Serie 2.ª Año I Zaragoza, Agosto de 1899 Núm. 4

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

Remarques sur la série logarithmique

par M. A. Aubry

1.—Pour x et $\omega < 1$, on a:

$$\begin{aligned} & \mathrm{L}(1+x\omega) - \omega\,\mathrm{L}(1+x) \\ & = \omega x^2\left(\frac{1-\omega}{2} - x\frac{1-\omega^2}{3}\right) + \omega x^4\left(\frac{1-\omega^3}{4} - x\frac{1-\omega^4}{5}\right) + \ldots . \end{aligned}$$

Le premier membre est donc plus petit que $\frac{x^2}{2}\omega(1-\omega) < \frac{x^2}{8}$, puisque le maximun de $\omega(1-\omega)$ a lieu pour $\omega = 1-\omega$. Changeant x en $\frac{1}{n}$, il vient ainsi:

$$\text{(1)} \qquad [\mathrm{L}(n+\omega) - \mathrm{L}\,n] - \omega[\mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n] < \frac{1}{8n^2},$$

ce qui montre que *l'erreur provenant de la méthode des parties proportionnelles est inférieure* à $0{,}0^8125$, *si le nombre dont on cherche le logarithme est* $> 10\,000$.

2.—Autrement, on a

$$\frac{1}{x}\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots\right)$$

ce qui montre que la valeur du premier membre augmente en même temps que x. Donc, pour $a < b$, on a

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{a} \mathrm{L}\, \frac{1+a}{1-a} > \frac{1}{b} \mathrm{L}\, \frac{1+b}{1-b}. \qquad (1 > a > b > 0)$$

Changeons a en $\frac{h}{2+h}$ et b en $\frac{\omega}{2+\omega}$, on a la relation suivante, traitée par Mercator comme une égalité approximative (*Logarithmo technia*. Londres, 1668)

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mathrm{L}(1+\omega)}{\mathrm{L}(1+h)} < \frac{\omega}{h} \frac{2+h}{2+\omega}$$

L'on remarque que le premier membre est supérieur à $\frac{\omega}{h}$, en prenant $\frac{\omega}{h}$ pour sa valeur, l'erreur sera plus petite que

$$\frac{\omega}{h} \frac{2+h}{2+\omega} - \frac{\omega}{h} = \frac{\omega(h-\omega)}{h(2+\omega)} < \frac{h^2}{4} \frac{1}{h(2+\omega)} < \frac{h}{8};$$

changeant ω en $\frac{\omega}{n}$ et h en $\frac{1}{n}$, on voit qu'en posant

$$\text{(4)} \qquad \frac{\mathrm{L}(n+\omega) - \mathrm{L}\,n}{\mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n} = \omega,$$

l'erreur est $< \frac{1}{8^n}$, et qu'en posant

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{L}(n+\omega) = \mathrm{L}\,n = \omega\,[\mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\,n]$$

l'erreur est inférieure à

$$\frac{1}{8n} \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{8n^2}$$

3.—De même la fonction suivante

$$\frac{e^x + e^x - 2}{x^2} = 1 + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \dots$$

augmentant avec x, pour $a > b$, on aura:

$$(6) \qquad \frac{e^a + e^{-a} - 2}{a^2} > \frac{e^b + e^{-b} - 2}{b^2}$$

d'où, en posant $a = L(1+h)$, $b = L(1+\omega)$, la relation

$$(7) \qquad \frac{L(1+\omega)}{L(1+h)} > \frac{\omega}{h}\sqrt{\frac{1+h}{1+\omega}}$$

ce qui avec (3) donne la double inégalité

$$(8) \qquad \frac{\omega}{h}\,\frac{2+h}{2+\omega} > \frac{L(1+\omega)}{L(1+h)} > \frac{\omega}{h}\sqrt{\frac{1+h}{1+\omega}}$$

4.—Prenons, avec Mercator, $\frac{\omega}{h}\,\frac{2+h}{2+\omega}$ pour la valeur de $\frac{L(1+\omega)}{L(1+h)}$; l'erreur sera inférieure à la différence des deux membres extrêmes de (8), soit à

$$(\alpha) \qquad \frac{\omega}{h}\;\frac{\left(\frac{2+h}{2+\omega}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1+h}{1+\omega}}\right)^2}{\frac{2+h}{2+\omega} + \sqrt{\frac{1+h}{1+\omega}}}$$

Remplaçons le dénominateur du second facteur de (α) par la valeur plus petite 2, on verra que (α) a une valeur inférieure à

$$(\beta) \qquad \frac{\omega}{h}\,\frac{h-\omega}{2}\;\frac{h+\omega+h\omega}{(2+\omega)^2(1+\omega)}$$

Or on a:

$$(2+\omega)^2(1+\omega) > 4, \quad \omega(h-\omega) < \frac{h^2}{4}, \quad h+\omega+h\omega < 2h+h^2$$

il s'ensuit que la valeur de (α) est inférieure à $\frac{h^2(2+h)}{32}$, quantité trés sensiblement égale à $\frac{h^2}{16}$

Changeons h en $\frac{1}{n}$ et ω en $\frac{\omega}{n}$, on verra qu'en posant

$$(9) \qquad \mathrm{L}\,(n+\omega) = \mathrm{L}\,n + \omega\,\frac{2n+1}{2n+\omega}\Big[\mathrm{L}\,(n+1) - \mathrm{L}\,n\Big],$$

l'erreur sera inférieure à

$$\frac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{16\,n^2} < \frac{1}{16\,n^3}, \text{ ou à } 0{,}0^{16}6, \text{ si } n > 10\,000$$

Cette interpolation est, comme on voit, beaucoup plus exacte que celle par parties proportionelles.

5.—Faisons dans les formules qui précédent $h = \frac{1}{n}$ et $\omega = \frac{1}{n+1}$, il vieadra

$$(10) \qquad \frac{n}{n+1}\,\frac{2n+1}{2n+3} - \frac{\mathrm{L}\,\dfrac{n+2}{n+1}}{\mathrm{L}\,\dfrac{n+1}{n}} < \frac{n+1}{n\,(n+2)\,(2\,n+3)^2} < \frac{1}{4\,n^3}$$

Par conséquent, la méthode de Mercator peut se représenter par l'égalité approchée

$$(11) \qquad \mathrm{L}\,(n+2) - \mathrm{L}\,(n+1) = \frac{n}{n+1}\,\frac{2n+1}{2n+3}\Big[\mathrm{L}\,(n+1) - \mathrm{L}\,n\Big]$$

l'erreur étant inférieure à

$$\frac{n}{n+1}\;\frac{2n+1}{2n+3}\;\frac{\mathrm{L}.(n+1) - \mathrm{L}\,n}{4\,n^3} < \frac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{4\,n^3} < \frac{1}{4\,n^4},$$

c'est-á-dire, inférieure á $0{,}0^8 25$, si $n > 100$, comme Mercator le suppose.

6.—Par des moyens faciles à restituer, Mercator trouve

$$1{,}005^{\,461} = 9{,}965774 \quad \text{et} \quad 1{,}005^{\,462} = 10{,}015603$$

$$0{,}995^{\,459} = 0{,}1001823 \text{ et } \quad 0{,}995^{\,460} = 0{,}0996814$$

d'où, en interpolant les exposants par des moyennes proportionnelles

$$1{,}005^{461,\,6868} = 10 \quad \text{et} \quad 0{,}995^{459,\,3639} = 0{,}1$$

On a ainsi les logarithmes des deux nombres 100, 5 et 99,5, qui différent de l'unité: la formule (11) permettra de trouver, avec huit décimales exactes, ceux de 101,5, et ainsi de suite.

7.—Dans (8) changeons ω en $\sqrt[n]{1+\omega}-1$ et h en $\sqrt[n]{1+h}-1$, il viendra:

$$(12)\quad \frac{\sqrt[n]{1+\omega}-1}{\sqrt[n]{1+h}-1}\,\frac{\sqrt[n]{1+h}+1}{\sqrt[n]{1+\omega}+1} > \frac{\mathrm{L}(1+\omega)}{\mathrm{L}(1+h)} > \frac{\sqrt[n]{1+h}-1}{\sqrt[n]{1+\omega}-1}\sqrt[2n]{\frac{1+h}{1+\omega}}$$

formule qui donne un perfectionnement indéfini de la méthode de Mercator.

