* n^{sima} *clase.*

Oportuno es citar actualmente una importante tranformación que se debe al ilustre matemático Sophus Lie, *la transformación de contacto*, basada en la consideración del *elemento lineal* constituído por cada punto de una curva y su correspondiente tangente, transformación que establece una correspondencia, mediante las ecuaciones

$$X = f_1(x, y, z, p, q), \quad Y = f_2(x, y, z, p, q), \quad Z = f_3(x, y, z, p, q)$$
$$P = x_1(x, y, z, p, q), \quad Q = x_2(x, y, z, p, q)$$

entre dos superficies cuyas coordenadas son x, y, z; X, Y, Z y sus coeficientes angulares respectivos, p, q y P, Q. De manera que cada dos superficies tangentes se transformen en superficies tangentes.

También podemos indicar la geometría esférica del mismo, que es objeto de especial mención por el Sr. Klein en su obra *The Evanston Colloquium* y el sistema de Enneper basado en adoptar como elemento generador del espacio el círculo, asunto desarrolldo por M. Cosserat en una de sus tesis.

Respecto á los conceptos de imaginario é infinito, bastará manifestar cuán provechosos han sido para la unificación de las teorías matemáticas y para constituir la Matemática como organismo perfecto.

La adjunción es el procedimiento que amplifica un sistema, dotándole de nuevas propiedades. La adjunción de cantidades irracionales hace resolubles ecuaciones que no lo eran antes en otro dominio más limitado. Así las operaciones del cálculo se hacen posibles por la adjunción sucesiva de las cantidades racionales, inconmensurables é imaginarias. De igual modo, en geometría, la adjunción de lo imaginario y de lo infinito simplifica los razonamientos y generaliza las propiedades.

La Matemática trata exclusivamente de las correspondencias y de las transformaciones, sin descender al estudio de la naturaleza íntima de las cosas. Le basta establecer el encadenamiento de sus objetos, respetando siempre el principio de contradicción y de subordinación, identidad, ó supraordinación de las clases, buscando sus enlaces á través de relaciones de equivalencia, como la Lógica une los extremos de sus silogismos con auxilio de un término medio.

Así Poncelet observa que un punto interior á una cónica puede considerarse como teniendo con ella un contacto ideal según la polar correspondiente, si se le considera como una sección cónica infinitamente pequeña, y un foco de un sistema de cónicas como el punto de intersección de dos tangentes comunes, que son las asíntotas de un círculo, habiéndose llegado á la proposición singular de que: el foco de una cónica es *un círculo de radio nulo doblemente tangente á aquélla.*

Plücker dá una definición de los focos de una cónica con relación á los puntos cíclicos, que facilita el estudio de las curvas de órdenes superiores, diciendo que: *son los puntos de intersección de las tangentes trazadas á la cónica, por los dos puntos imaginarios de un círculo, situados en el infinito*, es decir, los dos puntos imaginarios que consideró Poncelet con la propiedad de ser comunes á todos los círculos de un plano, para generalizar el estudio de las cónicas, propiedad que se extendió inmediatamente al círculo imaginario de la esfera, al admitir en *todos los conos de revolución de vértice común, un doble contacto con el cono* (imaginario) *asintótico de la esfera descrita desde su vértice como centro* y que: *Todos los conos de revolución del mismo vértice tienen por bases, sobre un plano cualquiera, cónicas que tienen un doble contacto con un mismo círculo imaginario, cuyo centro es el pie de la perpendicular bajada desde el vértice de los conos sobre el plano.*

Las elevadas generalizaciones de Poncelet se sistematizan en las geometrías de Chasles y Staudt. Estos geómetras mantienen la existencia de los puntos de intersección de una cónica y una recta exterior, considerándolas como dobles de una involución.

