

ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA AGRICULTURA, INDUSTRIA E COMERCIO

INSTITUTO GEOGRAFICO E GEOLOGICO

BOLETIM N.º 30

I

COMPENSAÇÃO DOS ERROS NOS TRABALHOS
DE TRIANGULAÇÃO

II

NIVELAMENTO DE PRECISÃO



I. C. H.

SÃO PAULO — BRASIL
1 9 4 3

ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA AGRICULTURA, INDUSTRIA E COMERCIO

INSTITUTO GEOGRAFICO E GEOLOGICO

BOLETIM N.º 30

I

COMPENSAÇÃO DOS ERROS NOS TRABALHOS
DE TRIANGULAÇÃO

II

NIVELAMENTO DE PRECISÃO



SÃO PAULO — BRASIL

1 9 4 3

OFERTA ESPECIAL
(GRATUITA)

BOLETINS PUBLICADOS PELA EXTINTA COMISSÃO GEOGRAFICA
E GEOLOGICA DO ESTADO DE SÃO PAULO, HOJE INSTITUTO
GEOGRAFICO E GEOLOGICO

- N.º 1 — Retrospecto historico. 1889. (esgotado).
- N.º 2 — Reconhecimento geológico do vale do rio Paranapanema. 1889. (esgotado).
- N.º 3 — Dados climatológicos dos anos de 1887 e 1888. 1889. (esgotado).
- N.º 4 — Considerações geográficas e economicas sobre o vale do rio Paranapanema. 1890.
- N.º 5 — Contribuições para a botanica paulista. Região Campestre. 1890.
- N.º 6 — Dados climatologicos do ano de 1889. 1890.
- N.º 7 — Contribuições mineralogicas e petrográficas, 1890.
- N.º 8 — Dados climatologicos do ano de 1890. 1891.
- N.º 9 — Os sambaquís de S. Paulo. 1893.
- N.º 10 — Ensaio para uma sinonimia dos nomes populares das plantas indigenas do Estado de S. Paulo. 1895.
- N.º 11 — Ensaio para uma distribuição dos vegetais nos diversos grupos floristicos no Estado de S. Paulo. 1898.
- N.º 12 — Flóra paulista. I. Familia Compositae. 1897.
- N.º 13 — Flóra paulista. II. Familias Solonaceas e Scrophulariaceae. 1897.
- N.º 14 — Flóra Paulista. III. Familias Campanulaceas, Concurbitaceas e Calyceraceae. 1897.
- N.º 15 — Flóra paulista. IV. Familia Myrsinaceae. 1905.
- N.º 16 — Ensaio para uma sinonímia dos nomes populares das plantas indigenas do Estado de São Paulo. 1906.
- N.º 17 — Dados climatologicos do ano de 1903. 1906.
- N.º 18 — Dados climatologicos. Verão 1905-1906. 1906.
- N.º 19 — Dados climatologicos. Outono 1906. 1906.
- N.º 20 — Dados climatologicos. Inverno 1906. 1906.
- N.º 21 — Dados climatologicos. Primavera 1906. 1906.
- N.º 22 — Petroleum geology of the State of São Paulo. 1930.
- N.º 23 — Jazida de magnetita do morro do Serrote. 1939. (*)
- N.º 24 — Coletânea de analyses quimicas executadas no periodo de 1889 a 1935 na extinta Comissão Geografica e Geologica. 1939.
- N.º 25 — I. As ocorrencias de minérios de ferro e pirita no Estado de S. Paulo. II. Gondito no Estado de S. Paulo. 1939.
- N.º 26 — Ouro no Estado de S. Paulo. 1939.
- N.º 27 — Os minérios não metalicos do Estado de São Paulo. 1940.
- N.º 28 — Coordenadas geograficas e geodesicas. 1940.
- N.º 29 — Determinação do meridiano por uma estrela em elongação, com o uso de tabelas para as latitudes de 20° a 25°. 1942.

(*) A partir do boletim 23, publicações do Instituto Geográfico e Geológico.