8.—Newton, qui a le premier compris l'importance théorique des séries, s'est également préoccupé de leur utilisation pratique. Dans sa *Meth. Flux* et dans sa célébre *Lettre à Oldenbourg* de Juin 1676, il montre comment on peut remplacer une série par une expression approchée, mais finie.

La représentation d'une fonction X par une série $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$ n'est autre chose que l'ensemble d'une infinité de formules de plus en plus approchées de X:

$$\mathrm{X} = a, \quad \mathrm{X}\, a + bx, \quad \mathrm{X} = a + bx + cx^2, \ldots.$$

Suivant l'approximation qu'on désire. on peut prendre l'une ou l'autre de ces expressions pour la valeur de X; mais souvent l'on a avantage à remplacer la série par une autre facile à sommer et ayant avec la première les deux on trois premiers termes communs. Il peut arriver, en effet, que les termes suivants de la première diffèrent peu de ceux de la seconde, et l'approximation est augmentée d'autant.

Newton emploie les développements des deux expressions

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{1-\mathrm{C}x} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{1-\mathrm{C}x}$$

dont il identifie les trois premiers termes à ceux de la série à représenter, ce qui détermine les coefficients A, B, C; il trouve ainsi plusieurs formules relatives aux arcs circulaires.

9.—Posons de même

$$\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots = \mathrm{A}\,x+\frac{\mathrm{B}\,x}{1-\mathrm{C}\,x^2}$$
$$=(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,x+\mathrm{B\,C}\,x^3+\mathrm{B\,C}^2\,x^5+\ldots$$

on trouve successivement:

$$\mathrm{C}=\frac{3}{5},\quad \mathrm{B}=\frac{5}{9},\quad \mathrm{A}=\frac{4}{9},$$

d'où la formule très approchée

$$\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{2\,x}{9}\left(4+\frac{25}{5-3\,x^2}\right)$$

et, en effet, en développant, on trouve pour la valeur du second membre

$$2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{3}{25}\,x^7+\frac{9}{125}\,x^9+\ldots\right);$$

l'erreur est de

$$\frac{8}{175}\,x^7+\frac{88}{1125}\,x^9-\frac{532}{6875}\,x^{11}+\ldots$$

Pour $x<0,2$, elle est inférieure á $0{,}0^8 5$: la formule de Sharp (Voir *Math. Tables* de Stevin, 2^e^ édition, Londres, 1726; voir aussi J. S. 1899, p. 10):

$$2=\left(1+\frac{1}{15}\right)^7\left(1+\frac{1}{24}\right)^5\left(1+\frac{1}{80}\right)^3$$

combinée avec (13), donnerait donc le logarithme de 2, avec au moins huit décimales exactes.

10. - Faisons dans (15) $x = \frac{1}{2n+1}$, il vient la formule suivante, assez commode:

$$(15) \qquad L\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3(2n+1)}\left(6 + \frac{5}{10n(n+1)+1}\right)$$

qui, pour $n = 10$, donne L 1, 1 $= \frac{6611}{69363} = 0{,}095310179778$ au lieu de $0{,}095310179801 + \ldots\ldots$

Voir sur le même sujet, un article de M. Lampe (M. 1897), où entre autres résultats remarquables, il arrive par des moyens analogues, à la formule

$$L\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{15}\,\frac{945 - 735x^2 + 64x^4}{63 - 70\,x^2 + 15x^4}$$

laquelle est très approchée, car pour $x = \frac{1}{3}$, elle donne

$$L\,2 = 0{,}69314715 \quad \text{au lieu de} \quad 0{,}69314718$$

11.—On peut appliquer le procédé des coefficients indéterminés à la recherche de formules donnant un logarithme en fonction de plusieurs autres. Par exemple, en posant

$$L(1+px) = A_1\,L(1+x) + A_2\,L(1+2x) + \ldots\ldots + A_q\,L(1+qx)$$

et identifiant les coefficients de x, x^2, x^3, ... x^q, on aura une généralisation de la formule donneé par Callet dans la préface de ses *Tables de log*: cette formule correspond au cas de $q = p$.

12.—Mais il y a grand avantage à partir du développement de $L\frac{1+x}{1-x}$. Posons, par exemple

$$L\frac{1+nx}{1-nx} = A\,.\,L\frac{1+3x}{1-3x} + B\,.\,L\frac{1+2x}{1-2x} + C\,.\,L\frac{1+x}{1-x}.$$

On trouvera

$$C = n\frac{n^4-13n^2+36}{24}, \quad B = -n\frac{n^4-10n^2+9}{30}, \quad A = n\frac{n^4-5n^2+4}{120}$$

d'où, pour $n=4$, la formule très approchée

$$(15) \qquad 15\,\mathrm{L}\,\frac{1+4x}{1-4x} = 26\,\mathrm{L}\,\frac{1+3x}{1-3x} + 46\,\mathrm{L}\,\frac{1+2x}{1-2x} - 110\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}$$

On trouvera de même la formule

$$(16) \qquad \mathrm{L}\frac{1+nx}{1-nx} = n\frac{n^2-1}{6}\,\mathrm{L}\,\frac{1+2x}{1-2x} - n\frac{n^2-4}{3}\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}$$

équivalente à un procédé indiqué par Mercator (*loc, cit*), et qui pour $n=3$, devient

$$(17) \qquad \mathrm{L}\frac{1+3x}{1-3x} = 4\,\mathrm{L}\,\frac{1+2x}{1-2x} - 5\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}$$

L'application de ces formules est facile.

13.—Multiplions la série logarithmique par des polynômes finis ou infinis, comme $1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots\ldots$ et réduisons; nous obtiendrons une infinité de développements de $\mathrm{L}(1+x)$, dont ceux obtenus en intégrant successivement les deux membres de l'égalité

$$\mathrm{L}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots$$

ne sont que des cas particuliers.

Ainsi, en multipliant par $x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots\ldots$ et ordonnant par rapport à x, on trouve la relation suivante, due à M. Bertrand (*Calc. diff.* Paris 1864):

$$(18) \qquad \mathrm{L}(1+x) = (1+x)(x - H_2x^2 + H_3x^3 - H_4x^4 + \ldots\ldots)$$

et qui est peu utile, puisque les coefficients $H_2, H_3, H_4, \ldots\ldots$ augmentent jusqu'à l'infini.

On a de même

$$(1+x)\,\mathrm{L}(1+x) = x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \dots$$

d'où

$$\mathrm{L}(1+x) = \frac{x}{1+x}\left(1 + \frac{x}{1.2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} - \dots\right) \tag{19}$$

Multipliant encore une fois par $1 + x$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(1+x) &= \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{3x^2}{2(1+x)^2}\\ &- \frac{2x^3}{(1+x)^2}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{x}{2.3.4} + \frac{x^2}{3.4.5} - \dots\right)\end{aligned} \tag{20}$$

14.—On continuerait aisément; mais voici un cas particulier à remarquer.