Chasles demuestra la existencia de un punto exterior á la base de una división homográfica, desde los que se ve cada par de puntos conjugados según un ángulo constante. Y, hallándose determinada una involución elíptica (con puntos dobles imaginarios) por dos pares de elementos correspondientes, distingue Staudt los dos elementos imaginarios, asociando á la forma $A\,B\,A_1\,B_1$ el sentido de sucesión $A\,B\,A_1$ ó $A_1\,B\,A$ de los elementos que contiene, de manera que la forma $A\,B\,A_1\,B_1$, á la que asocia el sentido $A\,B\,A_1$, representa un elemento imaginario y la forma, $A_1\,B\,A\,B_1$ con el sentido $A_1\,B\,A$, representará su conjugado.

Dos puntos imaginarios conjugados determinan una recta real, la base de la involución, de cuya recta se conocen los pares de puntos que definen ésta. Dos rectas imaginarias conjugadas determinan un punto real, el vértice del haz involutivo determinado por los pares de rayos que definen éste. Dos planos imaginarios conjugados pasan por una recta real, el eje de la involución de los planos, de manera que dos pares de elementos reales equivalen á dos dobles imaginarios.

Staudt, el Euclides del siglo XIX, prescinde en su Geometría de toda noción de magnitud; y para presentar la correspondencia unívoca con rigor absoluto, define la intersección de las rectas y planos paralelos como puntos ó rectas impropios. La excepción que parecía ofrecer el caso del paralelismo equivale á la hipótesis de la única paralela, ó implica la admisión del postulado de Euclides. Al considerar Staudt la recta como cerrada por el punto del infinito, lo que se extiende al plano y al espacio, la geometría proyectiva queda constituída como un sistema de correspondencias, perfecto.

Estas ficciones son conceptos que unifican la ciencia ampliando las definiciones y simplificando las demostraciones. Llevan á una ciencia ideal y abstracta siempre correspondiente con la realidad, en la que los enlaces son conceptos de pura razón, encadenados por la más rigurosa lógica é independientes de nuestras contingentes representaciones intuitivas. La relación proyectiva de las figuras permite el tránsito de las construcciones extremas á través de encadenamientos intermedios, correspondientes á los encadenamientos silogísticos de la Lógica ó los encadenamientos de ecuaciones del Algebra.

Cayley traduce geométricamente la teoría de las formas homogéneas, haciendo ver cómo las transformaciones lineales equivalen á relaciones proyectivas, que pueden subsistir, ya entre elementos de igual naturaleza (homografía) ya entre elementos de naturaleza distinta (correlación).

Cayley refiere las figuras á *lo absoluto*, que en la recta es un par de puntos, en el plano una cónica, ó especialmente el par de puntos circulares del infinito, siendo toda cónica que pase por estos dos puntos un círculo.

La ecuación en coordenadas-líneas de lo absoluto es $\xi^2 + \eta^2 = 0$ que consiste en los dos puntos en que la recta $z = 0$ corta al par de rectas $x^2 + y^2 = 0$, ó círculo de radio cero.

En el espacio, lo absoluto es la cónica esférica, intersección de una esfera cualquiera con el cono concéntrico ó esfera desvanecida $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Y de todos estos desarrollos concluye Cayley que: *Las propiedades métricas de una figura no son propiedades en sí, sino sus propiedades en conexion con otra figura, la cónica llamada* LO ABSOLUTO, resultando de esto que la geometría métrica es una parte de la descriptiva.

Esta importante doctrina ha tenido su más genuina representación en las obras de Salmon y en recientes trabajos del eminente profesor Sr. Klein sobre la geometría no-euclídea.

Hemos visto desenvolverse la geometría con el rigor lógico que la dió Euclides en sus elementos, apoyados generalmente en el método *ad absurdum*, como aplicación inmediata del principio de contradicción y también en la aplicación de las relaciones numéricas bajo forma de proporciones, que se extiende hasta la Geometría superior de Chasles y el desarrollo de la geometría de Staudt basado en la consideración de la forma armónica, independiente de toda relación numérica. También se ha visto cómo Cayley hizo surgir un nuevo desarrollo, traduciendo las formas homogéneas del Algebra de las formas. Omitimos el tratar de la aplicación del Algebra á la geometría, ó de la Geometría cartesiana, pues nuestro objeto principal, en esta ocasión es tratar principalmente de la geometría en sí. Pero ya que no sea posible dejar de estudiarla en sus varias manifestaciones, después de citar el desarrollo de la geometría cartesiana é infinitesimal en las que las entidades geométricas quedan envueltas bajo las formas algorítmicas, y los métodos reducidos á procedimientos analíticos, es preciso indicar someramente la evolución inversa por lo que la geometría aparece como auxiliar de la Algoritmia.