SECRETARIA DA AGRICULTURA, INDUSTRIA E COMERCIO

Secretário: Dr. Paulo de Lima Corrêa
Diretor Geral: Dr. José de Paiva Castro

INSTITUTO GEOGRAFICO E GEOLOGICO

Diretor: Eng.º Valdemar Lefèvre

SERVIÇOS TÉCNICOS

Serviço de Geodesia:

Chefe: Eng.º Gastão C. Bierrenbach Lima
Assistente-Chefe Eng.º Ludovico Taliberti
Assistentes: Eng.ºs. Adhemar Colucci e
Zilda Sampaio Perroni
Assistentes-Auxiliares: Eng.ºs. José de Oliveira Quintão e
José de Almeida Castro
1.º Calculista: Jorge de Oliveira Fernandes

Serviço de Topografia:

Chefe: Eng.º Aristides Bueno
Assistente-Chefe: Eng.º Eduardo Bernardes de Oliveira
Assistentes: Eng.ºs. Francisco de Paula Camargo e
Juvenal Felicissimo
Assistentes-Auxiliares: Eng.ºs. Elon Rodrigues Alves,
Trajano Pereira da Silva e
Waldemar Franco de Godoi Bueno

Serviço de Hidrografia:

Pelo Chefe: Eng.º Nestor Aratangy
Assistente-Auxiliar: Eng.º João Carlos Strelitz
2.º Calculista: Luiz Prestes Barra
3.ºs. Calculistas: Eponina Pereira da Silva e
Walter Camargo Penteado
4.º Calculista: Mario de Carvalho Gatti

Serviço de Geologia Geral:

Chefe: Eng.º Plinio de Lima
Assistente-Auxiliar: Eng.º Augusto Durante

Serviço de Geologia Econômica:

Chefe: Eng.º Theodoro Knecht
Assistente-Chefe: Eng.º Jesuino Felicissimo Junior
Oficial do Registro de Minas: Dr. Pedro Bueno de Camargo Silveira

SERVIÇOS TÉCNICOS AUXILIARES

Gabinete de Desenho:

Desenhista de 1.ª Classe: Otto Bendix
Desenhistas de 2.ª classe: Artur Besser e
Hermogenes Barbuy
Desenhistas-Auxiliares: Aurydes Cesar Marques,
Orlando Bellani e
Rogerio de Freitas Campos

Gabinete de Fototécnica:

Fototécnico: Orlando Fabris
Auxiliar de Fototécnico: Joaquim Corrêa Lara

Laboratório de Química:

Assistente-Chefe: Eng.º Benedicto Alves Ferreira
Assistente: Químico Antonio Furia
Assistentes-Auxiliares: Químicos Antonio Marques Soares e
Fernando Galha

SECÇÕES ADMINISTRATIVAS

Secretário: Dr. Cícero de Freitas.