Si dans la multiplication de $\mathrm{L}(1+x)$ par $1 + A_0 x + A_1 x^2 + \dots + A_{n-1} x^n$, on écrit que les coefficients de $x^2, x^3, x^4, \dots x^n$ sont identiquement nuls, on aura pour déterminer les coefficients A_0, $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, les équations

$$A_0 - \frac{1}{2} = 0,\quad \frac{A_1}{1} - \frac{A_0}{2} + \frac{1}{3} = 0,\quad \frac{A_2}{1} - \frac{A_1}{2} + \frac{A_0}{3} - \frac{1}{4} = 0, \dots$$

d'où

$$A_0 = 1,\quad A_1 = \frac{1}{2},\quad A_2 = -\frac{1}{12},\quad A_3 = \frac{1}{24},\quad A_4 = -\frac{19}{720},$$
$$A_5 = \frac{3}{160},\quad A_6 = -\frac{863}{60480}, \dots$$

et par suite, on aura une égalité de cette forme

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}(1+x) =\\ &= \frac{1}{1 + A_0 x + \dots + x_{n-1} A}\,(x + B x^{n+1} + C x^{n+2} + \dots)\end{aligned} \tag{21}$$

Par exemple, pour $n = 2$, on a cette formule de Gudermann (Cr. t. XXVIII)

$$(22)\qquad L(1+x)=\frac{2x}{2+x}+\frac{x^3}{2+x}\left(\frac{1}{2\,.\,3}-\frac{2x}{3\,.\,4}+\right.$$

$$\left.+\frac{3x^2}{4\,.\,5}-\frac{4x^3}{5\,,\,6}+\ldots\right)$$

et pour $n=3$

$$(23)\qquad \frac{12+6x-x^2}{12}L(1+x)=$$

$$\frac{x}{1}-\frac{1}{12}\sum_{k=4}^{k=\infty}\frac{-5k^2+23k-24}{k(k-1)(k-2)}(-x)^k$$

15.—Le développement de $\frac{1}{L(1+x)}$ a fait l'objet des études de Fontana, qui s'en servait pour démontrer l'égalité $\int_0^1 \frac{dx}{Lx}=\infty$; et de Lorgna qui déduit de la formule symbolique

$$\int\frac{u\,dx}{h}=\Big[L(1+\Delta)\Big]^{-1}_{u}$$

cette remarquable formule de sommation des séries

$$\int u\,dx=(A+C_{x,1})\,u+(A_2+C_{x,2})\,\Delta u+(A_3+C_{x,3})\,\Delta^2 u+\ldots.$$

la notation $C_{x,n}$ désignant à l'ordinaire, l'expression

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n)}{n!}$$

Les nombres $A_1, A_2, \ldots.$ peuvent être définis, d'aprés Sarrus (A. G. t. X, 1820), par l'égalité

$$A_n=\int_0^1 C_{x,n}\,dx$$

En effet, on a

$$(\gamma) \qquad \Delta^k \int C_{x,n}\, dx = \int \Delta^k C_{x,n}\, dx = \int C_{x,\, n-k}\, dx$$

$$\Delta^{n+1} C_{x,n} = 1, \quad \Delta^{n+1+p} C_{x,n} = 0$$

Or, dans la relation d'Euler

$$y' = \frac{\Delta y}{1} - \frac{\Delta^2 y}{2} + \frac{\Delta^3 y}{3} - \ldots .$$

faisons $y = \int C_{x,\, n+1}\, dx$, et intégrons de 0 à 1, il viendra, à cause de (γ)

$$0 = \frac{1}{1}\int_0^1 C_{x,n}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 C_{x,\, n-1}\, dx + \frac{1}{3}\int_0^1 C_{x,\, n-2}\, dx - \ldots .$$

$$\mp \frac{1}{n+1}\int_0^1 C_{x,0}\, dx \mp \frac{1}{n+2}$$

Il est facile de faire voir que les nombres $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils décroissent en valeur absolue.

Sarrus tire de sa théorie plusieurs formules intéressantes, entre autres la suivante qui se rapporte à notre sujet:

$$L(n+1) - L\, n = \frac{1}{n} - \frac{1!\, A_1}{n(n+1)} + \frac{2!\, A_2}{n(n+1)(n+2)} + \ldots .$$

NOTE.—Abréviations employées ci-denus.—M. *Mathesis*.—J. S. *Journal de mathématique spéciales*.—Cr. *Journal de Crelle*.—A. G. *Annales de Gergonne*.

SOBRE LOS CÍRCULOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

por D. Juan J. Durán Loriga
Comandante de Artillería

(*Continuación*)

OBSERVACIÓN.—Puede observarse que los círculos asociados á círculos que pasan por un mismo punto, no pasan en general por un mismo punto; pero en un caso particular, se puede enunciar la proposición siguiente:

Sean M y M′ un punto y su primer (ó segundo) isobárico, situados en una circunferencia cualquiera concéntrica con la circunferencia circunscripta. Puede decirse que si diversos círculos pasan por M, sus primeros (ó segundos) asociados pasan por M.

Para obtener los puntos que satisfagan á las condiciones del teorema, se puede recurrir á la fórmula

$$\alpha = \frac{(c^2 - a^2)\beta\gamma}{(b^2 - a^2)\gamma + (c^2 - b^2)\beta}$$

en la que se dan á β y γ valores arbitrarios, y se obtiene el valor de α. De esta manera obtenemos por ejemplo, los puntos:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{1}$$ (centro de gravedad)

$$\alpha b^2 = \rho c^2 = \gamma a^2$$ Primer isobárico del centro de homología de A B C con el primer triángulo de Brocard.

$$\frac{\alpha}{c-a} = \frac{\beta}{b-a} = \frac{\gamma}{b+c}$$

$$\frac{\alpha}{a-c} = \frac{\beta}{a+b} = \frac{\gamma}{b-c}$$

Puntos derivados de los puntos algébricamente asociados al centro del círculo inscripto, por medio de transformaciones isobáricas y complementarias.

Se obtienen también los puntos

$$\frac{\alpha}{c^2 - a^2} = \frac{\beta}{2(b^2 - c^2)} = \frac{\gamma}{2(c^2 - b^2)}$$

$$\frac{\alpha}{b^2 c^2 (a^2 - c^2)} = \frac{\beta}{b^2 (a^2 c^2 - b^4)} = \frac{\gamma}{c^2 (b^4 - a^2 c^2)}$$

Por otra parte los vértices A, B, C del triángulo fundamental cumplen evidentemente las condiciones del teorema.

3 Se pueden considerar los círculos asociados de un punto notable M mirándolo como círculo de radio nulo (véase mi memoria de Saint-Etienne). Si se designan por $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ las coordenadas del centro, las ecuaciones del punto M y de los círculos asociados son

$$\sigma\left(\rho_\alpha^2 \alpha + \rho_b^2 \beta + 6_c^2 \gamma\right) - \varepsilon a^2 \rho \gamma = 0$$

$$\sigma\left(\rho_b^2\alpha+\rho_c^2\beta+\rho_a^2\gamma\right)-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

en las que $$\sigma\left(\rho_c^2\alpha+\rho_a^2\beta+\rho_b^2\gamma\right)-\Sigma a^2\rho\gamma=0$$

$$\rho_a^2=\frac{(\beta_1+\gamma_1)(c^2\beta_1+b^2\gamma_1)-a^2\beta_1\gamma_1}{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)^2}\;\ldots\ldots\;\rho_b^2=\ldots\ldots\rho_c^2=\ldots\ldots$$

Pasemos á algunos casos particulares:

1.º Centro de gravedad.

La ecuación de G considerado como punto-círculo es

$$\frac{\sigma}{9}\Sigma(2b^2+2c^2-a^2)\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

los círculos asociados tienen por eje radical la recta G K.

2.º La ecuación del punto de Lemoine es

$$\frac{\sigma}{m^4}\cdot\Sigma b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

los círculos asociados tienen por eje radical la recta que une G al recíproco de K, y los ejes radicales de estos círculos combinados con el punto K pasan, el uno por el punto directo de Brocard y el otro por el punto retrógrado de Brocard.

3.º El punto directo de Brocard tiene por ecuación

$$\frac{\sigma}{n}\cdot\Sigma b^4c^2\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

Los círculos asociados tienen por eje radical la recta

$$a^2(c^4-a^2b^2)\alpha+b^2(a^4-b^2c^2)\beta+c^2(b^4-a^2c^2)\gamma=0$$

se pasa de esta recta á la recta de Brocard tomando: 1.º la recíproca; 2.º la inversa; 3.º una isobárica.

4.º El centro del círculo inscripto á ABC tiene por ecuación

$$\frac{\sigma}{p}\Sigma bc(p-a)\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

El eje radical de sus asociados pasa por el recíproco de I, el de I combinado con los círculos asociados pasa respectivamente por el punto directo y por el inverso de Jerabek.

5.º Punto recíproco del ortocentro.

