Serie 2.ª Año I Zaragoza, Julio de 1899 Núm. 3

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

Un problema de Aritmética que se encuentra en el estudio de las rodóneas

por el Dr. Gino Loria, profesor de la Universidad de Génova

Entre las curvas planas particulares se distinguen por la elegancia y variedad de formas y por el número de propiedades notables, las que, en coordenadas polares ρ, ω, se representan por una ecuación de la forma

$$(1) \qquad \rho = R \operatorname{sen} \mu \omega$$

siendo μ un número real que siempre es permitido suponerlo positivo. Son las rodóneas sobre las que Guido Grandi atrajo la atención de los científicos en 1723 [1], cuya teoría estableció ampliamente dos años más tarde [2].

Si μ es irracional, la curva es transcendente; pero si es racional ésta es algébrica, lo que se demuestra por el siguiente razonamiento, que conduce también á determinar el orden de la curva.

Hagamos $\mu = \frac{p}{q}$, siendo p y q números positivos primos entre sí, y apliquemos la transformación determinada por la identidad

$$\operatorname{sen} m\alpha = \binom{m}{1} \cos^{m-1}\alpha \operatorname{sen}\alpha - \binom{m}{3} \cos^{m-3}\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + \ldots.$$

á los dos miembros de la otra identidad

$$\operatorname{sen} p\omega = \operatorname{sen}\left(q \cdot \frac{p}{q}\omega\right),$$

se obtendrá

$$\binom{p}{1}\cos^{p-1}\omega\,\mathrm{sen}\,\omega - \binom{p}{3}\cos^{p-3}\omega\,\mathrm{sen}^3\omega + \ldots\ldots =$$

$$\binom{q}{1}\cos^{q-1}\left(\frac{p\,\omega}{q}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{p\,\omega}{q}\right) -$$

$$-\binom{q}{3}\cos^{q-3}\left(\frac{p\,\omega}{q}\right)\mathrm{sen}^3\left(\frac{p\,\omega}{q}\right) + \ldots\ldots$$

Pero se tiene

$$\cos\omega = \frac{x}{\rho},\ \mathrm{sen}\,\omega = \frac{y}{\rho},\ \rho = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{p\,\omega}{q}\right) = \frac{\rho}{R},\quad \cos\left(\frac{p\,\omega}{q}\right) = \frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho}$$

por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$R^q\left\{\binom{p}{1}x^{p-1}y - \binom{p}{3}x^{p-3}y^3 + \ldots\ldots\right\} =$$

$$= \binom{q}{1}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{q+1}{2}}\left(R^2 - \overline{x^2+y^2}\right)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$-\binom{q}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{q-1}{2}}\left(R^2 - \overline{x^2+y^2}\right)^{\frac{p+1}{2}} + \ldots$$

Si los números p y q son impares, esta ecuación es racional. y representa una curva de orden $p+q$. Pero si uno solo de ellos es impar, para conseguir que la ecuación pierda toda huella de irracionalidad, se debe elevarla al cuadrado y entonces su grado será $2(p+q)$, concluyéndose que: *La rodónea representada por la ecuación*

$$\rho = R\ \mathrm{sen}\left(\frac{p}{q}\,\omega\right)$$

es del orden $p+q$, si p y q son ambos impares y del orden $2(p+q)$ si uno de estos dos números es par y el otro impar.

Es digno de notar que el orden de la curva es siempre par y función simétrica de los números p, q, así como el que las dos curvas $\rho = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{p}{q}\,\omega\right)$ y $\rho = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{q}{p}\,\omega\right)$ sean del mismo orden.

El teorema demostrado origina la siguiente cuestión:

¿Cuántas especies distintas de rodóneas del orden dado N existen? Naturalmente N debe suponerse *par*.

Sea $f(\mathrm{N})$ el número hallado. Este es evidentemente igual á la suma de los otros dos $f_1(\mathrm{N})$ y $f_2(\mathrm{N})$; el primero es el número de los pares distintos de números impares primos entre sí, que satisfacen á la condición (2) $p + q = \mathrm{N}$

el otro es el número de los pares de números, el uno par y el otro impar, que satisfacen á la relación

$$(3) \qquad 2(p+q) = \mathrm{N}$$

Ocupémonos ante todo de la (2).

Debiendo ser p y q primos entre sí, cada uno de ellos será también primo con N; viceversa, tomado arbitrariamente un número n, primo con N y $<$ N, se podrá tomar $p = n$ y $q = \mathrm{N} - n$. Por esto el número de los pares de números que satisfará á la (2) es igual al de los números inferiores á N y primos con éste. Por lo que, adoptando un símbolo introducido por Gauss en la teoría de los números (3), se concluye

$$(4) \qquad f_1(\mathrm{N}) = \varphi(\mathrm{N})$$

Pasemos á la (3). Siendo N par, se puede escribir

$$(3') \qquad p + q = \frac{\mathrm{N}}{2}$$

Y como p y q deben ser, el uno par y el otro impar, esta ecuación es imposible si $\frac{\mathrm{N}}{2}$ es par; luego

$$f_2(\mathrm{N}) = 0 \qquad \text{si } \frac{\mathrm{N}}{2} \text{ es par.}$$

Pero, si $\frac{\mathrm{N}}{2}$ es impar, y á todo número primo con $\frac{\mathrm{N}}{2}$ y menor que él corresponde una solución de la (3'); luego

$$f_2(\mathrm{N}) = \varphi\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right) \qquad \text{si } \frac{\mathrm{N}}{2} \text{ es impar.}$$

Y puesto que $f(\mathrm{N}) = f_1(\mathrm{N}) + f_2(\mathrm{N})$, concluimos que *el número hallado se expresa por* $\varphi(\mathrm{N})$, *si* N *es un múltiplo de* 4, *ó bien se expresará por* $\varphi(\mathrm{N}) + \varphi\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)$, *si* N *es el doble de un número impar.*

EJEMPLOS:

I. $\mathrm{N} = 2$; $f(\mathrm{N}) = \varphi(2) + \varphi(1) = 1$; $\frac{p}{q} = 1$

II. $\mathrm{N} = 4$; $f(\mathrm{N}) = \varphi(4) = 2$; $\frac{p}{q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1}$

III. $\mathrm{N} = 6$; $f(\mathrm{N}) = \varphi(6) + \varphi(3) = \varphi(2)\,\varphi(3) + \varphi(3) = 4$;

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}$$

IV. $\mathrm{N} = 8$; $f(\mathrm{N}) = \varphi(8) = 4$; $\frac{p}{q} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}$

NOTAS

(1) *Florum geometricum Manipulus* (Phil. Trans. 1723).
(2) *Flores geometrici* (Florent. 1728).
(3) Gauss *Disq. arithmeticae* (1801) art. 38.

SOBRE LOS CÍRCULOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

por D. Juan J. Durán Loriga
Comandante de Artillería

Advertencia.—Por haberse hecho una omisión importante, reproducimos el siguiente párrafo:

Los ejes radicales de los círculos ε, ε', ε'', combinados dos á dos, son las tres rectas isobáricas

$$(p_a - p_b)\alpha + (p_b - p_c)\beta + (p_c - p_a)\gamma = 0$$
$$(p_b - p_c)\alpha + (p_c - p_a)\beta + (p_a - p_b)\gamma = 0$$
$$(p_c - p_a)\alpha + (p_a - p_b)\beta + (p_b - p_c)\gamma = 0$$

De esto se concluye que el centro radical de los círculos ε, ε' ε'' es el centro de gravedad G de A B C. Si uno de los círculos pasa por G, los otros dos pasan igualmente por este punto.

El punto G tiene pues, un papel importante (creo que no se ha dado todavía á conocer) en su relación con los diferentes círculos del triángulo.

La ecuación del círculo ortotómico de ε, ε', ε'' es

$$\sigma\varepsilon \frac{b^2 + c^2 - (p_a + p_b + p_c)}{3} - \varepsilon a^2 \beta\gamma = 0$$

y su radio tiene por expresión

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{3(p_a + p_b + p_c) - m^2}$$

(*Continuación*)

Para la construcción geométrica de los círculos asociados á un círculo ε, se puede observar que su centro τ_{11} (consideramos, por ejemplo el primer círculo asociado), es el centro radical de los círculos cuyos centros son A, B, C y $\sqrt{p_b} = Bt'$, $\sqrt{p_c} = Ct''$, $\sqrt{p_a} = At$ sus radios, siendo Bt', Ct'', At las tangentes trazadas desde B, C, A al círculo ε. Además, el círculo ε' es ortotómico á los círculos (A), (B), (C).