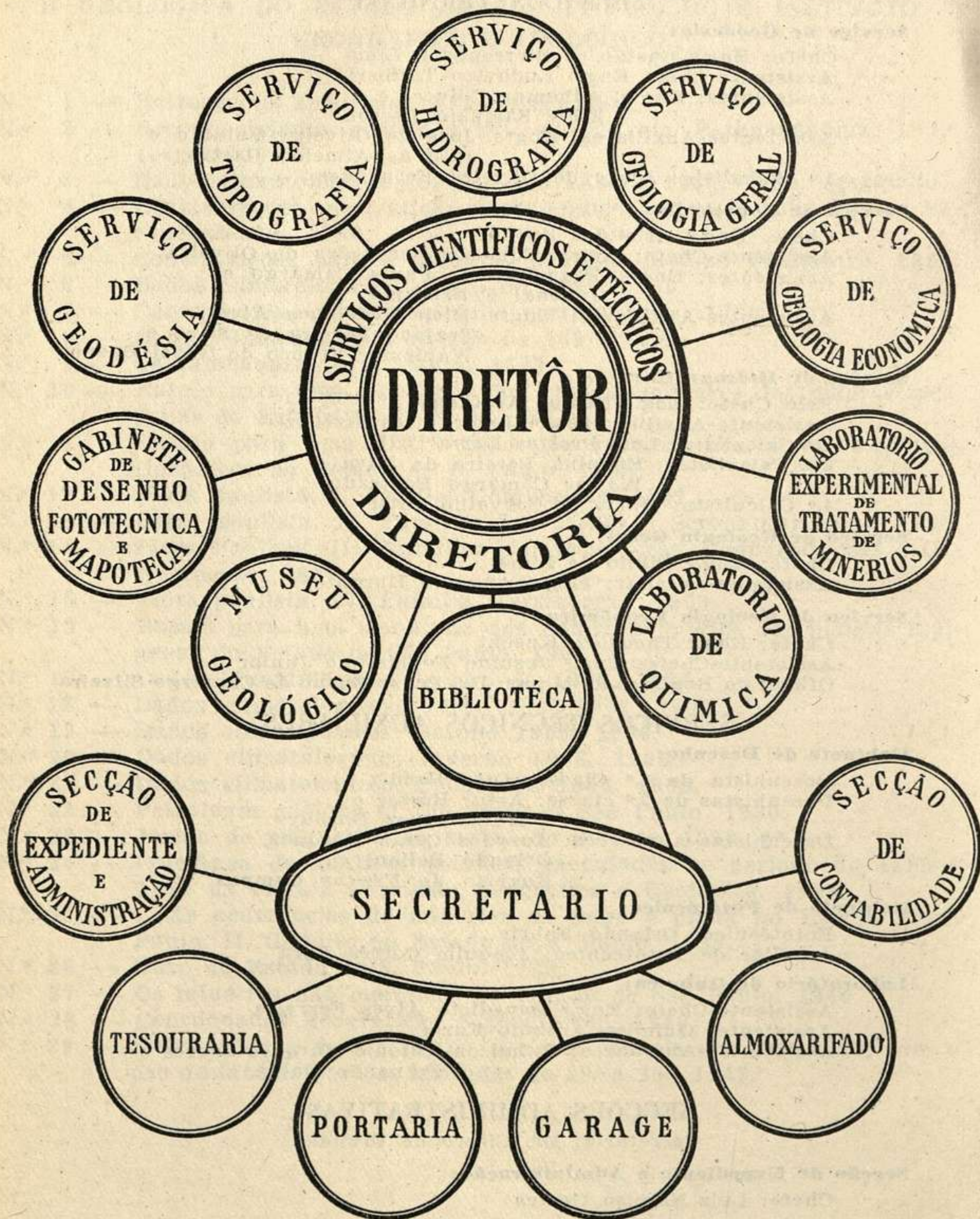
Secção de Expediente e Administração:

Chefe: Luiz Narciso Gomes

Secção de Contabilidade:

Chefe: Francisco de Assis Franco de Abreu

Organização
do
INSTITUTO GEOGRAFICO E GEOLOGICO
DECRETO Nº 9871 DE 28-12-1938

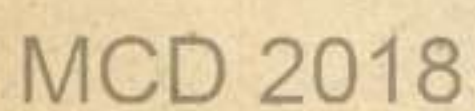


I

COMPENSAÇÃO DOS ERROS NOS TRABALHOS
DE TRIANGULAÇÃO

POR

G. C. BIERRENBACH LIMA



INTRODUÇÃO

Do aproveitamento do erro medio quadrático, obtido pela determinação dos valores mais prováveis das grandezas, como elemento distributivo das discrepâncias surgiram-nos as idéias apresentadas neste trabalho.

Elas não sacrificam a teoria, pois que se apoiam, em parte, na propria teoria dos Minimos Quadros, essa nossa afirmativa foi comprovada em trabalhos por nós realizados.

Temos a certeza que o assunto vai interessar aqueles que se dedicam aos trabalhos nos quais a compensação das pequenas discrepâncias oriundas de erros accidentais é uma necessidade.

G. C. BIERRENBACH DE LIMA

INTRODUÇÃO

Do ponto de vista da teoria da distribuição, o estudo da determinação dos valores mais prováveis das grandezas, como elemento distintivo das distribuições, surge naturalmente as ideias apresentadas nos trabalhos de

Elas não se referem a teoria, pois que se limitam, em parte, na própria teoria dos números. Quanto a essa nossa tentativa foi considerada em traços por nós realizados.

Temos a certeza que o assunto é interessante, aqueles que se dedicam aos trabalhos nos quais a compensação das pequenas distorções oriundas de erros acidentais é uma necessidade.