Ejes radicales, la recta $K H_0 G$ y sus dos isobáricas.

(*Concluirá*).

ESTUDIOS SUPERIORES EN EL ATENEO DE MADRID

LA MODERNA ORGANIZACION DE LA MATEMÁTICA

(Curso breve explicado por D. Zoel G. de Galdeano en Marzo de 1898)

CONFERENCIA SEGUNDA

(*Conclusión, véase págs. 41 á 51*)

Un valor particular x, puede dividir los valores del argumento del intérvalo (0, 1) de las tres maneras siguientes:

$$0 \leq x \leq x_1 \quad \text{y} \quad x_1 < x \leq 1 \qquad (1)$$

$$0 \leq x < x_1 \quad \text{y} \quad x_1 \leq x \leq 1 \qquad (2)$$

$$0 \leq x_1 < x_1 \quad \text{y} \quad x_1 < x \leq 1 \qquad (3)$$

que designan, el (1), á izquierda, todos los valores menores de x, llevados sobre la extensión unidad, á partir de cero, y además la longitud x_1; á la derecha, todas las longitudes inferiores á x, llevadas á partir de cero.

El símbolo (2) expresa, á la izquierda, todas las extensiones menores que x_1; á la derecha, la extensión x_1 y las extensiones superiores.

El símbolo (3) indica, á la izquierda, las extensiones inferiores á x_1; en medio, x_1; y á la derecha, las extensiones superiores á x_1.

Designa el Sr. Bois-Reymond con el nombre de *pantaquia*, una repartición de puntos tal, que en cualquier intérvalo, por pequeño que sea, hay puntos de la especie considerada, lo contrario será una distribución *apantáquica.*

La distribución dada por los puntos

$$Z = \lim_{x=\infty}\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}\right)$$

es pantáquica.

Definida Z de modo que de un número finito tan grande como se quiera de puntos, cuyo número aumente, disponiendo convenientemente de las arbitriarías, de modo que acaben por presentarse en todo intervalo, tan pequeño como se quiera, este sistema formará una *pantaquia ilimitada*, el conjunto de todos los puntos posibles formará *la pantaquia completa*; entre estas dos clases de sistemas pantáquicos, existe un número ilimitado de *pantaquias infinitas.*

Entre los sistemas *apantáquicos* existe, en primer lugar, el sistema de *puntos aislados*, por ejemplo,

$$Z = \frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_{10}}{2^{10}}$$

El sistema que sigue es el de puntos aislados, que en la proximidad de un punto determinado acaban por aproximarse indefinidamente, como los puntos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, ... que se aproximan al punto $\frac{1}{2}$, y son los *puntos de convergencia;* un ejemplo ofrecen las raíces de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$. Los puntos de convergencia de orden n estan dados por los ceros de

$$\operatorname{sen}\cfrac{1}{\operatorname{sen}\cfrac{1}{\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \operatorname{sen}\cfrac{1}{x}\end{array}}}$$

donde el signo *sen* se repite n veces.

Si se excluyen por extensiones tan pequeñas como se quiera, que contengan los puntos de orden n y luego los puntos de orden $n-1$, y así sucesivamente, de manera que la suma de todas las extensiones sea tan pequeña como se quiera, se obtendrán sistemas aislados.

Trata el Sr. Bois Reymond del concepto de enumeración y de la potencia de los conjuntos de que se ha tratado exponiendo la teoría del Sr. Cantor.

Le ocupa de las series de orden cualquiera que son enumerables, como la serie simplemente ilimitada y hace una clasificación de los sistemas pantáquicos y apantáquicos de puntos, aplicando estas consideraciones al estudio de *la función*, del *salto* de la misma, ó sea la mayor diferencia entre sus valores, para un valor de argumento, de sus *oscilaciones*, ó la mayor diferencia de sus valores en un intervalo suficientemente pequeño que rodee á un punto, sus máximos y mínimos en un intervalo, todo lo cual también se trata en la excelente obra del Sr. Dini, de la construcción numérica *de valores* de funciones hipotéticas, y de la marcha final de la función.

El Sr. Tannery en su obra, *Introduction á la théorie des fonctions d'une variable*, adopta, para definir cada número irracional la división de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera es menor que todo número de la segunda y que no existe ningún número, en la primera mayor, ni en la segunda menor que todos los demás de la misma clase. Así, por ejemplo, el número definido por la ecuación $x^2-3=0$, conduce á distinguir la clase de los números cuyos cuadrados son menores que 3 y de los números cuyos cuadrados son mayores que 3.

Dos números irracionales serán iguales, cuando todo número racional perteneciente á una de las dos clases, con respecto á uno de los dos números, pertenece á la misma clase, respecto del otro; y cuando pertenezcan á distinta clase serán desiguales; y la desigualdad $A<B$ de dos números irracionales implica la existencia de un número racional, tal, que se tenga $A<a$, $a<B$.

Además del método de la división de los números en dos clases, emplea el Sr. Tannery, para extender la teoría de los números racionales á los irracionales, la teoría de las series, definiendo los últimos como límites de éstas: pero desde luego adopta el primer procedimiento, siendo A y B números racionales ó irracionales, y a, a', b, b' números racionales tales, que $a<A<a'$, $b<B<b'$,

resulta $a+b<a'+b'$; y si no existe un número $r=a+b$, $o'=a'+b'$, verificando a, b, a', b' la primera ó la segunda desigualdad, conduce á que $r>a+b$ ó $r<a'+b'$, respectivamente. Entonces, si existe el número r satisfaciendo á estas dos condiciones, es decir, mayor que la suma de dos números racionales cualesquiera, respectivamente menores que A y B, y menor que la suma de dos números racionales cualesquiera, mayores respectivamente que A y B, r será la suma $A+B$; pero si no existe ningún número r sometido á dichas condiciones, tendremos dos clases de números racionales, la una que contiene la suma de dos números racionales menores que A y B respectivamente, y la segunda que contenga las sumas de los números racionales, respectivamente superiores á A y B, sin que en la primera ó segunda clase haya un número superior ó inferior á todos los demás de la misma, y tales que todos los de la primera sean inferiores á los de la segunda. Esto conduce á definir la suma $A+B$ de dos números irracionales y á establecer enseguida las propiedades de esta operación; y repitiendo el razonamiento se define el producto de dos números irracionales y se deducen las propiedades de la multiplicación; una simple correspondencia entre dos números inversos permite establecer la teoría de los números fraccionarios, y la ecuación $x^m=A$, conduce en el caso de no existir número racional que la satisfaga, siendo A un número racional, á las dos clases de números cuyas $m^{\text{símas}}$ potencias son respectivamente inferiores ó superiores á A.

Por otra parte, definiendo el Sr. Tannery un número irracional por una serie infinita de números racionales, de modo que la serie $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tenga por límite un número racional U, cuando á cada número racional ε corresponda un número entero positivo tal, que $[U-u_p]<\varepsilon$ para todos los valores de p iguales ó superiores á n, establece el cálculo de los números irracionales, mediante el cálculo de las series convergentes, llegando hasta la conclusión general, de que si U, V, W .... son límites de las series $u_1, u_2 \ldots$; $v_1, v_2 \ldots$; $w_1, w_2 \ldots$ la serie infinita cuyo $n^{\text{símo}}$ término es

$$\frac{f(u_n, v_n, w_n, \ldots)}{\varphi(u_n, v_n, w_n, \ldots)} \text{ tendrá por límite } \frac{f(U, V, W, \ldots)}{\varphi(U, V, W, \ldots)}.$$

Y, en fin, empleando, el procedimiento del Sr. Cantor en la teoría de los conjuntos, establece además la teoría de los productos infinitos, para exponer seguidamente la importante teoría de las funciones.

La obra laureada por la Real Academia dei Lincei, *Teoria delle Grandezze* del Sr. Bettazzi, expresa señaladamente la tendencia al predominio de los conceptos combinatorios sobre el concepto de magnitud en la teoría de los números.