Esta evolución parte de Argand adquiere su ámplio desarrollo en la memoria de Cauchy *sobre las cantidades geométricas*, y lleva direcciones distintas en los cuaternios de Hamilton y el tratado de la extensión de Grassmann.

El comienzo de estos desarrollos se encuentra en la interpretación geométrica de las cantidades imaginarias. En este último desarrollo el cálculo formal tiene su representación en la geometría vectorial, cuyos dos más importantes sistemas los son de Hamilton, y Grassmann y de la que trataremos al ocuparnos de las *Algebras simbólicas*.

CRÓNICA

Apertura del curso de la Universidad de Zaragoza.—Al doctor D. Paulino Savirón, catedrático de química inorgánica de esta Facultad de Ciencias correspondía el discurso inaugural.

El tema desarrollado era: *El laboratorio, la matemática y la química*.

Aparte de las doctrinas químicas y de cuanto se refiera à la experimentación, cuyas deficiencias entre nosotros detalla el conferenciante, hemos de manifestar, con agrado, las tendencias teóricas del Sr. Savirón encaminadas à elevar el caracter de los estudios de las ciencias físico-químicas en nuestras universidades.

Es indudable que hoy se impone para el estudio de la química, si hemos de salir de la región del empirismo, estudios de Mecánica racional y de Mecánica física y por consiguiente, de las nociones preliminares del Cálculo diferencial é integral que permitan estudiar la Química en sus relaciones con la Termodinámica.

A este objeto dedica párrafos muy interesantes el Sr. Savirón citando los resultados de las investigaciones de Carnot, Helmholtz, Clausius, Duhem, Van't Hoff y Thomson, explanando las conclusiones formuladas por los químicos Lemoine y Chronstchoff, al proponer, el primero, *vulgarizar la aplicación de los procedimientos matemáticos para la dirección de las diversas investigaciones de la Química*, y al sostener el segundo, que existe un orden de ideas nuevas, de procedimientos y de razonamientos inéditos; que el pensamiento debe moverse en este nuevo cuadro, y que al relacionarse las cuestiones de la Dinámica química con la Mecánica y la Física teóricas, los químicos de la antigua escuela tienen necesidad de una educación nueva, y de ensanchar el círculo ordinario de sus razonamientos, haciendo intervenir en ellos nuevas concepciones».

Poco podemos añadir á lo expuesto por nuestro ilustrado colega, ya que tan gran importancia tienen los párrafos citados.

Es de necesidad imperiosa que se renueve la organización de nuestras Facultades de ciencias, rectificándose el error cometido desde hace unos 20 años de haber retrasado, hasta el tercer curso, el estudio del cálculo integral, haciéndose perder el tiempo á los alumnos en teorías hoy de más interés histórico que práctico, recargando la perniciosa idea de hacer estudios *preliminares*, sin entrar de lleno en las cuestiones, y sin dar importancia, en los comienzos, á la *práctica* de aquéllo cuya metafísica se debe dejar para los últimos años ó para la última parte de cada curso; y en fin, generalizar los estudios matemáticos, exigiéndolos á todos cuantos deban dedicarse á la sección de ciencias físico-químicas. Pues el espíritu matemático influye directamente en las más variadas circunstancias de la vida. Y de explanar estas indicaciones trataremos en la continuación de nuestro trabajo sobre *la Matemática y su enseñanza*.

Congreso matemático de Munich.—La asociación de matemáticos alemanes celebró en Munich, del 17 al 23 de Septiembre el 71 simo congreso anual, que según costumbre realizan en unión con los médicos y naturalistas del imperio.