C. C. BURRICK DE LIMA

PRECISÃO DAS MEDIDAS

e

Correção dos erros nos trabalhos de triangulações.

A apreciação das grandezas físicas, como todos sabem resulta do conhecimento dos valores mais prováveis das referidas grandezas.

Esses valores são obtidos da média aritmética das observações isoladas, naturalmente, executadas com os mesmos cuidados, debaixo das mesmas condições de tempo e local, empregando-se os mesmos métodos e instrumentos.

Sendo $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$ as observações isoladas de uma grandeza cujo valor absoluto é L , a média aritmética é obtida pela expressão:

$$M = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n}$$

sendo n número de repetições que se executa a mesma observação.

Da comparação das observações isoladas com o valor da média, que é o mais provável, resulta o conhecimento dos residúos, termo este empregado para designar as pequenas discrepâncias inevitáveis, que escapam à habilidade do observador, nos trabalhos geodésicos, de preferência, oriúndas de diversas causas tais como imperfeição do aparelho visual do observador, variações bruscas de temperatura forçando a torção nos suportes dos instrumentos, variações de pressão das correntes aéreas atuando sobre os aparelhos no momento em que são executadas as observações.

Estas discrepâncias são geralmente denominadas erros acidentais, aquí representadas por $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$, de modo que $v_1 = M - l_1$; $v_2 = M - l_2$; $\dots v_n = M - l_n$.

Desta comparação necessariamente resultarão para os residúos tanto sinais positivos como negativos, visto os valores $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$ caírem no intorno do valor mais provável, que é a média aritmética dos valores individuais da grandeza em estudo.

Sendo-nos impossível a adição de valores afetados com sinais de-

signais que fatalmente se reduzirão a zero, somos forçados à empregar o artifício de Gauss, isto é, elevá-los ao quadrado forçando, por esse modo, ao desaparecimento dos negativos, teremos então:

$$v_1^2 = (M - l_1)^2; v_2^2 = (M - l_2)^2; \dots v_n^2 = (M - l_n)^2 \text{ cuja soma será } [v v] = (M - l_1)^2 + (M - l_2)^2 + (M - l_3)^2 + \dots + (M - l_n)^2$$

Diferenciando-se com relação a M se obtém,

$$\frac{d [v v]}{d M} = 2 (M - l_1) + 2 (M - l_2) + 2 (M - l_3) + \dots + 2 (M - l_n),$$

e para que a condição de ser esta soma um mínimo exista, teremos que fazê-la igual a zero, isto é:

$$(M - l_1) + (M - l_2) + (M - l_3) + \dots + (M - l_n) = 0$$

$$n M - l_1 - l_2 - l_3 - \dots - l_n = 0$$

$$M = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n}$$

Fica assim demonstrado que a média aritmética dá, de fato, o valor mais provável porque a soma dos resíduos diferenciais é zero.

Entretanto sendo a média aritmética o valor mais provável, entre ele e o valor absoluto subsiste sempre uma diferença; para esta, naturalmente, voltamos a nossa atenção.

Denominemos $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ as correções que deveríamos aplicar aos valores individuais $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$, para torná-los iguais à L, valor real da grandeza em estudo; isto é $l_1 + w_1 = L; l_3 + w_3 = L; \dots l_n + w_n = L$.

Do mesmo modo que com os resíduos, estas correções serão tanto positivas como negativas, por isso, designando-se com μ o erro que se cometeria se dividissemos igualmente a soma das correções pelas observações individuais, operação esta que, naturalmente, exige o elevamento ao quadrado das correções, com o intuito de fazer desaparecer o sinal negativo que as afeta, teremos:

$$n \mu^2 = [w w]$$

$$e \mu^2 = \frac{[w w]}{n}$$

$$\text{de onde } \mu^2 = \sqrt{\frac{[w w]}{n}}$$

Porem, como as correções $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ não podem ser conhecidas porque desconhecemos o valor absoluto L da grandeza, resta-nos indagar qual seja o erro da média aritmética.

Denominaremos m a incerteza entre o valor absoluto L e o mais provavel, apresentado pela média aritmética dos valores individuais, isto é:

$$\pm m = L - M.$$

Já vimos que $L = l_1 + w_1; L = l_2 + w_2; L = l_3 + w_3; L = l_n + w_n$.