Reconoce el Sr. Bettazzi en la Matemática el punto de vista principal de la comparación de sus entidades, de manera que éstas se hallarán bien definidas cuando lo esten sus relaciones; y por consiguiente las magnitudes podrán ser objeto de nuestro estudio, cuando, admitida su existencia, se definan sus relaciones recíprocas.

Conforme con Grassmann, define la *magnitud* diciendo que: sí, sin atribuir ningún significado á las palabras *igual* y *desigual*, dada una categoría de seres, pueden establecerse dos hechos, uno de los cuales se indica con decir que son iguales, y el otro con decir que no lo son, excluyéndose ambos casos, y verificándose necesariamente uno de ellos, de modo que dos de aquellas entidades, son iguales ó desiguales, llamaremos *magnitudes* á todos los entes de esta categoría.

Dadas dos magnitudes A y B de la misma categoría, se verificará necesariamente $A = B$ ó $A \lesseqgtr B$, y uno solo de estos casos. Y si $A = B$, debe ser $B = A$; si $A = B$, $B = C$ deberá ser $A = C$.

Cualquier concepto que satisfaga á estas condiciones, será un concepto de igualdad bien establecido; y de dichas condiciones resulta

$$\text{si } A = B \text{ y } B \lesseqgtr C, \text{ será } A \lesseqgtr C, \quad \text{si } A \lesseqgtr B \text{ y } B = C, \text{ será } A \lesseqgtr C$$

de manera que para dar á un ente el nombre de magnitud, no es necesario definirlo en sí, pues basta indicar cuando puede decirse que es igual ó desigual á otro.

Operación será el tránsito de cierto grupo de entes á otro, ó el enlace de ciertos números de entes bien definidos á un grupo de entes dados. Si S es una operación efectuada sobre varios objetos A, B, C, ... que conduce á un solo objeto M, se escribirá:

$$S(A, B, C \ldots) = M.$$

Las operaciones

$$S(A, B, C, \ldots L),\quad S(B, A, C \ldots L),\quad S(L, A, \ldots, B)$$

se consideran como operaciones diferentes; pero si conducen al mismo resultado, la operación S será *conmutativa*.

Si son iguales los resultados (generalmente desiguales)

$$S(A, B, C \ldots L),\ S(S(A, B, C,), \ldots L),\ S(S(A, B), S(C, D), \ldots L),$$

la operación S será *asociativa*.

Supone el Sr. Bettazzi para la operación S aplicada á una categoría de magnitudes las propiedades conmutativa y asociativa y además que:

1.º Si $B = C$, será $S(A, B) = S(A, C)$, y en virtud de la propiedad conmutativa, $S(B, A) = S(C, A)$.

2.º Si $B \lesseqgtr C$, será $S(A, B) \lesseqgtr S(A, C)$ y por consiguiente, $S(B, A) \lesseqgtr S(C, A)$.

(Concluirá.)

BIBLIOGRAFÍA

LEÇONS NOUVELLES SUR L'ANALYSE INFINITISIMAL *et ses applications géométriques* par M. Ch. *Meray* IV^{me} partie, *applications géométriques classiques*.—Gauthier-Villars, París, 1898.

Conocida es entre los matemáticos la obra de M. Méray que ha merecido universales elogios y que el nombre de su autor vaya unido al de Weierstrass y otros célebres maestros desde que se publicó su primer tomo en 1894, siendo esta obra el amplio desarrollo de otra que publicó en 1872 con el título de *Précis d' Analyse infinitésimal*.

En el *Bulletin des sciences mathématiques* se han hecho laudatorias reseñas críticas por los Sres. Tannery y Bourlet de esta obra donde tantas ideas originales y profundas encuentra el lector acerca de los conceptos fundamentales de las teorías que entran en el dominio del analisis superior, y M. Riquier hizo desarrollos afines con los puntos de vista de M. Meray en su memoria *Sur les principes de la théorie general des fonctions*.

Partidario de las ideas de Lagrange, admite el Algebra como primer fundamento del Analisis infinitesimal, por esto establece desde luego los principios generales de las operaciones basadas en la noción fundamental de número, considerando los incommensurables como puramente *ideales* ó creaciones ficticias, de igual modo que las imaginarias, ficciones cuya introducción en el analisis justifica la necesidad de descomponer los polinomios enteros en factores lineales, y llevando adelante sus miras sistemáticas da capital importancia á su desarrollo de la teoría de series enteras, pues, «cuando las funciones conocidas son representables por series, las nuevas funciones que engendran lo son también, y como las funciones analíticas forman así una cadena continua, cuyo primer anillo está constituido por polinomios enteros, observa que *también son desarrollables en potencias enteras*.

El tomo primero está destinado á los principios generales. Es un desarrallo eminentemente teórico y abstracto que llega hasta el *cálculo inverso de las derivadas,* comprendiendo la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales; contiene todas las cuestiones de teoría pura, sin citar más funciones que polinomios enteros ó fracciones racionales.

Despejado así el terreno, M. Meray destinó el 2.º tomo de su obra al *estudio monográfico de las principales funciones de una variable,* olótropas, meromorfas, radicales, implícitas en sus principales fases críticas, logarítmica, exponencial, circulares, elípticas, biperiódicas y eulerianas.

El tercer tomo tiene por objeto las *cuestiones analíticas clásicas*, tratándose en él de las integrales indefinidas, de las diferenciales racionales é irracionales, del cálculo de las integrales definidas, de las aplicaciones á las relaciones que existen relativamente á un mismo contorno cerrado entre la integral definida de una función meromorfa y su residuo integral, todo ello con el caracter eminentemente sistemático y puntos de vista generales, propios del estilo que parece exclusivo de M. Meray.

Las teorías de las ecuaciones diferenciales elementales, las ecuaciones de derivadas parciales de primer orden, las cuestiones de *máximum* y *mínimum* y las integrales múltiples reales, completan el 3.er tomo, publicado en 1897.

El 4:º tomo que termina la original obra del Sr. Meray, contiene las *aplicaciones geométricas clásicas,* separadas del resto para no romper el encadenamiento natural, tanto de éstas entre sí, como de los conceptos puramente analíticos.

Los razonamientos llamados geométricos, dice, lo son de nombre y de apariencia tan solo, pues no prevalecerían mucho, si no estuvieran reforzados por los hechos generales que el càlculo permite conocer.

Este propósito del Sr. Meray á desarrollar cada género de cuestiones con independencia, es muy conforme con las aspiraciones actuales de los matemáticos, ya analistas ya geómetras.

Los progresos de la ciencia han permitido hoy à los geómetras hacer hasta cierto punto exposiciones de la geometría con independencia de los recursos analíticos; el Sr. Meray ha hecho en su obra esta separación de los dos procedimientos y puntos de vista matemáticos.

Cierto es que hoy todas las ramas de la Matemática se compenetran prestándose mùtuo auxilio, y en su contínuo progreso debe apelarse á este concurso como base de ulteriores conquistas. Y aunque es importante ver fusionados los conceptos analíticos y geométricos para establecer la unidad en la ciencia, el hecho de llegar á separarlos revela un adelanto á la par que comunica rigor y claridad á la exposición de cada rama.

Muchos y muy acertados puntos de vista del Sr. Meray contribuyen á la sistemalización de la doctrina que perfeccionan la exposición, tales como el omitir la usual definición de la tangente para atribuirle su carácter *osculador*, el presentar la teoría de las envolventes mediante el concepto de contacto de la envolvente con la envuelta, el emplear el carácter *conjugado* relativamente al círculo ó á la esfera cuando se trata de propiedades concernientes á la perpendicularidad, lo que le permite colocar naturalmente la teoría de las trayectorias ortogonales.

El Sr. Meray ha preferido seguir constantemente los principios luminosos que dominan el conjunto, sistematizando, con unidad de plan y de idea, á la compilación incoherente que hace perderse la inteligencia en la masa abrumadora de los hechos ú objetos matemáticos, y presentar la teoría de las funciones desde nuevos y ventajosos puntos de vista.

CORSO DI CALCOLO INFINITESIMALE di *Giulio Vivanti*, professore nella R. Universitá di Messina.—1899.