Esperando la publicación del *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* donde se publican los trabajos presentados, para dar noticia más detallada de este acontecimiento, bastará adelantar por ahora que, entre los muchos é interesantes trabajos presentados, se hallan: Geometría de los dinamos por *E. Study*.—Sobre la recta hiperbólica por *K. Döhlemann*.—Sobre dos grupos notables del espacio de cinco dimensiones, por *Fr. Engel*. Sobre la geometría del grupo de Klein de 360 colineaciones y 360 correlaciones por *G. Kohn*.—Sobre el concepto de la igual validez de los teoremas de Geometría por *Fr. Meyer*.—Sobre una variedad cuadrática en el espacio de cinco dimensiones por *J. Sommer*, y otros trabajos sobre la Aritmética analítica, funciones simétricas, principio de Dirichlet, series, ecuaciones diferenciales, invariación de grupos de sustituciones lineales, acerca de las funciones abelianas, clasificación del problema diferencial, etc. por los Sres Hensel, Mehmke, Weber, Gordan, Hilbert, Horn, Maurer, Noether, Schimpf; Schlesinger, Sommerfeld y otros ilustres matemáticos.

La *Bibliotheca mathematica* que hasta ahora se publicaba en Estokolmo bajo la ilustrada iniciativa del Sr. Eneström va á adquirir nuevo impulso merced al eficaz concurso del conocidísimo editor B. G. Teubner de Leipzig, publicándose en esta casa editorial, á partir del 1900.

Advierte el Sr. Eneström la importancia que han adquirido las notas históricas, hasta el punto de ser necesarias aún en las publicaciones de las teorías matemáticas; y se propone que la *Bibliotheca mathemática*, como órgano de estos estudios favorezca la publicación de nuevas investigaciones y conceda gran importancia á publicar biografías detalladas de eminentes matemáticos, físicos y astrónomos, reseñas de las publicaciones más notables, á favorecer la publicación de un diccionario de las matemáticas, noticias sobre el estado presente de las teorías matemàticas, congresos, exposiciones científicas, cursos universitarios de especial interés, concursos de sociedades científicas, academias etc.

La asociación *Mathesis* que bajo dirección del profesor de Turin Sr. Bettazzi tiene por objeto el perfeccionamiento y desarrollo de la ciencia y de la enseñanza, ha publicado sus nuevos estatutos y decidido la fusión de su órgano *Bolletino dell' Associazione* con el *Periodico di Matematica* que publican los Sres. Lazzeri y Bassani.

Ha cesado de publicarse el *Archivo matemático* por fallecimiento de su director el ilustrado profesor de la Universidad de Valencia D. Luis G. Gascó.

BIBLIOGRAFÍA

ENCYKLOPADIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN *mit einschluss ihrer anwendungen*, herausgegeben von DR. HEINR. BURKHARDT un DR. W. FRANZ MEYER.

Esta publicación hecha bajo los auspicios de las academias de Ciencias de Munich, Viena y la sociedad científica de Gottinga tiene por objeto hacer una síntesis de la ciencia matemática en 6 tomos, cuatro destinados á la Matemática pura y dos á la aplicada.

La exposición de cada teoría está encomendada à los profesores de competencia notoria en la misma Así:

El primer cuaderno contiene: *Grundlagen der Arithmetik* por el profesor *H. Schubert* que se refiere princípalmente á la clasificación de las operaciones.

Kombinatorik por el profesor *E. Netto*, comprende principalmente las determinantes.

Irrationale Zahle und Convergenz etc. por el prof. *A. Pringsheim* que expone los conceptos fundamentales acerca de límite, convergencia, series y productos, infinitos, fracciones continuas y determinantes.

Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen por el profesor *E. Study*. Llega hasta los sistemas de n^2 unidades, á la clasificación de los sistemas de cantidades complejas y á la teoría de las funciones y de los números en sistemas de cantidades complejas superiores.