Observamos que la construcción es válida, aunque los parámetros p_a, p_b, p_c sean negativos, los círculos (A), (B), (C) son imaginarios, pero puede obtenerse su centro radical.

Se hará una construcción análoga para el segundo círculo asociado y los círculos *semi-asociados* (véanse las páginas siguientes) y de igual manera para los asociados y semi-asociados á un punto notable considerado como un círculo de radio nulo.

2. Examinemos algunos casos particulares:

1.º El círculo circunscripto á A B C (ó, en general, todo círculo concéntrico con el circunscripto) coincide con sus asociados.

2.º El círculo de Brocard y sus asociados tienen por ecuaciones

$$\frac{\sigma}{m^2} \cdot \varepsilon b^2 c^2 \alpha - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

$$\frac{\sigma}{m^2} \cdot \varepsilon a^2 c^2 \alpha - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

$$\frac{\sigma}{m^2} \cdot \varepsilon a^2 b^2 \alpha - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

Los ejes radicales de los pares $(\varepsilon', \varepsilon'')$, $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon \varepsilon'')$ son respectivamente las rectas que unen el centro de gravedad G al recíproco del punto de Lemoine, al punto directo y al punto retrógrado de Brocard.

El círculo ortotómico tiene por ecuación

$$\frac{\sigma}{3m^2} \cdot \varepsilon \left(b^2 (b^2 + c^2) + c^4\right) \alpha - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

y su radio es

$$\delta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n^4 - q^4}{m^2}}$$

3.º El primer círculo de M'Cay y sus asociados tienen por ecuaciones

$$\frac{\sigma}{3} \left[(b^2 + c^2 - a^2)\alpha + a^2(\beta + \gamma)\right] - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

$$\frac{\sigma}{3} \left[(b^2 + c^2 - a^2)\gamma + a^2(\alpha + \beta)\right] - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

$$\frac{\sigma}{3} \left[(b^2 + c^2 - a^2)\beta + a^2(\alpha + \beta)\right] - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

Los ejes radicales de $(\varepsilon', \varepsilon'')$, $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon, \varepsilon'')$ son respectivamente las medianas AG, BG, CG. Todo pasa de una manera análoga para los otros círculos de M'Cay.

Rayo del círculo ortotómico $\delta = 0$.

Tenemos, por consiguiente, nueve círculos que pasan por G.

4.º Círculos de Neuberg.

Los ejes radicales son las medianas del triángulo, el círculo ortotómico tiene por ecuación

$$\frac{\sigma}{3} \cdot \Sigma (b^2 + c^2 - 2\,a^2)\,\alpha - \Sigma\, a^2 \beta \gamma = 0$$

y su radio

$$\delta = \frac{1}{3} \sqrt{\zeta\, a^2 - (b^2 + c^2)}$$

El eje radical del círculo ortotómico y del círculo circunscripto pasa por G, es la transversal recíproca del eje de homología de A B C con el segundo triángulo de Brocard.

5.° Círculo conjugado á A B C.

Los ejes radicales son la polar trilineal del punto de Steiner y sus isobáricos; la ecuación del círculo ortotómico es

$$\frac{\sigma}{6} \cdot \Sigma (b^2 + c^2 - a^2)\,\alpha - \Sigma\, a^2 \rho \gamma = 0$$

y su radio

$$\delta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2}\, m^2}$$

el eje radical del círculo ortotómico con el círculo circunscripto es la polar trílineal del ortocentro.

6.° Los asociados del círculo de los nueve puntos de ABC tienen por eje radical la recta KG; el radio del círculo ortotómico es.

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{- m^2}$$

7.° Círculo de Longchamps.

Los ejes radicales son los mismos que hemos obtenido para el círculo conjugado. El radio del círculo ortotómico es doble del análogo del círculo conjugado.—El círculo anti-radical del círculo ortotómico con el círculo circunscripto pasa por G.—El círculo de Longchamps, el círculo ortotómico y el círculo circunscripto forman parte de un haz que tiene por eje radical la recta de Longchamps.

La ecuación del círculo ortotómico es

$$\frac{\sigma}{3}(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) + \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0$$

8.° Círculos de Tucker.

Se puede escribir la ecuación de los círculos de Tucker bajo la forma (Véase mi memoria de Saint-Etienne)

$$\frac{\sigma}{m^4}\cdot \Sigma\, b^2 c^2 (b^2 + c^2 + a^2 \mathrm{K})(1 - \mathrm{K})\alpha - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0$$

Los ejes radicales de los pares $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon', \varepsilon'')$, $(\varepsilon, \varepsilon'')$ son respectivamente las rectas que unen el centro de gravedad al punto directo, al punto recíproco y al punto retrógrado de Brocard.

El primero y segundo círculo de Lemoine y el círculo de Taylor son casos particulares de los círculos de Tucker, corresponden respectivamente á $\mathrm{K} = 0$, $\mathrm{K} = -1$, $\mathrm{K} = 1 - \frac{m^2}{4\mathrm{R}}$, luego, etc. ect.

(Concluirá.)

LA MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

(Continuación)

Cada ciencia particular de las admitidas hasta el día, dentro de la Matemática, tiene su caracter propio; pero además se interna en alguna de las otras, ó más bien, todas se compenetran, ya que los conceptos generales las rigen por igual, y que solo difieren entre sí por su fin exclusivo, ó por su modo de llegar al mismo, permaneciendo idéntico el fondo substancial sobre que se desarrollan.

En los Elementos de Euclides rige el encadenamiento que establece el método *ad absurdum* y el caracter individual de las conclusiones, así como en su continuación sobre los porismas, por Chasles, adquiere un caracter sistemático, mediante los procedimientos proyectivos, ya consigan éstos la determinación de las entidades geométricas por el empleo de la relación anarmónica ó por el de la transformación lineal, que el Algebra de las formas posee, como procedimiento propio.

Considerando frente á la geometría pura la Geometria analítica ó cartesiana, vemos desde luego, que su concepto predominante es el de las correspondencias entre las figuras geométricas y las ecuaciones, es decir, la traducción algorítmica de aquéllas, la sustitución del procedimiento directo de la geometría pura por otro más artificioso, pero en cambio más cómodo y en ocasiones más breve, menos intuitivo, pero más regular y uniforme.

Descartes sustituyó el cálculo á la construcción gráfica; y al método primitivo de las coordenadas cartesianas se unieron otros modos de representación que facilitaron el estudio analítico de la Geometría proyectiva.

En todas estas excursiones vemos, en suma, una correspondencia del elemento eminentemente subjetivo, número, con el elemento objetivo, perteneciente al espacio, ó sea el punto; y de las varias correspondencias entre ambos resultan todas las representaciones que constituyen la ciencia matemática.

Aun, en el mundo físico, hallamos medio de sustituir á la realidad un sistema ficticio de puntos, donde se encuentran masas y actúan las energías naturales, es decir, combinaciones de puntos y de números que ya entran en el dominio matemático, edificando frente á la ciencia real una ciencia ideal (1), que á través de los siglos, ha sufrido diversas transformaciones, al derrumbarse y construirse sucesivamente sobre nuevas hipótesis, necesarias para armonizar los conceptos de la inteligencia con las realidades de la Naturaleza.

Y si por una marcha ascendente buscamos el ajustar el mundo externo al de nuestros conceptos, contrastando lo real con lo ideal, por otra dirección opuesta aspiramos á dotar de realidad las combinaciones que á *priori* contruye nuestra inteligencia.

La Combinatoria, rama superior y eminentemente abstracta, satisface estas aspiraciones extremas de la Matemática, concibiendo sobre las operaciones ordinarias del cálculo otras operaciones eminentemente formales, cuya materia ha de buscar en su proceso hacia lo concreto, y sobre las cantidades, objetos creados por nuestra razón, cuyas leyes ajustamos á las del mundo de las intuiciones, ya que éstas, adheridas al mundo sensible, permanecen en región inferior á lo que pueda producir la fuerza creadora de aquella superior facultad de nuestra inteligencia.