El libro del Sr Vivanti es de los que introducen francamente reformas en los planes de obras, hace años excelentes para satisfacer las necesidades de su época, pero hoy incompletas ó insuficientes, por no estar modeladas según los nuevos conceptos que actualmente rigen, ni abarcar el conjunto de modernas teorías, cuyo conocimiento es indispensable obtener desde los primeros pasos dados en la enseñanza.

El Sr. Vivanti ha podido reunir en 576 páginas todo lo más esencial para que el alumno adquiera los conocimientos fundamentales de la ciencia y además pueda perfeccionarlos fácilmente en las obras de consulta, pues con su excelente plan, deja el terreno preparado y las dificultades previamente vencidas.

Adopta en la primera parte de la obra, denominada *preliminares analíticos*, los principios importados por los Sres. Cantor y Dedekind en la exposición de las teorías de los números, límites, funciones, continuidad, infinitésimos é infinitos, puestos al alcance de los principiantes, por cierta oportuna concisión que unida al rigor didactico, constituye un razonamiento sobrio favorable á la claridad.

La correspondencia unívoca de los conjuntos de números y de puntos, el concepto de par de clases A_1 y A_2 útil para obtener su elemento de separación, como límite de números ó de puntos, que el Sr. Vivanti no abandona en toda su obra, la adopción del concepto de *sucesiones* para establecer el de correspondencia *biunívoca ordenada* y para demostrar la existencia de un límite en una sucesión generalmente creciente ó decreciente, la oscilación de una función como criterio de su continuidad, cuando aquélla es menor que un valor arbitrario σ, lo que permite á su vez definir las especies de discontinuidades; todo esto es un precedente natural para la definición de los infinitésimos é infinitos, cuyos ordenes se determinan por los límites de sus relaciones con el principal, estableciéndose bajo una forma única todos los órdenes de la cantidad finita ó infinitesimal.

La segunda parte tiene por objeto las derivadas é integrales de la función de una variable. Ya desde este momento el Sr. Vivanti adopta francamente una reforma que va generalizándose en beneficio de la enseñanza y del progreso de la ciencia, esto es, la exposición simultánea del cálculo diferencial é integral y aun la anteposición de éste á aquél, justificada, entre otras razones, por ser generador de la integral el algoritmo de la suma y de la diferencial el de la razón de dos cantidades. Trata pues, el Sr. Vivanti primero de las condiciones de integrabilidad, exponiendo especialmente el criterio de Riemann, definiendo las integrales indefinidas y definidas, y después fija las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea derivable, apoyándose para esclarecer este punto bastante descuidado por muchos autores, en las profundas consideraciones que el Sr. Dini expuso en sus *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

Las derivadas é integrales de las funciones elementales, las derivadas de órdenes superiores, el Wronskiano, el teorema de Rolle, las series de Taylor y de Mac-Laurín con sus aplicaciones, los máximos y mínimos de una función, diferencias y diferenciales como partes principales de aquéllas, el cambio de variables y la integración por sustitución, y las integrales definidas impropias, cuyos criterios de existencia analiza, forman el precedente teórico para descender á las operaciones sucesivas de integrar las funciones racionales y las irracionales, sirviendo éstas de ocasión oportuno para definir las integrales elípticas é hiperelípticas, dando á conocer las formas canónicas de Legendre.

La integración de las funciones trascendentes, la fórmula de Wallis y las integrales eulerianas terminan la parte segunda.

La parte tercera trata de las derivadas é integrales de las funciones de varias variables. Comprende las funciones compuestas y homogéneas, la determinante funcional que sirve para establecer las condiciones de dependencia de n funciones, máximos y mínimos de funciones varias variables, integrales que contienen un parámetro, integrales múltiples y sus transformaciones.

La parte cuarta está destinada á las *aplicaciones geométricas*, contiene: *Curvas planas*, tangente y normal, asíntotas, puntos múltiples y cúspides, concavidad y convexidad, inflexiones, áreas, envolventes, contactos, curvatura, evolutas y evolventes.—*Curvas en el espacio.* Tangente, plano normal y osculador, longitud de un arco, primera y segunda curvatura, fórmulas de Serret —*Superficies*—plano tangente, normal, área de una superficie curva, volúmenes, envolventes, curvatura, especialmente la de Gauss.

La quinta parte tiene por objeto las *ecuaciones diferenciales*, comprendiendo las *ecuaciones diferenciales ordinarias*, las de 1er orden y 1er grado, de 1er orden y forma cualquiera, las de órdenes superiores, é integrales singulares con su interpretación Geométrica, las integrables de orden superior, aquéllas cuyo orden puede rebajarse en una unidad, las lineales homogéneas, las lineales no homogéneas y las simultáneas.—*Las ecuaciones de derivadas parciales* terminan con las generalidades relativas á las de primer orden y sigue una breve exposición del cálculo de variaciones.

Estas indicaciones hacen ver cómo la obra del Sr. Vivanti se adapta á la enseñanza con gran ventaja, por su método é introducción de los nuevos puntos de vista que hoy entran en la enseñanza clásica.

También publicó en 1894 el Sr. Vivanti su interesante obra *El concetto del infinitesimo é la sua applicazione alla matematica* en que comprende un estudio de esta rama del Análisis desde el punto de vista filosófico-histórico.

Bibliotheca mathemática.—Director *G. Enestrom* Stockolm n. 2. 1899.—Sur l'histoire de l' arithmétique arabe par, *Carra de Vaux*.—Die Mathematik bei den Juden, von *Moritz Steinschneider*.—Remarque sur l'origine de la formule $i \log i = -\frac{1}{2}\pi$, par G. Enestrom.—Zur Bibliographie der Parallelen theorie, von P. Stäckel—Recensionen—Analyses.—Questions.

CUESTIONES RESUELTAS

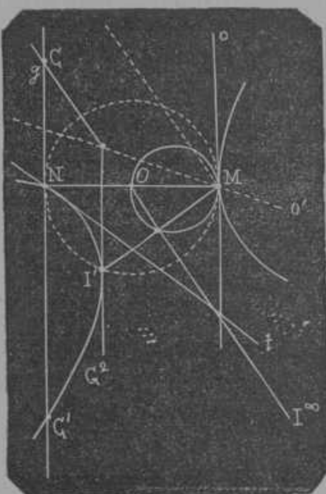
CUESTIÓN 259.

(Véase pág. 62).

Lugar de las hipérbolas equiláteras que tienen una cuerda normal común.

(*J. Neuberg*).

Solución por el Sr. Retali (V.)



Consideremos la inversión de Hirst que tiene por cónica de los puntos unidos el punto-círculo M y por polo el punto N: las hipérbolas equiláteras cuya cuerda normal es M N (en M) son las transformadas, en dicha inversión, de las rectas que pasan por el punto medio O del segmento MN. El centro de la hipérbola correspondiente á una de estas rectas g es la proyección ortogonal de M sobre g; luego el lugar buscado es el círculo descrito sobre $\overline{MO}$ como diámetro.

Otra solucion por el Sr. Retali (V.)

Tomando N por origen de las coordenadas rectangulares y MN por eje de las x, la ecuación del haz de hipérbolas equiláteras que tienen por cuerda normal MN (en M) es

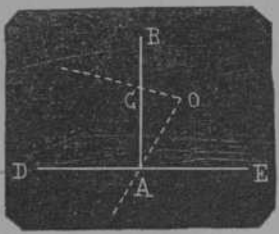
$$\lambda(x^2 - y^2) - 2xy - \lambda ax + 2ay = 0,$$

donde se ha hecho $a = \overline{MN}$ y λ es el parámetro variable; el lugar de los centros de estas hipérbolas es, pues,

$$2(x^2 + y^2) - 3ax + a^2 = 0,$$

ó sea el círculo de radio $a:4$, con su centro en el punto $\left(\frac{3a}{4}, 0\right)$.