Somando-se estes valores e dividindo-se por n , tem-se:

$$L = \frac{[l]}{n} + \frac{[w]}{n} = M + \frac{[w]}{n}, \text{ portanto,}$$

$$m = \frac{[w]}{n} = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n}{n};$$

elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$m^2 = \frac{[ww]}{n^2} + \frac{2 (w_1 w_2 + w_1 w_3 + \dots + w_{n-1} w_n)}{n^2},$$

sendo evidente que o segundo termo do segundo membro anula-se, porque nos produtos somados tanto aparecem quantidades positivas como negativas, resta-nos:

$$m^2 = \frac{[ww]}{n^2},$$

porem, já vimos que $[ww] = n \mu^2$

$$\therefore m^2 = \frac{n \mu^2}{n^2} = \frac{\mu^2}{n}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{n}} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

O erro m é inversamente proporcional a raiz quadrada de n (número de observações realizadas).

Assim como média aritmética M se distancia do valor absoluto L da grandeza m , também os resíduos v e as correções w omonimas devem se distanciar de m , substituindo as relações.

$$w_1 = v_1 + m; w_2 = v_2 + m; w_3 = v_3 + m; \dots$$

de onde:

$$[ww] = [vv] + 2m[v] + nm^2.$$

Sabemos que $[v] = 0$, por isso $2m[v] = 0$,
e como $[ww] = n \mu^2$ e $nm^2 = \mu^2$
temos substituindo estes valores:

$$n \mu^2 = [vv] + \mu^2$$

$$\mu^2 (n-1) = [vv]$$

$$\mu^2 = \frac{[vv]}{n-1} \therefore \mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

Substituindo na expressão $m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}$ resulta, enfim,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

Esta expressão tem um significativo importantissimo na apreciação do valor da média aritmética dos valores individuais das observações sobre grandezas físicas, ela define os limites extremos dentro do qual devemos considerar o valor absoluto; daí se concluindo que quanto menor fôr o valor de m tanto mais proximo estará o valor mais provavel do valor absoluto.

Tambem, que uma media aritmética jamais deverá ser apresentada sem o erro medio, pois que sem este aquela nada significará.

Qualquer media aritmética sempre deverá ser representada pela expressão:

$$M \pm m$$
$$\text{sendo } m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n (n-1)}}$$

$[v v]$ representando a soma dos quadrados dos residúos resultantes da comparação dos valores individuais e os da média.

n indicando o número de repetições feitas na apreciação da grandeza em estudo.

A seguir mostraremos a importancia da expressão:

$$m^2 = \frac{[v v]}{n (n-1)}.$$

AJUSTAMENTO DOS ANGULOS NOS TRABALHOS DE TRIANGULAÇÃO.

A ocupação de um ponto geodésico, pelo teodolito, é uma operação que requer certos cuidados, por parte do operador; são eles os seguintes:

- (1) ter o teodolito perfeitamente retificado quanto a niveis e linha de colimação;
- (2) ter o zenite instrumental determinado, com antecedência;

- (3) instalar o teodolito sobre o tripé estando este bem firme sobre o terreno;
- (4) trabalhar de preferência nas horas em que não haja reverberação, isto é, pela manhã até as 10 horas e a tarde depois das 15 horas;
- (5) escolher de preferência o sinal melhor iluminado para ponto de partida, dos giros de horizonte;
- (6) executar os giros de horizontes obedecendo sempre ao mesmo programa;

O programa mencionado neste último item consta do seguinte:

1.^a Parte

- 1.^o giro — luneta direta, sentido direto,
- 2.^o " — luneta invertida, sentido inverso,
- 3.^o " — luneta direta, sentido direto,
- 4.^o " — luneta invertida, sentido inverso,
- 5.^o " — luneta direta, sentido direto,
- 6.^o " — luneta invertida, sentido inverso.

2.^a Parte

- 7.^o giro — luneta invertida, sentido direto,
- 8.^o " — luneta direta, sentido inverso,
- 9.^o " — luneta invertida, sentido direto,
- 10.^o " — luneta direta, sentido inverso,
- 11.^o " — luneta invertida, sentido direto,
- 12.^o " — luneta direta, sentido inverso.