El Algebra de la lógica simbólica realiza de diversas maneras este fin, crea sus operaciones, conforme á nuestro modo de pensar,

(1) Hoüel *Cours de Calcul infinitésimal.*

cuya forma es el juicio lógico; y dichas operaciones traducen, según un nuevo algoritmo, tanto nuestras operaciones mentales, como el lenguaje que las expresa.

Esta aplicación ó descenso de las leyes del cálculo formal conduce á varios sistemas de álgebras geométricas (1); y, en general, cada algebra especial suele interpretarse al mismo tiempo que se hace su investigación, distinguiéndose el Algebra ordinaria de todas las demás en que, por ser la teoría de la cantidad, tiene ya en ésta su interpretación propia; y entre las álgebras, pertenecientes al género no numérico, la más sencilla es el Algebra de la lógica.

El fondo á que se aplican las leyes constitutivas de las álgebras está dado por las variedades ó espacios, donde adoptan su realización concreta; estas variedades se distribuyen en diversos órdenes, según el concepto de Grassmann; y, representándose por $i, j, k, \ldots$ elementos irreducibles y por $a, b, c, \ldots$ cantidades algébricas ordinarias, los elementos de una variedad de primer orden podrán expresarse bajo la forma $a i + b j + c k + \ldots$ que indica las *extraordinarias*, según Cayley, ya que no se someten á las leyes del cálculo ordinario, debiéndose definir las combinaciones $i^2, ij, ji, \ldots$ por tablas especiales, en los diferentes casos.

Consideremos símbolos dobles tales como (x, y), que satisfacen á la ley $(x, y)(x', y') = (X, Y)$, siendo X é Y funciones dadas, por ejemplo, $X = x x' - y y'$, $Y = x y' + y x'$; se tendrá que

$$(x, y)(x', y') = (x x' - y y', x y' + y x').$$

Si m es una magnitud analítica, y se multiplica por el símbolo $(x y, \ldots)$, según la ley

$$m(x, y \ldots) = (m x, m y, \ldots)$$

y expresamos los símbolos $(x y)$, $(x' y')$ por medio de las extraordinarias i, j, resultará

$$\begin{aligned}(i x + j y)(i x' + j y') &= i(x x' - y y') + j(x y' + y x')\\ &= i^2 x x' + i j x y' + j i y x' + j^2 y y'\end{aligned}$$

Para que estas expresiones se verifiquen simultáneamente, se

(1) Clifford *Mathematical papers*, p. 397.

verificará que $i^2 = i$, $ij = j$, $ji = j$, $j^2 = -i$ y la tabla de multiplicación de los símbolos será

	i	j
i	i	j
j	j	$-i$

Estas operaciones difieren, pues, según las aplicaciones que Cayley hace á todos los sistemas geométricos en su memoria, *On multiple Algebra*; y bastará citar de entre ellas, las referentes á los sistemas de Hamilton y de Grassmann, en los que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ i = jk = -kj,\ j = ki = -ik,\ k = ij = -ji,$$

$$\varepsilon_1^2 = 0,\ \varepsilon_2^2 = 0,\ \varepsilon_3^2 = 0,\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -\varepsilon_3 \varepsilon_2 = \eta_1 \text{ etc.}$$

respectivamente. Y puede citarse, con este motivo, la exposición que hace del *Algebra doble*, en su memoria *On double Algebra*, cuyas *extraordinarias* satisfacen á las condiciones

$$x^2 = ax + by,\ xy = cx + dy,\ yx = ex + fy,\ y^2 = gx + hy$$

correspondientes á la tabla

	x	y
x	(a, b)	(c, d)
y	(e, f)	(g, h)

Lo esencial ó característico de la Geometría analítica es la traducción al lenguaje algébrico de las figuras geométricas; sustituye á los procedimientos gráficos un nuevo procedimiento más fecundo y uniforme, puesto que toma como base invariable los sistemas de coordenadas; pero dejando la primitiva sencillez en que lo consideró Descartes, al enriquecerse con el concepto del coeficiente diferencial, se internó en otra región más amplia; el cálculo infinitesimal le cedió uno de sus procedimientos, permitiéndola representar la dirección de la tangente, y expresar los accidentes de la variación de las curvas por medio de los de las funciones.

Pero si algo de común vemos entre la geometría cartesiana y el algoritmo infinitesimal, ambas ramas de la Matemática, luego se desenvuelven como sistemas distintos.

La Geometría analítica conserva su caracter artificioso, consistente en emplear elementos auxiliares que determinan los lugares geométricos; y aunque algunas veces sigue á cada entidad en sus afecciones internas, esto sólo puede realizarlo por el auxilio obtenido, que la reduce á una rama del cálculo infinitesimal que no se desvanece en su tronco, como el Algebra tampoco se identifica con la teoría de las funciones, apesar de los elementos que importa de ésta, para constituir la parte de su desenvolvimiento de caracter esencialmente cuantitativo.

Llegamos en esta escursión á la rama superior de la Matemática que las domina á todas y las envuelve con su amplísimo desarrollo, en el orden cuantitativo, y que si prescindiéramos del orden pedagógico, para seguir la generación lógica de la cantidad, atendiendo al modo de formarse por medio de sus elementos, sería el tronco de donde veríamos brotar todas las ramificaciones, respecto al *quantum*.

El Análisis infinitesimal es esta rama superior, que permite estudiar la cantidad en su constitución interna, mediante el cálculo diferencial, y en su constitución definitiva, mediante el cálculo integral, y que poseyendo los medios de toda generación cuantitativa, constituye realmente toda la ciencia de la cantidad, dispersa por necesidades pedagógicas en las ramas inferiores enumeradas. Pero sobre la cantidad, lo objetivo y externo á nuestra inteligencia, existen las leyes subjetivas ó formales, que aplica ésta á la cantidad. El orden, el número son conceptos que nos formamos con ocasión del fenomenalismo externo y lo aplicamos á la determinación de la cantidad.

Por esta razón hoy vemos que el fondo que sustenta todas las construcciones cuantitativas ó funcionales, es lo que se llama variedades, ó espacios, concepto que puede extenderse en la región de lo abstracto.

Partimos de los elementos que consideramos como fundamentales, ó de primer orden, para construir los de órdenes superiores; podemos limitar las variedades en ciertas regiones ó dominios y estudiar las funciones ó relaciones analíticas en cada uno de éstos, ya como desarrollos abstractos, ya con representaciones geométricas, ya esquematizando, con denominaciones geométricas, ciertas relaciones analíticas, que de este modo hacemos intuitivas. Estas correspondencias entre las funciones y los elementos de las variedades conducen al *Analysis situs* ó *Geometría de situación* y á que el Analisis infinitesimal realice una superior fusión de la teoría de las funciones con las geometrías de todos los órdenes, una asimilación completa de las leyes subjetivas del número con las leyes objetivas del espacio.

Un instrumento poderoso emplea el cálculo infinitesimal para realizar esta armonía, que expresa un grado inmensamente superior al de las ecuaciones algébricas; en éstas, que constituyen problemas relativos á las operaciones inversas, existe un encadenamiento entre los coeficientes y las raices que es preciso destruir por la separación de dichos elementos mediante la resolución de las ecuaciones; en el cálculo infinitesimal la ecuación diferencial es un enlace el más amplio que cabe entre las cantidades consideradas como funciones de todos los órdenes posibles.

Con el cálculo infinitesimal aun no hemos agotado el contenido del sistema que forma la ciencia matemática; en esta marcha ascendente siempre hemos visto una acción y reacción mutuas entre lo objetivo y subjetivo, entre la materia y la forma. Sobre la cantidad siempre prevalecen las leyes combinatorias.

La teoría de los grupos de transformaciones es el último grado de síntesis á que llega la Matemática, para abarcar su objeto con toda generalidad.