Mengenlehre por el profesor *A. Schönflies*. Este trabajo comprende principalmente la doctrina del Sr. Cantor sobre los conjuntos, llegando hasta tratar del *continuum* de la *infinitud* de las funciones y de las clases más generales de cantidades.

Endliche discrete gruppen por el pr. *H. Burkhardt* es un elegante resumen de la teoría de las sustituciones.

Rationale Funktionen einer Veränderlichen: ihre Nullstellen por el pr. *E. Netto*. Trata entre otras cuestiones de la interpolación, continuidad, dominio de racionalidad, irreductibilidad. Congruencias algébricas, resultante, discriminante y determinantes funcionales.

Algebraische Gebilde-Arihmetische Theorie algebraischer Grössen por el pr. *G. Landsberg*. Comienza por la noción de cuerpo ó dominio de racionalidad, según Dedekind, de los cuerpos conjugados, resolvente de Galois, del sistema fundamental de Kronecker, de la descomposición de las cantidades enteras en divisores primos ó ideales, según Dedekind y Kronecker. Representación de los divisores primos por asociación de funciones transcendentes, propiedad del sistema modular, sus aplicaciones, números complejos con varias unidades, teoría de Dedekind sobre los módulos, generalización de los conceptos de divisibilidad y equivalencia, sistemas modulares de segundo grado y sus formas normales, representación de un dominio algébrico por parámetros racionales, teorema de Lüroth y transformación de los dominios algébricos.

Invariantentheorie por el pr. *W. Fr. Meyer*. Trata de la equivalencia y la transformación de las formas, del proceso invariantivo, de las amplificaciones (Erweiterungen), grupos y formas especiales.

Sin terminarse el primer tomo, se ha publicado recientemente el primer cuaderno del segundo, también de excepcional interés. Comprende:

Grundlagen der allgemeinen Funktionlehre por el profesor *A. Pringsheim*. Comprende las funciones de una variable, hallándose expuesto lo más fundamental acerca del concepto de función, de los valores límites y de los valores infinitos, de la continuidad, de las funciones derivables, de las funciones analíticas, de la discontinuidad y singularidades, la condensación de éstas, funciones con varias discontinuidades, é infinitas singularidades, en intervalos finitos.

Termina esta memoria con los conceptos fundamentales acerca de las funciones de varias variables.

Diferential und integralrechnung por el pr. *A. Voss* que constituye un *vademecum* interesantísimo.

Sigue á este trabajo la memoria: *Bestimmte Integrale* del profesor *G. Brunel* cuya terminación queda para el cuaderno segundo.

Hallándose el texto acompañado de numerosas notas que ilustran acerca del origen de cada concepto matemático y de sus modificaciones sucesivas, y precedida cada memoria de reseñas biográficas, la *Enciclokpädie der matematischen Wissenschaften* reemplaza ventajosamente á un diccionario etimológico, histórico y técnico de la ciencia matemática.

L'Enseignement mathématique, revue internationale, directeurs: *C. L. Laisant* et *H. Fehr.*

Comité de patronage

MM. P. APPELL Paris); — N. BOUGAIEV (Moscou); — Moritz CANTOR (Heidelberg); — L. CREMONA (Rome); — E. CZUBER (Viene); — Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse); — A-G. GREENHILL (Woolwich); — P. KLEIN (Göttingen); — V. LIGUINE (Varsovie); — P. MANSION (Gand); — MITTAG-LEFFLER (Stockholm); — G. OLTRAMARE (Genéve); — Julius PETERSEN (Copenhague); E. PICARD (Paris); — H. POINCARÉ (Paris); — P.-H. SCHOUTE (Gronigue): — C. STEPHANOS (Athènes); — F. Gomes TEXEIRA (Porto); — A. VASSILIEF (Kasan): — A. ZIWET (Ann-Arbor Michigan, U. S. A.).

Esta revista dedicada principalmente á la enseñanza y especialmente á hacer un estudio de la misma en las diversas naciones, tiene y adquiere cada día mayor importancia.