Designando-se por a, b, c, d, os ângulos medidos ao redor de um ponto geodésico, por uma serie de n giros de horizonte, podemos escrever a seguinte equação:

$$a + b + c + d = 360^\circ \pm \epsilon \dots (1)$$

$\pm \epsilon$ será o erro devido a diversas causas, tais como: torsão sofrida pelo teodolito durante o processo das medições; erros oriundos das imprecisões de pontarias devidos a iluminação dos sinais visados, pela luz solar; erros devidos aos efeitos de refração e outros, cuja natureza não permite aos observadores mais experimentados evitar.

A equação normal cabível no caso é:

$$\epsilon + \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} \right) K = 0 \quad (I)$$

$$\frac{1}{P_1} = m_1^2; \quad \frac{1}{P_2} = m_2^2; \quad \frac{1}{P_3} = m_3^2 \dots$$

sendo, como dissemos $m^2 = \frac{\sum v^2}{n(n-1)}$,

Podemos substituir na I

$$\epsilon + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) K = 0 \quad (II)$$

$$\text{ou } \sum m^2 K = -\epsilon$$

$$K = -\frac{\epsilon}{\sum m^2}$$

A (II) ficará

$$+\epsilon - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \frac{\epsilon}{\sum m^2} = 0$$

ou seja

$$+\epsilon - \left(\frac{m_1^2}{\sum m^2} + \frac{m_2^2}{\sum m^2} + \frac{m_3^2}{\sum m^2} \right) \epsilon = 0$$

As frações de dentro do parentesis são os coeficientes pelos quais devemos multiplicar o erro total ϵ para fazê-lo desaparecer.

Estes coeficientes são sempre menores que a unidade e a sua soma obrigatoriamente tem que ser igual a unidade.

Podemos escrever de um modo geral.

$$\epsilon + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) K = 0 \dots (2)$$

na qual os termos dentro do parentesis representam os erros medios

quadraticos determinados quando se procede ao calculo do valor mais provavel de cada ângulo, pela bem conhecida fórmula estabelecida pela teoria dos minimos quadrados.

$$m^2 = \frac{\sum v^2}{n (n-1)}, \dots\dots\dots (3)$$

na qual v é o residuo devido a comparação do valor médio e cada valor individual da medição executada, e, n representa o número de giros de horizonte pelo qual se estabeleceu o valor médio, mas provavel, do ângulo.

m^2 defini o grau de precisão com que se obtem o valor médio da grandeza em estudo; essa nossa acertiva tem apoio no seguinte caso.

Dois operadores A e B observam a grandeza de um mesmo ângulo com o mesmo teodolito, sem retirá-lo do ponto. Os resultados obtidos foram s seguintes:

A				v	v^2
1	35°	20'	10."35	.07	.0049
2			10.70	.28	.0784
3			10.40	.02	.0004
4			10.38	.04	.0016
5			10.40	.02	.0004
6			10.55	.13	.0169
7			10.25	.17	.0289
8			10.64	.22	.0484
9			10.58	.16	.0256
10			10.19	.23	.0529
11			10.27	.15	.0225
12			10.33	.09	.0081
125.04 ÷ 12				$\sum v^2$	.2890

Média 35° 20' 10."42

$$m^2 = \frac{\sum v^2}{n(n-1)} = \frac{0.289}{12 \times 11} = 0,0022$$

	B	v	v ²
1	35° 20' 09".20	0.83	0.6889
2	08.40	1.63	2.6569
3	10.30	0.27	0.0729
4	11.20	1.17	1.3689
5	8.00	2.03	4.1209
6	12.10	2.07	4.2849
7	7.80	2.23	4.9729
8	13.40	3.37	11.3569
9	8.00	2.03	4.1209
10	10.50	0.47	0.2209
11	13.20	3.17	10.0489
12	8.30	1.73	2.9929
120.40 ÷ 12		Σ v ² =	46.6068

Média 35° 20 10".03

$$m^2 = \frac{46.6068}{132} = 0.354$$

Da comparação dos ms² verifica-se que o trabalho executado por A é 177 vezes superior ao de B.