Z. G. de G.

ESTUDIOS SUPERIORES EN EL ATENEO DE MADRID

LA MODERNA ORGANIZACION DE LA MATEMÁTICA

(Curso breve explicado por D. Zoel G. de Galdeano en Marzo de 1898)

CONFERENCIA SEGUNDA

(*Continuación, véase págs. 41 á 51*)

Otro progreso importante en la teoría de los números, que ha transcendido á la teoría general de las funciones, es el realizado por el Sr. G, Cantor, mediante su original teoría de los conjuntos. Esta se funda en el concepto de potencia, ó *número cardinal* que es la idea general que se deduce, por medio de nuestra facultad de pensar, de un conjunto M de objetos, haciendo la doble abstracción de la naturaleza de sus elementos y de su orden.

Pero como al abstraer la naturaleza de los elementos, el conjunto queda reducido á contener sólo unidades, el número cardinal $\overline{M}$ es como una imagen intelectual, ó proyección en nuestra inteligencia del conjunto M.

Dos conjuntos son equivalentes, cuando se les puede referir mútuamente, de manera que á cada objeto del uno corresponda, con reciprocidad, un objeto del otro, siendo el criterio necesario y suficiente, para su equivalencia, la igualdad de sus números cardinales.

Pero si dos conjuntos M y N con números cardinales $a = \overline{\overline{M}}$, $b = \overline{\overline{N}}$ satisfacen á las dos condiciones:

1) *no existe ninguna parte de* M *equivalente á* N

2) *existe una parte* N_1 *de* N *tal que* N_1 *es equivalente á* M, condiciones que subsistirán para todos los conjuntos respectivamente equivalentes á M y N, dichas condiciones expresarán *una relación determinada entre los números cardinales* a y b, que excluirá la equivalencia entre M y N, y por consiguiente entre a y b, así como la misma relación entre a y b que entre b y a, excluyendo cada una de las relaciones

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

á las otras dos, sin ser evidente, en este estado de la exposición, ni preciso demostrar que *debe existir necesariamente una de estas tres relaciones*, pues más tarde, al tratar de la sucesión creciente de los números transfinitos, demuestra el Sr. Cantor que:

Si a y b son dos números cardinales cualesquiera, se tiene: ó $a = b$, ó $a < b$, ó $a > b$, teorema del que deduce (tratándose de los conjuntos transfinitos):

1.º Si el conjunto M es equivalente á una parte N_1 de N, y N equivalente á una parte M_1 de M, M_1 y N son equivalentes.

2.º Si M_1 es una parte de M, M_2 una parte de M_1 y M equivalente á M_2, los conjuntos M, M_1 y M_2 son equivalentes.

3.º Si N no es equivalente á M, ni á una parte de M, será una parte N_1 de N equivalente M.

4.º Si M y N no son equivalentes, y una parte N_1 de N es equivalente á M, no existe ninguna parte de M equivalente á N.

Acerca de las operaciones con los números cardinales bastará decir que la reunión de dos conjuntos M y N que no tienen elementos comunes es un nuevo conjunto (M, N) que será equivalente á otro conjunto (M', N'), cuando M y N sean respectivamente equivalentes á M y N; y dependiendo el número cardinal tan sólo de la suma de los números cardinales de los sumandos, se deducen inmediatamente las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

Respecto á la multiplicación, combinándose cada elemento m de M con cada elemento n de N, se obtienen nuevos elementos (m, n) cuyo conjunto es el conjunto producto $(M \cdot N) = \{m, n\}$; y sustituyendo á M y N los conjuntos que les son equivalentes $M' = \{m'\}$, $N' = \{n'\}$, siendo m y m' n y n' elementos correspondientes, se ponen los conjuntos $(M \cdot N)$ y $(M' \cdot N')$ en relación recíprocamente unívoca.

Pero además se puede construir un conjunto S con número cardinal $a \cdot b$ por medio de conjuntos con números cardinales a y b, sustituyendo, en el conjunto N, á cada elemento n un conjunto M_n equivalente á M, y reuniendo todos los elementos resultantes, de modo que el elemento m_n de M_n corresponda al elemento m de M se tendrá $S = \{m_n\}$ y los conjuntos S y $(M \cdot N)$ se podrán poner en correspondencia unívoca, si m_n y (m, n) se consideran como elementos correspondientes. Todo lo que conduce á establecer las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación.

La noción de elevación á potencia la establece el Sr. Cantor por un cubrimiento del conjunto N con los elementos del conjunto M, que podrá ser con repetición, de manera que si $N = (a, b, c, d)$ y $M = (\alpha. \beta)$ se obtendrá:

$$\begin{matrix} \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha & \beta\,\beta\,\beta\,\beta & \alpha\,\beta\,\alpha\,\beta & \alpha\,\beta\,\alpha\,\beta \ldots\ldots \\ a\,b\,c\,d, & a\,b\,c\,d, & a\,b\,c\,d, & a\,b\,c\,d, \ldots\ldots \end{matrix}$$

La totalidad de cubrimientos forma un conjunto de cubrimientos cuyos elementos se expresan por el signo $f(N)$, y el total por $(N \mid M) = \{f(N)\}$.

La serie de los números cardinales finitos satisface á las condiciones:

A) Los términos $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ son todos distintos entre sí.

B) Cada uno de ellos es mayor que los que le precenden y menor que los que le siguen.

C) No existe ningún número cardinal situado entre dos términos sucesivos ν y $\nu + 1$.

Las demostraciones de estos teoremas se fundan en las dos proposiciones:

D. *Si* M *es un conjunto tal, que no tiene potencia igual á la de sus conjuntos parciales, lo mismo se verificará para un conjunto* (M, *e*) *que tiene además el elemento e.*

E. *Si* N *es un conjunto con número cardinal finito* ν, *y* N_1 *es uno de sus conjuntos parciales, el número cardinal de* N_1 *es igual á uno de los números precedentes* $1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Estas demostraciones se hacen empleando la correspondencia unívoca; y es de notar ahora lo característico de los conjuntos de importancia en esta teoría, es decir, los conjuntos infinitos correspondientes á los números transfinitos.

La totalidad de los números cardinales finitos ν constituye el primer ejemplo de números transfinitos, denominado *conjunto alef sub-cero,* que tiene las propiedades; 1.ª *de no ser igual á ningún número finito*, y esto se ve observando que el conjunto $\left(\{\nu\}, e_0\right)$ es equivalente al conjunto $\{\nu\}$, pues entre ellos puede establecerse una correspondencia unívoca 2.ª *de ser mayor que cualquier número finito* μ, puesto que ninguna parte del conjunto $(1, 2, \ldots \mu)$ es equivalente al conjunto $\{\nu\}$ y $(1, 2, \ldots \mu)$ es una parte de $\{\nu\}$

En cuanto á los conjuntos transfinitos, el conjunto *alef sub cero* es el inferior á todos, de manera que: 1.º *Todo conjunto transfinito tiene conjuntos parciales cuyo número cardinal es* alef subcero. 2.º *Si* S *es un conjunto transfinito con número cardinal* alef sub-cero, *y* S_1 *un conjunto transfinito, parte de* S, *será* $\overline{\overline{S}}_1$= alef subcero. La fórmula

$$\textit{alef sub cero} + 1 = \textit{alef sub-cero}$$

conduce finalmente á

$$(\textit{alef sub cero})^{\nu} = \textit{alef sub-cero}$$

Resulta pues que: *Ningún conjunto finito es equivalente á uno de sus finitos parciales.* Pero:

Todo conjunto transfinito tiene conjuntos parciales equivalentes al mismo.

En los conjuntos hay que considerar además del número cardinal, el *tipo de orden*, designado por $\overline{M}$, ó la *idea que se obtiene del conjunto* M, *cuando se hace abstracción solamente de la naturaleza de los elementos dejando subsistir su orden de posición*, de modo que estos son *unidades puras* ó abstractas.