Las materias contenidas en los cinco números publicados son las siguientes:

Les directurs.—L'ensignement mathématique.—*Z. G. de Galdeano:* Les mathématiques en Espagne.—*C. A. Laisant:* les questions de terminologíe.—*Alfred Binet:* La Pedagogie scientifique.— *H. Laurent.*—Considerations sur l'enseignement des mathématiques dans les clases de spéciales en France.—*H. Fehr:* Sur l'enseigment des élements de Trigonometrie.—*G. Fontené:* sur l'enséigement de la théorie des Vecteurs.

N. 2. V-V *Bobynin:* L'enseignement mathématique en Russie. *R. Barón:* Sur une paradoxe de notre numeration parlée.—*H. Poincaré:* La notation différentielle et l'enseignement.—*C A. Laisant:* Le choix des sujets de composition.—*G. Fontené:* Sur l'emploi des signes en Géométrie.

N. 3. *H. Poincaré:* La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement.— *W. W. Beman:* Un chapitre de l'histoire des mathématiques.—*R. de Montesus:* Les fondements de l'Arithmetique moderne.=*Z. G de Galdeano:* Quelques principes géneraux sus l'enseignemnnt mathématique. *G. Candido:* Sur la fusion de la Planimétrie et de la Stéréometrie dane l'enseignement de la Géométrie élémentaire en Italie.

N. 4. *C. A. Laisant* La Mécanique rationnelle et la Mecánique appliquée.—*C. Burali Forti.* Sur l'égalité el sur l'introduction des eléments derivés dans la science.—*W. Franz Meyer:* Sur l'economie de la pensée dans les mathématiques élémentaires.—*Ch. Berdellé* de la numeration parlée an point de vue internacional.—*G. Fontené:* Sur les signes des distances en Géométrie.—*A. Poussart:* Classification des lignes et surfaces de second ordre.—*G. Budelot.*—Une première leçon de Géométrie descriptive.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 275 (Véase pág. 127)

Sea un triángulo ABC. *Hallar la parábola circunscripta tal, que el área interceptada entre el lado* BC *y esta parábola sea mínima.*

(*E. Lemoine*).

Solución por el Sr. Lemoine (E.)

Evidentemente la parábola que se pide es la que tiene por tangente en A la paralela á BC trazada por este punto; porque el área considerada es los 2/3 del paralelógramo cuyos lados son BC, la tangente á la parábola paralela á BC y las dos paralelas trazadas por B y C á la recta que une el punto de contacto de la tangente paralela á BC. Este paralelógramo tiene el área mínima, si el punto de contacto está en A. En efecto, todos tienen por base BC, y la altura es mínima, si el punto de contacto está en A.

Esta parábola tiene, por ecuación, en coordenados normales,

$$\frac{4}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}=0$$

CUESTIÓN 268. (Véase pág. 64).

Solución por el Sr. Schiappa Monteiro (A)

Los tres grupos de puntos A, C, D; B, D, E; C, D, E, según el teorema de Stewart dan:

$$\overline{OA}^2 . CD+\overline{OC}^2 . DA+\overline{OD}^2 . AC+AC . CD . DA=0 \qquad (1)$$

$$\overline{OB}^2 . DE+\overline{OD}^2 . EB+\overline{OE}^2 . BD+BD . DE . EB=0 \qquad (2)$$

$$\overline{OC}^2 . ED+\overline{OD}^2 . CE+\overline{OE}^2 . DC+DC . CE . ED=0 \qquad (3)$$

sumando estas identidades, resulta

$$\overline{OA}^2 . CD + \overline{OB}^2 . DE + \overline{OC}^2 . EA + \overline{OD}^2 . AB + AC . CD . DA$$
$$+ BD . DE . EB + DC . CE . ED = 0 \qquad (4)$$