Otra solución



Sea AB la cuerda de longitud constante y normal á todas las hipérbolas en el punto A, C su punto medio y DE su perpendicular en A. Si O es el centro de las hipérbolas, OA y OC serán diámetros conjugados respectivamente con las direcciones de las cuerdas paralelas á DE y AC, y como en la hipérbola equilátera las direcciones conjugadas forman con el eje real ángulos complementarios y dirigidos en el mismo sentido, cuando los dos sistemas de cuerdas sean perpendiculares entre sí, lo serán también los diámetros correspondientes. Luego el punto O será vértice de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa AC será la mitad de la cuerda dada, y el lugar geométrico de los centros un círculo cuyo diámetro sea esa misma mitad AC de la cuerda.

(*Anónimo*).

CUESTIÓN 266.

(Véase pág. 63).

Solución por D. Luis de Alba.

Partiendo de la 1.ª fórmula de Delambre resulta sucesivamente

$$\cos\frac{1}{2}c \,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(A + B) = \cos\frac{1}{2}(a - b)\cos\frac{1}{2}C$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} C}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}}{\dfrac{\operatorname{sen} c}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}}=\frac{\operatorname{sen} C\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}$$

ó bien

$$\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{sen} C\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen} c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\qquad(\alpha)$$

De la conocida proporción

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}\text{ resulta }\operatorname{sen} A\operatorname{sen} b=\operatorname{sen} B\operatorname{sen} a$$

ó también

$$\frac{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} b}{2}=\frac{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} a}{2}\qquad(\alpha')$$

y multiplicando las (α) y (α') tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} B\operatorname{sen} b\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}$$

Pero como

$$\frac{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}{2}=\delta\quad\text{y}\quad\frac{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}{2}=\Delta$$

resulta

$$\delta\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}=\Delta\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}$$

y análogamente demostraríamos las demás particularidades de las otras fórmulas de Delambre.

CUESTIÓN 273

(Véase pág. 96)

Sobre los lados BC, CA, AB *de un triángulo* ABC *se toman los puntos* D, E, F *que dividen estos lados en una misma razón* m *y los puntos* D', E', F' *que los dividen en otra razón* n. *Demostrar que las rectas trazadas por* D', E', F' *paralelamente á* AD, CF, BE *ó á* CF, BE, AD, *ó á* BE, AD, CF *concurren en un punto* M *ó* N *ó* P.

Solución por el Sr. Lemoine (E)

Las coordenadas baricéntricas (ABC triángulo de referencia)

de D, E, F son: $o, m, 1;\quad 1, o, m;\quad m, 1, o$

las de D', E', F': $o, n, 1;\quad 1, o, n;\quad n, 1, o$.

Los puntos en el infinito de AD, BE, CF son:

$$-(1+m), m, 1;\quad 1, -(1+m), m;\quad m, 1, -(1+m).$$

Las ecuaciones de las paralelas á AD, CF, BE trazadas por D', E', F' son:

$$\alpha(n-m)-\beta(1+m)+\gamma(1+m)n=0 \qquad (1)$$
$$-\alpha n+\beta(mn+m+1)+\gamma=0 \qquad (2)$$
$$-\alpha m+\beta mn+\gamma(mn+n+1)=0 \qquad (3)$$

Si se resta (2) de (3) se obtiene (1). Luego las tres rectas se cortan en un punto M, cuyas coordenadas son:

$$(m+1)(mn+1),\ (mn+n-m),\ m(m-n+1)$$

Claro es que las de N y P son entonces

$$m(m-n+1),\ (m+1),\ (mn+1),\ (mn+n-m);$$
$$(mn+n-m),\ m(m-n+1),\ (m+1),\ (mn+1).$$

M, N, P forman pues, un grupo isobárico de primera especie, son *permutianos*.

Si m está fijo, M describe, cuando n varía, la recta

$$-m\alpha+\beta m(m+1)+\gamma(m+1)=0,$$

la que pasa por el conjugado armónico de D respecto á BC.

CUESTIÓN 274

(Véase pág. 96)

Si sobre los tres lados de un triángulo ABC *se toman los puntos*

D, E, F *que los dividen en una misma razón, las paralelas á* AD, BE, CF *ó á* BE, CF, AD *ó á* CF, AD, BE, *trazadas por los vértices* A_1, B_1, C_1 *del primer triángulo de Brocard, pasan por un mismo punto* M, N *ó* P.

(*H. Van Aubel*).

Solución por el Sr. Lemoine (E.)

Conservando las mismas notaciones que para la solución de de la cuestión 273, siendo las coordenadas baricéntricas de los vétices A_1, B_1, C_1, del triángulo de Brocard

$$a^2,\ c^2,\ b^2;\quad c^2,\ b^2,\ a^2;\quad b^2,\ a^2,\ c^2,$$

se obtiene que las ecuaciones de las rectas trazadas por A_1, B_1, C_1 paralelamente á AD, BE, CF son

$$\alpha\,[c^2 - b^2 m] - \beta\,[b^2(1+m) + a^2] + \gamma\,[a^2 m + c^2(1+m)] = o \quad (1)$$

$$\alpha\,[b^2 m + a^2(1+m)] + \beta\,[a^2 - c^2 m] - \gamma\,[c^2(1+m) + b^2] = o \quad (2)$$

$$-\alpha\,[a^2(1+m) + c^2] + \beta\,[c^2 m + b^2(1+m)] + \gamma\,[b^2 - a^2 m] = o \quad (3)$$

sumando (2) y (3) se obtiene (1); luego las rectas se cortan en un punto M cuyas coordenadas son

$$-a^2 m + b^2(1+m) + c^2 m(1+m);\ a^2 m(1+m - b^2 m + c^2(1+m);$$
$$a^2(1+m) + b^2 m(1+m) - c^2 m$$

Los puntos M, N, P son isobáricos de primera especie ó *permutianos*.

CUESTIÓN 260

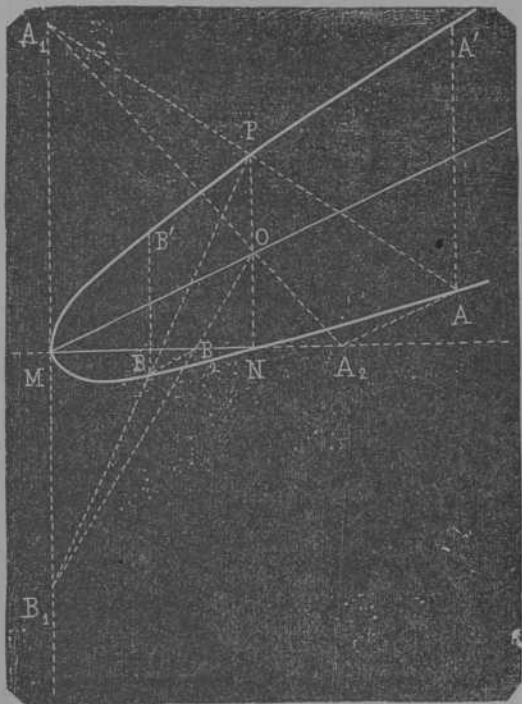
(Véase pág. 62)

Construir una parábola, conociendo una cuerda normal M N *y la dirección de los diámetros.*

(*J. Neuberg*).

Solución por el Sr. Rius y Casas (D. José)

Siendo la cuerda MN normal en M, tracemos MO en la dirección dada de los diámetros, y las perpendiculares á MN serán cuerdas conjugadas á este diámetro. Trazando la que pasa por N, y tomando en ella OP = NO, P será punto de la curva, y conoceremos de ésta cuatro puntos: M, N, P é I, punto al infinito de la dirección MO, y la tangente en M, datos suficientes para construir la curva por puntos como aplicación del teorema de Pascal. Considerando los exágonos inscritos I M M N P X, las rectas de Pascal pasarán todas por O, y determinarán sobre la tangente en M y la cuerda M N dos series de puntos A_1, B_1 ..., A_2, B_2 ..., que proyectadas respectivamente desde P é I, dan dos haces de radios de primer orden que, por las intersecciones de los pares de radios correspondientes, engendran la cónica pedida AB.... A mayor abundamiento, por cada punto A, B, ... que así se determina, puede hallarse otro A', B', ... mediante las perpendiculares A A', B B', ... á la cuerda normal, que son cuerdas conjugadas al diámetro M O.