Uno de los conjuntos *simplemente ordenado*, R, es el obtenido tomando los números racionales positivos $\frac{p}{q}$ (donde p y q son primos entresí), comprendidos entre 0 y 1 ordenados según su magnitud; y también puede considerarse el conjunto R_0 en el que además de dos números $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$, para los que las sumas $p_1 + q_1$ y $p_2 + q_2$ son desiguales, ocupe lugar inferior el correspondiente á menor suma, de modo que

$$R_0 = \left(r_1, r_2, r_\nu \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots\right)$$

Entre los conjuntos ordenados, preferentemente hay que considerar los *semejantes*, de modo que, en M, los elementos m_1 y m_2 deben conservar la misma relación de lugar que n_1 y n_2 en N, obteniéndose así una imagen ó representación del uno sobre el otro; y tendrán el mismo tipo de orden cuando sean semejantes, existiendo, para un mismo número cardinal transfinito, infinidad de tipos de conjuntos simplemente ordenados, cuyo conjunto forma una *clase de tipos*, siendo la primera la correspondiente al número *alef sub-cero*.

Dado un tipo ω de un conjunto bien ordenado $(e_1, e_2 \ldots e_\nu)$ en el que $e_\nu < e_{\nu+1}$ se le puede representar por otro $(f_1, f_2, \ldots f_\nu)$ con la condición $f_\nu < f_{\nu+1}$ y de una sola manera haciendo corresponder e_ν y f_ν, pues al menor término e_1 corresponderá el menor término f_1; pero si se considera el conjunto ordenado de la forma $\{e_{\nu'}\}$ en el que ν' representa todos los número finitos positivos ó negativos, no teniendo lugar superior ni inferior, su tipo será $^*\omega + \omega$ (representando $^*\omega$ el conjunto ω invertido), y podrá representarse por el conjunto $\{f_{\nu'}\}$ de infinidad de maneras de modo que el elemento $e_{\nu'}$ corresponda á un elemento $f_{\nu'_0 + \nu'}$, siendo ν'_0 un número arbitrario.

Designemos, como anteriormente, por R el sistema de todos los números racionales comprendidos entre 0 y 1, y por η su tipo $\overline{R}$ de orden, y sea R_0 el conjunto de los números racionales en el que además del orden de magnitud de $\frac{p}{q}$ se atiende la magnitud de $p+q$ para un mismo valor de $\frac{p}{q}$, R y R_0 solo diferirán en el orden de los elementos, y, siendo el número cardinal $\overline{\overline{R}}_0$ el número transfinito *alef sub-cero* también lo será el número cardinal $\overline{\overline{R}}$ de R.

Además, no existiendo en R ningún número superior ni inferior, y existiendo entre cada dos cualesquiera de sus elementos otros elementos, lo que quiere decir que es R por *todas partes denso*, se demuestra, como lo hace el Sr. Cantor, que si un conjunto simplemente ordenado M, satisface á dichas tres condiciones, su tipo ordenador $\overline{M}$ será también igual á η, pues dichas tres condiciones permiten hacer corresponder á los elementos r_1, r_2, . . , r_ν de R elementos m_1, m_{i_2}, m_{i_3}, ... m_{i_ν} de M.

Como consecuencia de este teorema resulta que: η es el tipo ordenador del conjunto de todos los números racionales comprendidos entre los números reales cualesquiera a y b, que lo es también de todos los números algébricos en su orden natural y también de éstos, cuando esten comprendidos entre a y b.

En fin, se deducen las relaciones

$$\eta+\eta=\eta \qquad \eta\eta=\eta \qquad \text{y finalmente } \eta\cdot\nu=\eta, \quad \eta^{\nu}=\eta$$

entre los tipos de orden $\eta+\eta$, $\eta\,\eta$, etc. y η.

Basta añadir para dar una sucinta idea de esta teoría, que para el estudio del tipo $\overline{M}$ se consideran conjuntos parciales de M, pertenecientes á los tipos ω y $^*\omega$ que llama el Sr. Cantor *series de primer orden* contenidas en M, *ascendentes ó descendentes*; que dos series ascendentes son coparticipantes cuando para todo elemento a_ν de la una existen elementos a'_λ de la otra tales que $a_\nu < a'_\lambda$ ó para todo elemento a'_r existen elementos tales, que $a'_\nu < a_\mu$, y análogamente para las descendentes; que una serie ascendente y otra descendente serán co-participantes, si para todo valor de ν y μ

$a_\nu < b_\nu$ y si existe, *á lo más*, un elemento m_0 tal, que para cualquier valor de ν, sea $a_\nu < m_0 < b_\nu$.

Si existe en M, un elemento m_0 tal que para cualquier valor de ν se verifica que $a_\nu < m_0$ y para todo elemento m de M que sea $< m_0$ existe un número ν_0 de modo que siendo $\nu \overline{\overline{>}} \nu_0$ sea $a_\nu > m$, m_0 será un *elemento límite* de $\{a_\nu\}$ en M, y análogamente se dirá para $\{b_\nu\}$

De estas consideraciones resulta que: *Si una serie fundamental tiene un elemento límite en* M, *toda serie fundamental coparticipante con ella tendrá el mismo elemento límite, y si dos series fundamentales tienen el mismo límite, son coparticipantes.*

Si M y M' son dos conjuntos ordenados semejantes, *á toda serie fundamental en* M *corresponde como imagen una serie fundamental en* M', *é inversamente; á series fundamentales coparticipantes en* M *corresponden series coparticipantes en* M' *y viceversa.*

Si una serie fundamental en M *posee un elemento límite en* M, *también la serie fundamental correspondiente en* M' *posee un elemento límite en* M', *é inversamente; siendo los dos elementos imagen el uno del otro en la representación.*

A los elementos fundamentales de M *corresponden, como imágenes, elementos fundamentales de* M'.

Si un conjunto consta solo de elementos principales, se llama *conjunto condensado.*

Si para toda serie fundamental en M, *existe un elemento límite en* M, se llamará á M *conjunto cerrado.*

Un conjunto condensado y cerrado se llama *perfecto.*

Sea θ el tipo ordenador del continuo lineal: $X = \{x\}$ de todos los números reales que son $\geqq 0$ y $\leqq 1$ en orden natural.

Para caracterizarlo se observará que, por la teoría de los números racionales é irracionales, toda serie fundamental $\{x_\nu\}$ tiene en X un límite de serie coparticipante en X; será pues, θ un *conjunto perfecto*; además, conteniendo como conjunto parcial á R, cuyo tipo ordenador es η, *entre dos elementos cualesquiera* X_0 y X_1 de X, se encontrarán elementos de R.

De modo que: *Si un conjunto ordenado* M *es perfecto* y además *contiene un conjunto* S *con número cardinal* $\overline{\overline{S}}$ = alef sub-cero *que tiene la relación con* M *de que entre dos elementos* m_0 *y* m_1 *de* M *se encuentran siempre elementos de* S, *se tendrá que* $\overline{M} = 0$.

Gran resonancia tuvo esta teoría del Sr. Cantor en el mundo científico, y podremos hacer notar la influencia que ejerció entre los sabios, citando algunas de las obras ó trabajos en relación con la misma.

Desde luego se ve cuán útil resulta la representación de los conjuntos por medio de puntos, que empleó el Sr. Cantor y que adoptaron algunos matemáticos, entre ellos el Sr. C. Jordán que en su artículo *Remarques sur les intégrales définies* (publicado en el *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4.ª serie, t. VIII, 1892) se ocupa de los conjuntos, definiendo el punto de un espacio de n dimensiones por un sistema de valores $a, b, c, \ldots$ dados á las n variables independientes $x, y, z, \ldots$ y la *separación (écart)* pp' de dos puntos $p = (a, b, \ldots)$ y $p' = (a', b', \ldots)$ por la relación

$$pp' = [a' - a] + [b' - b] + \ldots$$

Además, siguiendo al Sr. Cantor, define:

1.º un *conjunto*, por una colección de puntos.

2.º *un punto límite* de un conjunto E, por todo punto π tal, que se pueda, para cualquier valor de ε, determinar en dicho conjunto un punto p diferente de π y cuya separación con π sea $< \varepsilon$

3.º *un conjunto derivado* E' de otro E el que contenga los puntos límites de éste.

4.º *un conjunto perfecto* por aquél que contiene á su derivado.

Demuestra enseguida que: *Un conjunto* E', *derivado de otro conjunto* E, *es necesariamente perfecto*, y llamando el *conjunto complementario* E_1 *de otro* E el formado por todos los puntos no pertenecientes, á éste, divide todos los puntos de un plano en tres clases:

1.º puntos *interiores* á E, es decir, los pertenecientes á E que no pertenecen á E'_1 de manera que, todo punto cuya separación con p sea $< \varepsilon$, pertenecerá á E sin pertenecer á E_1,

2.º puntos *exteriores*, que pertenecen á E_1, sin pertenecer á E',

y 3.º *puntos fronteras* que pertenecen simultáneamente á uno de los conjuntos E, E_1, y al derivado del otro.