Pelo simples exame das variações entre as observações individuais, num e noutro caso, verifica-se que de fato as observações feitas por A são muito mais cuidadosas que as feitas por B.

De um modo geral, podemos indicar a (2)

$$+ \epsilon - \sum m^2 K = 0 \dots\dots (4)$$

$$\text{de onde } K = \frac{\epsilon}{\sum m^2},$$

sendo K um coeficiente correlativo que multiplicado pelos valores m₁², m₂², m₃², m₄² nos permite conhecer as correções que devemos aplicar aos ângulos, afim de fazer desaparecer a discrepancia. Exemplo: — Sejam os seguintes valores obtidos como os mais provaveis medios em um ponto; m₁², m₂², m₃²,..... os respectivos erros medios quadraticos:

a = 65° 30' 20".10	$m_1^2 = 0.10$
b = 68 40 10.40	$m_2^2 = 0.40$
c = 100 50 30.20	$m_3^2 = 0.60$
d = 124 58 56.20	$m_4^2 = 0.20$
359° 59' 56".90	$\Sigma m^2 = 1.30$
— 359 59 60.00	
$\epsilon = - 3".10$	

Pela (3) estabelece-se:

$$- 3".10 + 1.30 K = 0$$

$$K = \frac{3.10}{1.30} = 2".385$$

Multiplicando-se K pelos valores dos m^2 , mencionados acima, obtemos as correções para cada angulo.

Correções:

a = 2.385 x 0.10 = 0".2385
b = 2.385 x 0.40 = 0.9540
c = 2.385 x 0.60 = 1.4310
d = 2.385 x 0.20 = 0.4770
3.1005

despresando-se a quarta casa decimal das correções, por desnecessaria, e applicando-se as mesmas aos seus respectivos angulos, teremos os valores corretos.

a = 65° 30' 20".338
b = 68 40 11.354
c = 100 50 31.631
d = 124 58 56.677
360° 00 00.000

Cada um destes valores, ajustados para o ponto, deve conservar como característica da sua precisão o valor do erro médio quadrático, tratando-se de pontos isolados: ex, ponto de Potenot.

Em um triângulo, cada vertice é um angulo, cujo valor do erro médio quadrático já está conhecido, e no ajustamento dos três **angulos** ele entra como elemento auxiliar para a correção.

Aplicando-se o mesmo principio, podemos escrever a seguinte equação:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 180^\circ + \varepsilon \\ + \varepsilon + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) K &= 0 \\ + \varepsilon + \sum m^2 K &= 0 \end{aligned}$$

$$K = - \frac{\varepsilon}{\sum m^2}$$

Exemplo: —

A = 60° 30' 20".10	m ₁ ² = 0.20
B = 65 30 10.20	m ₂ ² = 0.60
C = 54 09 34.10	m ₃ ² = 0.80
180 00 04.40	Σ m ² = 1.60
— 180	

$$\varepsilon = + 4''.40$$

então,

$$+ 4''.40 + 1.60 K = 0$$

$$K = - \frac{4.40}{1.60} = - 2''.75$$

Correções:

A = — 2.75 x 0.20 = — 0".550	
B = — 2.75 x 0.60 = — 1.650	
C = — 2.75 x 0.80 = — 2.200	
	— 4".400

Aplicando estas correções aos angulos temos:

A =	60°	30'	19".550
B =	65	20	08.550
C =	54	09	31.900
	180°	00'	00".000

O ajustamento dos angulos, como se vê, é perfeito, está baseado na precisão com que cada angulo foi medido.

Em um serviço de triangulação, as rêdes são estabelecidas entre bases distantes, entre si, de 200 a 300 km, essa distancia é vencida por uma sucessão de triangulos bem conformados, isto é, não se deve admitir angulos de valor inferior a 30°.

Os lados dos triangulos, geralmente, variam de 20 a 30 km e acidentalmente podem atingir a 40 km.

O triangulo, uma vez ajustado pelo processo acima exposto é considerado uma figura indeformavel, ou perfeitamente rigida, por isso, ao nosso ver, a idéia do estabelecimento de uma rêde somente empregando quadrilateros completos, isto é, com duas diagonais, não passa de um capricho cuja justificativa é, unicamente baseada na possibilidade do emprego de ângulos de valor inferior a 30°.