Si la cuerda M N fuese normal en N, la segunda parábola que resuelve el problema, sería simétrica de la anterior con relación al punto medio de la cuerda dada.

Solución por el Sr. Retali (V.)

Las ∞^1 parábolas que tienen M N por cuerda normal (en M) corresponden, en la inversión considerada en la primera solución de la cuestión 259, á las tangentes del círculo G_∞^2 descrito sobre M N como diámetro. Si A es el punto de contacto de una de estas tangentes t, el punto en el infinito de la parábola correspondiente T^2 es el de la recta [N A]. Tenemos pues la construcción siguiente:

Descrito el círculo G_∞^2 sobre el segmento M N como diámetro, tracemos por el punto N, en la dirección de los diámetros, una recta [N A] que lo corte en A; la parábola buscada es la transformada de la recta t, tangente al círculo G_∞^2 en A, mediante la inversión de Hirst que tiene N por polo y el punto-círculo M por cónica de los puntos unidos.

Observación.—Las parábolas que tienen M N por cuerda normal forman un haz cuadrático, cuya ecuación es, conservando las notaciones de la segunda solución de la cuestión 259,

$$y^2 = \lambda (x - a)(2y - \lambda x)$$

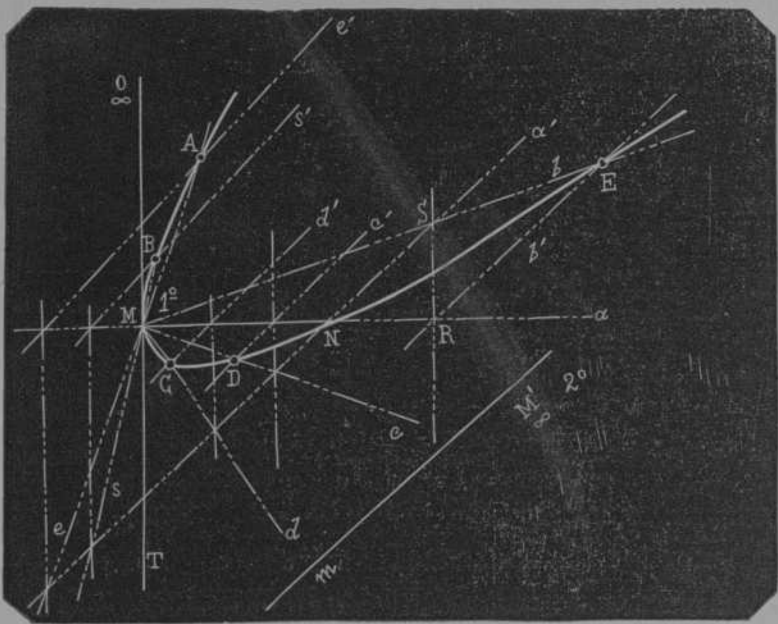
Las coordenadas del foco están dadas por

$$x = \frac{a(3\lambda^2 + 4)}{4(\lambda^2 + 1)}, \qquad y = \frac{a\lambda^2}{4(\lambda^2 + 1)}$$

ecuaciones paramétricas de una cisoide de Diocles que tiene la cúspide en M y cuya asíntota es la mediatriz del segmento $\overline{MO}$.

Solución por el Sr. Saez Muñoz (G.)

Sea MN la cuerda normal en M, y la recta m la dirección de los diámetros.



Al darnos la cuerda MN normal en M, conocemos de la parábola los puntos N y M la tangente en éste, MT; la dirección de los diámetros equivale á conocer el punto en el infinito de la parábola M'_∞ y la tangente á la parábola en este punto, que es la recta del infinito.

Si consideramos los puntos M y M'_{∞} como vértices de dos haces proyectivos de la curva, la construcción de éstos queda reducida á la de dos haces proyectivos $M . N \ldots . \wedge M'_{\infty} . N \ldots .$ perfectamente determinados, pues conocemos un rayo del 1.º $a = MN$, el correspondiente del 2.º $a' = M'_{\infty} N$, y el centro proyectivo de los dos haces O_{∞}, punto intersección de las tangentes á la parábola en los puntos M y M'_{∞}.

Luego dado un rayo del 1.er haz, determinaremos su correspondiente en el 2.º, y el punto de intersección de ambos rayos será punto de la curva.

Construcción.—Se traza un rayo cualquiera del 2.º haz, el b' hasta que encuentre á un rayo del 1.º, conocido de antemano, el a; el punto R de intersección se une con el centro proyectivo O_{∞}; el punto de intersección de RO_{∞} con el a', homólogo del a, nos da con el punto M el rayo MS ó b, y su intersección con el b' nos da el punto E de la curva.

Análogamente se han determinado los puntos A, B, C y D y se determinan cuantos se quiera.

CUESTIONES PROPUESTAS

275 Sea un triángulo ABC. Hallar la parábola circunscripta tal, que el área interceptada entre el lado BC y esta parábola sea mínima.

(*E. Lemoine*).

276 O es un punto de un círculo de centro C y radio R, y la recta m perpendicular á [OC] dista de O en $\frac{R}{4}$. Si tomamos sobre un radio arbitrario p trazado por O el punto P' simétrico, respecto al punto $(m\,p)$ de la ulterior intersección P de p con el círculo:

1.º Demostrar que el lugar de P' es una *trisectriz de Maclaurin*, cuyo punto doble se halla en O y cuyo eje es [OC].

2.º Construir la asíntota real, la tangente en P' y las interseccio- de la curva con una recta.

3.º Determinar las dos asíntotas imaginarias conjugadas y los puntos de inflexión de la curva.

(*V. Retali*).

277 Construir un cuadrilátero, conociendo los puntos simétricos, con relación á los lados, del punto de concurso de las diagonales.

(*L. de Alba*).

278 Sobre los lados de un triángulo ABC cuyos medios son D, E, F se construyen exteriormente los cuadrados BA'A"C, CB'B"A, AC'C"B, cuyos centros son I_a, I_b, I_c; y sobre DI_a, EI_b, FI_c se toma $D\alpha = \frac{1}{3} DI_a$, $E\beta = \frac{1}{3} EI_b$, $F\gamma = \frac{1}{3} FI_c$. Demostrar: 1.° que las paralelas á AI_a, CI_c, BI_b, ó á CI_c, BI_b, AI_a, ó á BI_b, AI_a, CI_c trazadas por α, β, γ concurren en un punto M ó N ó P; 2.° que las rectas que unen I_a, I_b, I_c á los medios C'B", A'C", B'A" pasan también por un mismo punto.

(*H. Van Aubel*).

279 Siendo $A_1 B_1 C_1$ el primer triángulo de Brocard del triángulo ABC; D, E, F los medios de los lados BC, CA, AB y D', E', F' puntos que dividen estos lados en una misma razón *n*, se toman sobre DA_1, EB_1, FC_1 las longitudes DA', EB', FC' iguales á $3DA_1$, $3EB_1$, $3FC_1$:

1.° las rectas trazadas por ABC paralelamente á BB', CC', AA' concurren en un punto M y las trazadas por estos puntos paralelamente á CC', AA', BB' en un punto N; 2.° las paralelas á AA', BB', CC' trazadas por D', E', F' concurren en el punto que divide NM en la razón *n*; 3.° las paralelas á B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 trazadas por D, E, F pasan por el centro de la hipérbola de Kiepert.

(*H. Van Aubel*).

247 (T. V) (*enunciado y corregido*). Si en un triángulo ABC se tiene:

$$a^2 (\text{sen } A + \cos A) + bc = 0$$

la recta que une el vértice al centro del cuadrado construído exteriormente sobre BC será perpendicular á la recta de Brocard.

(*H. Van Aubel*).

ERRATAS

En la página 32 línea 27 en vez de A B C léase $A_1\ B_1\ C_1$
En la id. 34 íd. 27 sustitúyase á la letra *p* la letra ρ
En la id. 96 id. 34 en vez de BD, CF, AD, léase BE, CF, AD.

Zaragoza: Imprenta de la Sra. Viuda de Ariño, Coso, 100