Demuestra el teorema de Weierstrass: *Todo conjunto* (x, y) *li-*

mitado (cuyas coordenadas se hallan comprendidas entre números fijos M y *m*) *que contiene una infinidad de puntos, contiene por lo menos un punto límite.*

Esto conduce á considerar el *mínimun* Δ de las separaciones de los puntos de dos conjuntos que no tienen ningún punto común, de manera que: *Dos conjuntos limitados y perfectos* E, E', *que no tienen ningún punto común, están necesariamente separados, y si su separación es* Δ, *tendrán al menos un par de puntos cuya separación sea precisamente* Δ.

Y: *entre dos puntos cualesquiera de un conjunto de un solo sostén (seul tenant*, es decir, conjunto que no puede descomponerse en varios conjuntos perfectos separados) *puede intercalarse una cadena de puntos intermedios del mismo, de modo que la separación de cada dos consecutivos sea* $< \varepsilon$.

Además: *Un conjunto de un solo sostén se confunde con su derivado.*

Esto conduce á precisar la noción de *extensión* de los conjuntos, con objeto de establecer las condiciones para que sean *mensurables*, es decir que su *área interior se confunda con su área exterior*, ó que *la suma de los elementos fronteras sea nula.*

Basta con lo expuesto para dar una idea de las aplicaciones que hace el Sr. Jordán de la teoría del Sr. Cantor, tanto en la memoria citada, como en la última edición de su *Cours d'Analyse;* y aunque se ocupa también de los conjuntos derivados de puntos, será oportuno citar, con este motivo la excelente obra del Sr. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

Observando que los *puntos límites* de un grupo G tienen la propiedad de contener en su *entorno* (intorno) infinitos puntos del mismo, mediante la división sucesiva de un intervalo (α, β) en $2, 2^2, 2^3 \ldots$ partes iguales, uno al menos de los nuevos intervalos contendrá infinitos puntos, deduce que existirá, por lo menos un punto límite, que podrá ser ó no uno de los puntos del grupo; y así obtiene el *primer grupo derivado*, G', según la denominación de Cantor, que si contiene infinidad de puntos originará el segundo grupo derivado G'', continuando hasta el grupo de orden ν que contenga un número finito de puntos y que ya no tendrá grupo derivado, de manera que G será un grupo de orden ν, cuando los grupos $G', G'', \ldots G^{\nu}$ sean de órdenes $(\nu - 1), (\nu = 2) \ldots$ y cero respectivamente.

Así: el grupo de puntos

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5},\ \ldots\right)$$

será de primer orden, porque su grupo derivado consta de los puntos 0 y $\frac{1}{2}$ y el grupo

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5},\ \ldots\right)$$

será de segundo orden porque su primer grupo derivado es

$$\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\ldots\right)$$

y su segundo grupo derivado se reduce á 0.

Con estos fundamentos desenvuelve el Sr. Dini su notable teoría de las funciones.

El Sr. Bois-Reymond en su *Théorie general des fonctions* emplea y hace un estudio detenido de la teoría del Sr. Cantor.

Preocúpase desde luego, al analizar los conceptos de magnitud de límite de esta manera en virtud de la que, de la naturaleza de una serie de valores susceptibles de medirse ú observarse, se concluye la existencia de valores que se escapan á toda percepción y cuya existencia no puede ser demostrada, en la acepción precisa de la palabra.

Admite dos maneras distintas de apreciar las cosas con igual derecho para ser tomadas como intuición fundamental de la ciencia exacta, porque ninguna de ellas conduce á resultados absurdos, en matemáticas puras; por esto expone el doble modo de intuición de los principios fundamentales que llama *idealismo y empirismo*, es decir, el sistema que cree en la verdad de ciertas formas límites de nuestras ideas exigidas por nuestro entendimiento, pero extrañas á toda percepción y representación sensible, y el sistema que solo admite como existente ó correspondiente á la existencia lo que puede ser percibido.

La forma fundamental del concepto matemático, que domina, tanto en el mundo exterior como en la vida del alma, es la *cantidad matemática lineal*.

Las cantidades matemáticas lineales pueden referirse á las longitudes, como estas son comparables y mensurables, se las puede hacer corresponder punto por punto á la recta, *son iguales, si sus manifestaciones sensibles son iguales, en las mismas condiciones; es una mayor que otra, si su imagen sensible puede disminuir por exhaución, hasta poder coincidir con la otra; dos ó más de la misma especie reunidas dan una nueva cantidad de la misma especie, etc.*

Para tratar de la función, expone el Sr. Bois-Reymond la teoría de la variable independiente que llama *argumento*, haciéndola preceder del estudio del concepto de límite, según los dos criterios idealista y empirista á los que sustituye lo que llama criterio neutro, basado en las condiciones admisibles de ambos, y refiere dicho concepto de límite á las series de números, ó series de cantidades discontinuas, basando en éstas el método que llama de *construcciones numéricas*, pues poseyendo una especie de series de números, cuya aproximación á todo límite posible pueda probarse, la demostración especial de la existencia de los límites podrá hacerse, refiriendo las series de valores que deben poseer un límite á las series de números de la especie considerada.

Desde luego adopta la serie de las fracciones racionales, no decrecientes, con denominadores crecientes, bajo la forma

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \ldots . \frac{\alpha_p}{\alpha^p};$$

y entre éstas la más sencilla,

$$\frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{8} + \ldots .$$

Siendo el *valor particular* del argumento una longitud que parte del punto inicial al punto final, sobre los puntos de estas extensiones se han de construir los valores de las funciones.

Trata pues, el Sr. Bois-Reymond de la distribución de los puntos en la extensión del argumento y de los métodos de exposición de los números racionales, así como de los conceptos de enumeración y de la potencia de los conjuntos, debidos estos últimos al Sr. Cantor.

(Concluirá.)

BIBLIOGRAFÍA

COURS DE GEÓMÉTRIE ANALYTIQUE par *G. de Longchamps* t. I y II. Paris, librairie de *CH. Delagrave*, 1898 y 1899.

Como dice en el prefacio de la obra, el Sr. Longchamps se propone resumir y clasificar los consejos bastante complejos pero útiles á los alumnos que comienzan á resolver problemas de la Geometría Analítica.

La obra está escrita con objeto de que la parte doctrinal contenida en cada capítulo sirva al alumno para reconocer el género de cualquier problema de los que constituyen la segunda parte de dicho capítulo, y se le apliquen los preceptos correspondientes, que por ser tan variados é interesantes exigirían una reseña muy extensa para dar exacta idea al lector de una obra en la cual el Sr. Longchamps ha sintetizado el trabajo de algunos años, que seguramente será muy útil á la juventud que se prepara para los estudios matemáticos.

Reconoce la necesidad de clasificar cada enunciado para descubrir su *género* y aplicarle las ideas correspondientes al mismo, conteniendo cada capítulo de su obra una parte destinada al primer objeto y otra que contiene multitud de problemas á los que el alumno puede aplicar facilmente la parte preceptiva.

Un precepto general es el siguiente: *Dada una figura, se efectúa sobre ésta cierta construcción que depende de un elemento variable; esta construcción que pone de relieve un punto* I, *cuyo lugar geométrico* se busca.

Distingue el Sr. Longchamps las clasificaciones artificiales de la clasificación *natural* basada en la *cualidad Geométrica* del punto I ó de la recta δ que se buscan, esto es si son centros, focos, etc.; reconoce la necesidad de referir en varias ocasiones los problemas ó géneros diversos que les convienen, y distingue especialmente lo que llama *movilidad superabundante* y el *parámetro de movilidad*, haciendo ver las ventajas de emplear las curvas *unicursaleu* y las *pseudo-unicursales*.

El empleo de las *características* de Chasles le permite presentar gran número de enunciados, útiles para ciertas verificaciones.