Si se toma por origen de los segmentos de los tres últimos términos de (4) el punto A, se tendrá

$$AC . CD . DA = - AC (AD - AC) AD = \overline{AC}^2 . AD - \overline{AD}^2 . AC \quad (5)$$

$$BD . DE . EB = (AD - AB) (AE - AD) (AB - AE)$$
$$= \overline{AB}^2 . ED + \overline{AD}^2 . BE + AE^2 DB \qquad (6)$$

$$DC . CE . EB = (AC - AD) (AE - AC) (AD - AE)$$
$$= \overline{AC}^2 . DE + \overline{AD}^2 . EC + \overline{AE}^2 . CD \qquad (7)$$

De donde

$$AC . CD . DA + BD . DE . EB + DC . CE . ED$$
$$= \overline{AB}^2 . ED + AC^2 . AE + AD^2 BA + AE^2 . CB \quad (8)$$

y por consiguiente

$$\overline{OA}^2 . CD + \overline{OB}^2 . DE + \overline{OC}^2 . EA + \overline{OD}^2 . AB + \overline{OE}^2 . BC$$
$$= AB^2 . DE + AC^2 . EA + AD^2 . AB + AE^2 . BC \quad (9)$$

Tomando sucesivamente por origen de estos mismos segmentos los puntos B, C, D, E, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} & AC . CD . DA + BD . DE . EB + DC . CE . ED \\ & = \overline{BA}^2 . DC + \overline{BC}^2 . AE + \overline{BD}^2 . BA + \overline{BE}^2 . CB \\ & = \overline{CA}^2 . DC + \overline{CB}^2 . ED + \overline{CD}^2 . BA + \overline{CE}^2 . CB \\ & = \overline{EA}^2 . DC + \overline{EB}^2 . ED + \overline{EC}^2 . AE + ED . BA \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

lo que se tenía que demostrar.

Nota. Hemos partido de la identidad

$$CD + DE + EA + AB + BC = 0 \qquad (11)$$

determinada por los segmentos del primer miembro de (9), de que hemos partido para obtener las identidades (1), (2), (3)

A los tres últimos términos del primer miembro de la identidad (8) corresponden las identidades

$$AC + CD + DA = 0, \; BD + DE + EB = 0, \; DC + CE + ED = 0 \quad (12)$$

Pueden obtenerse otras expresiones para las relaciones entre los segmentos determinados por los cinco puntos dados, recurriendo al teorema de Stewart.

Así, considerando la identidad

$$DE + EC + BD + CA + AB = 0, \quad (13)$$

tendremos los tres grupos de tres puntos A, D, E; B, D, E; B, D, C y de ésto se derivan las tres identidades siguientes:

$$\overline{OA}^2 . DE + \overline{OD}^2 . EA + \overline{OE}^2 . AD + AD . DE . EA = 0 \quad (14)$$

$$\overline{OB}^2 . ED + \overline{OD}^2 . BE + \overline{OE}^2 . DB + BE . ED . DB = 0 \quad (15)$$

$$\overline{OB}^2 . DC + \overline{OC}^2 . BD + \overline{OD}^2 . CD + CB . BD . DC = 0 \quad (16)$$

y sumando estas identidades, se tendrá:

$$\overline{OA}^2 . DE + \overline{OB}^2 . EC + \overline{OC}^2 . BD + \overline{OD}^2 . CA + \overline{CE}^2 . AB$$
$$+ AD . DE . EA + BE . ED . DB + CB . BD . DC \quad (17)$$

siendo

$$AD . DE . EA + BE . ED . DB + CB . BD . DC$$
$$= \overline{AB}^2 . EC + \overline{AC}^2 . BD + \overline{AD}^2 . CA + \overline{AE}^2 . AB \quad (18)$$

Caso de CUATRO, SEIS *ó* VARIOS *puntos.*

Si se tienen cuatro puntos A, B, C, D, obtendremos de una manera análoga:

$$\overline{OA}^2 . CD + \overline{OB}^2 . DC + \overline{OC}^2 . BA + \overline{OD}^2 . AB + AC . CD . DA$$
$$+ BD . DC . CB = 0 \quad (19)$$

ó, tomando por origen el punto A,

$$\overline{OA}^2 . CD + \overline{OB}^2 . DC + \overline{OC}^2 . BA + \overline{OD}^2 . AB$$
$$= \overline{AB}^2 . DC + \overline{AC}^2 . BA + \overline{AD}^2 . AB \quad \text{etc.} \qquad (20)$$

Igualmente se obtienen otras expresiones.