La descomposición de la resultante, conduce á estudiar las soluciones extranjeras, la transformación del enunciado, los factores verdaderos, las soluciones singulares y las rectas isótropas como solución singular.

Los problemas elementales comprenden: la marcha normal que consiste en emplear el *parámetro de movilidad*, caso de dos parámetros, métodos generales, que comprenden: los de coordenadas polares, inversión, identificación é introducción del método analítico.

Los problemas generales comprenden: la formación de los enunciados elementales, las transformaciones y los problemas elementales, el enunciado general y los enunciados derivados y la multiplicidad de las generalizaciones.

A continuación del capítulo que trata de las *cónicas referidas á sus ejes*, expone el *problema de las tangentes*, reduciéndolo á tres *tipos* de problemas. Comprende el problema de los *umbílicos*, las tangentes inseparables y separadas, etc.

El último capítulo del tomo I trata de polos, polares, lugares y centros.

Las materias contenidas en el segundo tomo son: El problema de las normales (el polo normal), los problemas de las cuerdas, los problemas de relaciones métricas, las cónicas y la forma normal, los problemas de los focos y de los vértices, los de simple contacto y de contacto superior. Las cónicas inscriptas, circunscriptas y conjugadas. Las coordenadas tangenciales.

El tomo II termina con un capítulo dedicado á las transformaciones, puntual, tangencial y mixta, cartesianas recíprocas y semi-recíprocas y las centrales.

El simple enunciado de los capítulos expresa por sí la importancia de la obra en la que, invariablemente, á la exposición de los métodos acompañan series de problemas que forma una riquísima colección de los mismos.

Traité de nomographie *Théorie.—Applicacions practiques* por *Maurice d'Ocagne.*—París, Gauthier-Villars, 1899.

M. Maurice d' Ocagne se ha dedicado desde hace años á este género de investigaciones.

En 1891 publicó su obra: *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques,* de la que es un desarrollo de mucha más amplitud la obra actual, y también dió tres conferencias en 1894, en el conservatorio nacional de artes y oficios, que publicó con el título de *Le calcul simplifié par les procedés mécaniques et graphiques.*

El *tratado de nomografía* contiene las materias siguientes:

Ecuaciones con dos variables.—Ecuaciones con tres variables y abacos de entrecruzamiento, que comprende los abacos cartesianos y la anamórfosis.—Abacos de alineación.—Sistemas de dos ecuaciones, aplicación general al cálculo de los perfiles de terraplén y desmonte.—Ecuaciones de más de tres variables.—Teoría general y desarrollos analíticos.

El nombre solo del autor recomienda esta obra tan interesante para los ingenieros.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 113.

(Véase tomo III pág. 72).

Estudio de las curvas representadas por las ecuaciones

$$x + = 3\sqrt[3]{x-1}, \qquad x^3 + y^3 = \frac{2y}{x+y}$$

(J. M.) (*Edmunds*).

Solución por el Sr. H. Brocard.

I Para no tomar más que valores de y que representen números enteros, hagamos las sustituciones que hacen $x-1$ igual á un cubo. Tendremos así

$$\begin{array}{llllllllll} x = -\infty, & -63, & -26, & -7, & 0, & 1,2, & 9, & 28, 65, +\infty \\ y = +\infty, & 51, & 17, & 1,-3, & -1,1, & -3, & -19, & 53, -\infty \end{array}$$

Se tiene pues, una indicación de los tres puntos de intersección de la curva con Ox.

Además $\qquad y' = (x-1)^{-\frac{2}{3}} - 1,$

siendo $\qquad y' = o$, para $x = o$ ó 2.

II La discusión de la segunda curva se facilitará por el empleo de las coordenadas polares:

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}^4 \omega + \operatorname{sen} \omega \cos \omega + \cos^4 \omega}}$$

Bajo esta forma se ve que la curva admite por única asíntota la bisectriz del ángulo yox' ($\omega = 45^0$). Dicha curva pasa por el origen, que es un punto de inflexión, en el que es tangente á Ox, y encuentra

á Oy en los puntos $\rho = \pm \sqrt[3]{2}.$

El resto no ofrece dificultad.

CUESTIÓN 226.

(Véase tomo IV pág 312).

Construir un triángulo conociéndose un lado, la altura correspondiente y el radio de uno de los círculos tangentes á los tres lados.

(*J. Gillet*).

Solución por D. Juan V. Alonso.

Cuatro son — uno interior y, tres exteriores — los círculos que, dado un triángulo cualquiera, pueden trazarse con la condición de ser tangentes á los tres lados. Esos cuatro círculos nos hacen ver tres casos, tres situaciones relativas distintas entre cada círculo y cada lado del triángulo, situaciones que constituirán modos distintos de resolver el problema, aunque para unos determinados datos puedan no dar (ó mejor dicho no puedan dar) soluciones correspondientes á dichos tres casos ó *modos* de solución que son: Círculo tangente, inscripto al triángulo. Círculo tangente exterior tocando al lado considerado en un punto de su longitud y círculo tangente exterior, cuyo punto de tangencia con el lado dado esté en su prolongación.

Consideremos ahora un triángulo cualquiera M N P, cuyos lados llamaremos m, n, p; h la altura correspondiente al lado p, y r, con ó sin acentos, el radio de cada uno de los círculos que vamos á considerar:

1.º Círculo tangente interior. Su centro viene determinado por la intersección de las bisectriz del ángulo P, nos dan

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MG}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{GO}} \quad " \quad \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NG}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{GO}}$$

Pero $\overline{\mathrm{MG}} + \overline{\mathrm{NG}} = \overline{\mathrm{MN}} = p \quad " \quad \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{GO}} = \frac{h-r}{r}$

Deducimos por tanto $\quad \frac{n+m}{p} = \frac{h-r}{r}$

2.º Círculo tangente exterior, cuyo punto de tangencia con el lado MN está dentro de su longitud. El centro O' está sobre la bisectriz del ángulo interior en P y las de los exteriores en M y N.

Los triángulos parciales de antes, MPG y NPG nos darán ahora

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MG}} = \frac{\mathrm{O'P}}{\mathrm{O'G}} \quad " \quad \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NG}} = \frac{\mathrm{O'P}}{\mathrm{O'G}}$$

y tendremos análogamente que antes $\quad \frac{m+n}{p} = \frac{h+r}{r}$

3.º Círculos tangentes á los lados que tocan al MN en un punto de su prolongación á la derecha ó la izquierda. Ambos tienen su centro sobre la bisectriz del ángulo exterior en P. Consideremos por ejemplo el de la derecha con centro en O''.

En los triángulos MPS, NPS se tiene

$$\frac{\mathrm{O''P}}{\mathrm{O''S}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MS}} \qquad \frac{\mathrm{O''P}}{\mathrm{O''S}} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NS}}$$

Y observando también que $\quad \frac{\mathrm{O''P}}{\mathrm{O''S}} = \frac{h-r}{r}$

tendremos $\quad \frac{n-m}{p} = \frac{h-r}{r}$

Si hubiéramos considerado el círculo de la izquierda, habríamos obtenido la misma fórmula, cambiado de signo uno de sus miembros, es decir $\quad \frac{n-m}{p} = \frac{h-r}{r}$

***

Las fórmulas que acabamos de obtener indican claramente el camino que debe seguirse en la resolución gráfica ó numérica del problema. Conocemos en efecto, en dos casos la suma y en el tercero la diferencia de los lados m, n, lo cual nos da para cada uno de los casos, un lugar geométrico (elipse ó hipérbola) en el que debe encontrarse el vértice desconocido.

Y como por otra parte, tenemos la ordenada de P sobre MN, ó sea la altura h, dato del enunciado, nos queda el problema reducido á determinar la intersección de una elipse ó una hipérbola con una recta paralela á su eje focal.

Antes de seguir adelante, debemos hacer notar la incompatibilidad de la existencia de soluciones de los casos primero y tercero para un mismo sistema de datos. Es en efecto fácil deducirlo de las condiciones generales del triángulo $p < m + n$, $p > n - m$, como también de la consideración de la elipse ó hipérbola correspondiente. Será pues condición necesaria (no suficiente) para el primer modo de solución que $2r < h$ y para la del tercero $2p > h$.