En el caso de seis puntos A, B, C, D, E, F se puede considerar la identidad

$$DE + EF + FD + CA + AB + BD = 0 \qquad (21)$$

á la que corresponden los cuatro grupos de tres puntos A, D, E; B, D, E; B, C, D; B, C, F, y se tendrán las identidades siguientes:

$$\overline{OA}^2 . DE + \overline{OD}^2 . EA + \overline{OE}^2 . AD + DE . EA . AD = 0 \qquad (22)$$
$$\overline{OB}^2 . ED + \overline{OD}^2 . BE + \overline{OE}^2 . DB + BE . ED . DB = 0 \qquad (23)$$
$$\overline{OB}^2 . DC + \overline{OC}^2 . BD + \overline{OD}^2 . CB + CB . BD . DC = 0 \qquad (24)$$
$$\overline{OB}^2 . CF + \overline{OC}^2 . FB + \overline{OF}^2 . BC + BC . CF . FB = 0 \qquad (25)$$

de las que resulta

$$\left.\begin{aligned} &\overline{OA}^2 . DE + \overline{OB}^2 . EF + \overline{OC}^2 . FD + \overline{OD}^2 . CA + \overline{OE}^2 . AB \\ &\quad + \overline{OF}^2 . BC + BC . CF . FB + BE . ED . DB \\ &\quad + CB . BD . DC + DE . EA . AD = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

ó

$$\left.\begin{aligned} &\overline{OA}^2 . DE + \overline{OB}^2 . EF + \overline{OC}^2 . FD + \overline{OD}^2 . CA + \overline{OE}^2 . AB \\ &\quad + \overline{OF}^2 . BC = \overline{AB}^2 . EF + \overline{AC}^2 . FD + \overline{AD}^2 . CA \\ &\quad + \overline{AE}^2 . AB + \overline{AF}^2 . BC \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Se ve pues, que el teorema de Stewart puede extenderse á un número cualquiera de puntos A, B, C, D, ... en línea recta.

Observación. Es oportuno observar que solamente en el caso de darse cinco puntos, se obtiene una expresión (11) en la que todos los segmentos tienen sus extremidades comunes, dispuestas en orden alfabético, que originan la identidad (9).

CUESTIONES PROPUESTAS

286 En la serie de Fibonacci.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2 \quad .....$$

todos los términos $u_{16\,n}$ son múltiplos de 987.

(*C. A. Laisant*).

287 Se tiene siempre

$$a^2(a^{2n} - b^n c^n) + b^2(b^{2n} - c^n a^n) + c^2(c^{2n} - a^n b^n) > 0$$

cualesquiera que sean a, b, c.

(*E. Lemoine*).

288 Si una parábola se halla inscripta en un triángulo ABC, su punto de Gergonne (punto de intersección de las rectas que unen un vértice al punto de contacto sobre el lado opuesto) se halla en la recta de Lemoine (polar del punto de Lemoine con relación al círculo circunscrito).

(*E. Lemoine.*)

289 Si una hipérbola equilátera se halla inscrita en un triángulo ABC, su punto de Gergonne está en la cónica cuya ecuación en coordenadas normales es

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,y\,z \cos A + 2\,z\,x \cos B + 2\,x\,y \cos C = 0.$$

(*E. Lemoine*)

290 Si tres números positivos a, b, c, son tales que $a + b + c = 1$, demostrar que $(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) > 6\,a\,b\,c$.

(*J. d' Avillez*)

291 Dadas dos esferas iguales, existe un númáro doblemente infinito de tetraedros cuyas aristas son tangentes á las dos esferas.

(*G. Fontené*).

Zaragoza: Imprenta de la Sra. Viuda de Ariño, Coso, 100

26 Sepbre 1907