La fórmula del segundo caso no nos suministra ninguna indicación de posibilidad ó imposibilidad: la elipse correspondiente á dicho caso existe siempre.

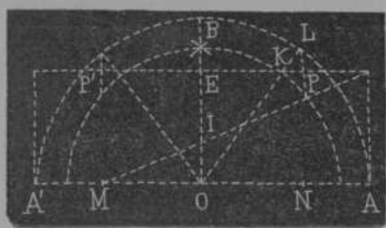
Pasemos ya á las construcciones gráficas para cada *modo* de solución.

* *
*

Primera solución: Que el círculo tangente sea interior al triángulo

Sobre la perpendicular en el punto medio á MN tomamos $OI = r$, $OE = h$. Uniendo M con I y prolongando y trazando por E la paralela á MN, tendremos en EA_1 la magnitud del semieje mayor, cuya expresión es

$$\frac{1}{2}\frac{p(h-r)}{r}.$$



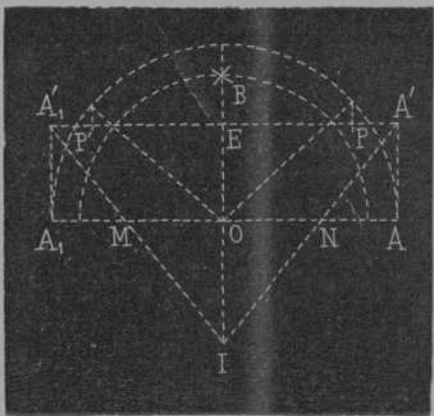
En seguida determinamos los vértices A y B de la elipse, y ya podemos hallar su intersección con la recta EA_1 por cualquier procedimiento.

En la figura se ha hecho trazando las circunferencias cuyos radios miden los semiejes a y b; y luego el radio OKL, cuya intersección con la segunda corresponde á la ordenada h y que corta á la primera determinando la abscisa del punto P.

La recta $E A_1$ corta á la elipse en dos puntos que nos dan valores cambiados para m y n. Si tomásemos la ordenada $h = OE$ en sentido opuesto, tendríamos otras dos posiciones para P, pero los mismos valores para m y n, resultando así que aun cuando aparecen cuatro puntos P como soluciones del problema, son á lo sumo dos los triángulos que podemos considerar como resultados distintos; es decir, dos admitiendo que la igualdad exige la posibilidad de la superposición por un movimiento en el plano, y uno si consideramos suficiente para la igualdad que puedan superponerse por un movimiento cualquiera (primero en su plano y luego de rebatimiento).

* * *

Segunda solución: Círculo tangente exterior al triángulo, tocando á M N dentro de su longitud.



El lugar geométrico correspondiente á este caso será también una elipse cuyo eje mayor es

$$2a = \frac{(h+r)p}{r}.$$

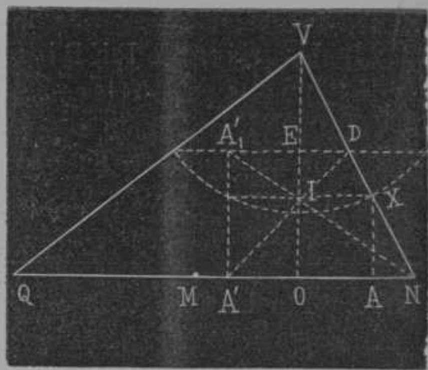
Para la construcción gráfica levantaremos también la perpendicular á M N en su punto medio tomando en distinto sentido $OE = h$, $OI = r$. Trazaremos por E una paralela á MN, y uniendo I con N, tendremos en ella EA_1 igual al semieje mayor. Determinaremos pues los vértices A y B de la elipse, y ya con ellos, obtenemos, del mismo modo que antes, el punto P.

En cuanto al número de soluciones que dá esta forma de resolución, las consideraciones son las mismas que en el caso anterior y, podemos ya adelantarlo, las mismas también que en el siguiente.

Había aquí ocasión de completar las condiciones de posibilidad de las soluciones primera y segunda. Aunque no hay dificultad para ello, no es necesario hacerlo. La aplicación del procedimiento dado para determinar la elipse nos dirá sin gran pérdida de tiempo cuando hay ó no intersección con la paralela á MN, en otros términos, cuando b es mayor ó menor que h.

* * *

Tercera solución: El círculo tangente toca á M N en su prolongación. El punto P se hallará sobre una hipérbola cuyos focos son M, N y cuyo eje transverso es $\frac{(h-r)\,p}{r}$



ó bien $\frac{(r-h)\,p}{r}$,

pues sabemos que h puede ser mayor ó menor que r.

Esta magnitud del semieje real se obtiene como en las elipses de los casos anteriores, con el auxilio de la recta N I.

Y ahora, conocida la hipérbola por sus focos y sus vértices, nos resta determinar donde cortará á la recta $A_1\, A'_1$.

Para ello nos fundamos en la existencia de las directrices de la hipérbola. Sabemos en efecto que, siendo D la intersección de $A_1\, A'_1$ con una de las directrices, únicamente necesitamos buscar sobre $A_1\, A'_1$ los puntos cuyas distancias á D y al foco correspondiente N estén en la relación de la excentricidad con el eje transverso $\left(\frac{c}{a}\right)$.

El punto D lo obtenemos facilmente uniendo A_1 con I y prolongando, porque se tendrá

$$\frac{\mathrm{E\,D}}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{ó sea} \quad \mathrm{E\,D} = \frac{a^2}{c},$$

valor de la abscisa de la directriz.

(*Concluirá*).

CUESTIONES PROPUESTAS

270 Siendo ABCD un cuadrilátero circunscripto á un círculo de radio r, los lados A D y B C se cortan en E, los lados AB y CD en F.

Sean a, b, c, d los segmentos determinados por los puntos de contacto.

Calcular en función de a, b, c, d las longitudes EC, ED, FA, FD y la recta que une los medios de las diagonales AC, BD.

(*J. Neuberg*).

271 Un triángulo RKP inscrito en un círculo C^2 tiene dos vértices R y K fijos, el lugar de los pies P_1 y P_2 de las bisectrices KP_1 y KP_2 del ángulo RKP y de su suplemento es una estrofoide C^3 tangente en R y con el nodo en K: construir la asíntota, las tangentes en el nodo y en los puntos P_1, P_2. Hallar el lugar del punto común á estas dos tangentes en P_1 y P_2.

(*V. Retali.*)

272 Por los medios L, M, N de los lados de un triángulo ABC se trazan perpendiculares á estos lados; tómense sobre ellas en magnitud y en signo las longitudes $LA' = MB' = NC' = \lambda$; debiendo ser positivas LA', MB', NC', si A', B' C' estan al mismo lado de BC, de CA, de AB, respectivamente que A, B, C.

Esto sentado — 1.º Demostrar que A' B' C' estan en línea recta para los valores $\frac{R+d}{2}$ y $\frac{R-d}{2}$ de λ.

2.º Demostrar que el área del triángulo A' B' C' tiene un valor mínimo para $\lambda = \frac{R}{2}$, y calcular los lados de este triángulo y su área.

R es el radio del círculo circunscripto, d la distancia de los centros del círculo circunscripto y del circulo inscripto en el triángulo ABC. Estudiar las mismas cuestiones suponiendo que dos de las longitudes LA', L'B', LC' tienen cierto signo y la otra el signo contrario.

El centro de gravedad de A'B'C' describe una recta.

(*E. Lemoine.*)

273 Sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC se toman los puntos D, E, F que dividen estos lados en una misma razón m y los puntos D', E', F' que los dividen en otra razón n. Demostrar que las rectas trazadas por D', E' F' paralelamente á AD, CF, BE ó á CF, BE, AD, ó á BE, AD, CF concurren en un punto M, ó N ó P.

(*H. Van Aubel.*)

274 Si sobre los tres lados de un triángulo ABC se toman los puntos D, E, F que los dividen en una misma razón, las paralelas á AD, BE, CF ó á BD, CF, AD ó á CF, AD BE, trazadas por los vértices A_1, B_1, C_1 del primer triángulo de Brocard pasan por un mismo punto M, ó N, ó P.

(*H. Van Aubel*).

Zaragoza: Imprenta de la Sra. Viuda de Ariño, Coso, 100