A bôa qualidade dos trabalhos, dessa natureza, depende somente do bom serviço de exploração e locação dos pontos procurando o estabelecimento de triangulos bem conformados, e, principalmente de uma bôa ocupação, do ponto, pelo teodolito.

Na rêde de triangulação de Capão Bonito a Santo Angelo, cuja distancia entre bases é de 250 kms, empregamos 20 triangulos, a diferença em azimuth, ao chegarmos em Santo Angelo, foi apenas de 4", isto é, o azimuth da base de Santo Angelo foi determinado astronomicamente pelo processo de circumeridianas e o azimuth de comparação foi transportado de Capão Bonito, pela rêde, tendo sido nesta base tambem determinado o azimuth, pelo mesmo processo.

A compensação da rêde, aquí citada, foi feita segundo o que expuzemos, de onde se conclue, pelo resultado obtido, que melhor não se podia desejar.

Usamos nos trabalhos do Instituto, o dispositivo mostrado no quadro seguinte:

TRIANGULAÇÃO — Papuda — Gramadinho — Assunção REDE: — Capão Bonito — Santo Angelo

Denominação	Angulos medidos	m²	Excesso esferico	Correções	Angulos esfericos	Angulos planos
Papuda	54° 34' 48".92	0.62	—0.23	+1".526	54° 34' 50".446	54° 34' 50".216
Gramadinho	83° 24' 10".71	0.78	—0.23	+1".920	83° 24' 12".630	83° 24' 12".400
Assunção	42° 00' 56".25	0.55	—0.22	+1".354	42° 00' 57".604	42° 00' 57".384
	179° 59' 55".88	1.95	—0.68	+4".800	180° 00' 00".680	180° 00' 00".000

Exc. esf. —0.68
179° 59' 55".20
—180°
erro — 4".80

$$-4''.80 + 1.95 K = 0$$

$$K = \frac{4''.80}{1.95} = 2''.4615$$

Correções:

Papuda 0.62 x 2''.4615 = 1''.526

Gramad.º 0.78 x 2.4615 = 1.920

Assunção 0.55 x 2.4615 = 1.354

+ 4.800

Para o calculo do excesso esferico, usamos os angulos medidos para a determinação dos lados do triangulo.

No triangulo em questão o lado Teodóro-Gramadinho tem:

o log	=	4.3581676
log sen 39° 16' 11."84	=	9.8013858
colog sen 103° 26' 02."31	=	0.0120475
log Gramadinho - Papuda	=	4.1716009
log Gramadinho - Papuda	=	4.1716009
log sen 54° 34' 48."92	=	9.9111209
colog sen 42° 00' 56."25	=	0.1743605
log Gramadinho - Assunção	=	4.2570823

Calculo do excesso esferico do triangulo.

Gramadinho-Papuda-Assunção.

log Gramadinho - Papuda	4.1716009
log Gramadinho - Assunção	4.2570823
log sen 83° 24' 10."71	9.9973718
colg 2 R N sen 1"	1.4060400
log	= 9.8320950
	= 0.68

No agrupamento de triangulos, nos calculos de rês de triangulação, somente nos limitamos a quadrilateros formados do seguinte modo:

- 1.º Dois triangulos sendo um dos lados a diagonal unica do quadrilatero.
- 2.º Quatro triangulos conjugados, em um quadrilatero, tendo este duas diagonais.

Estudamos estes dois casos mais comuns, sendo ambos resolvidos pelo processo pratico de compensação dos erros.

O segundo caso por ser mais complexo foi tambem, resolvido pelo metodo classico, rigoroso, dos minimos quadrados, isto com o intuito de demonstrar o grau de aproximação entre os dois processos.

As diferenças são relativamente insignificantes, tendo o metodo pratico a grande vantagem de apresentar grande economia de tempo e evitar a complexidade dos calculos na solução das equações normais.

Para a solução do segundo caso pelos dois metodos, muito de proposito, procuramos um quadrilatero bem deformado, isto é, que mais se distanciasse da forma retangular.

1.º — Dois triangulos conjugados:

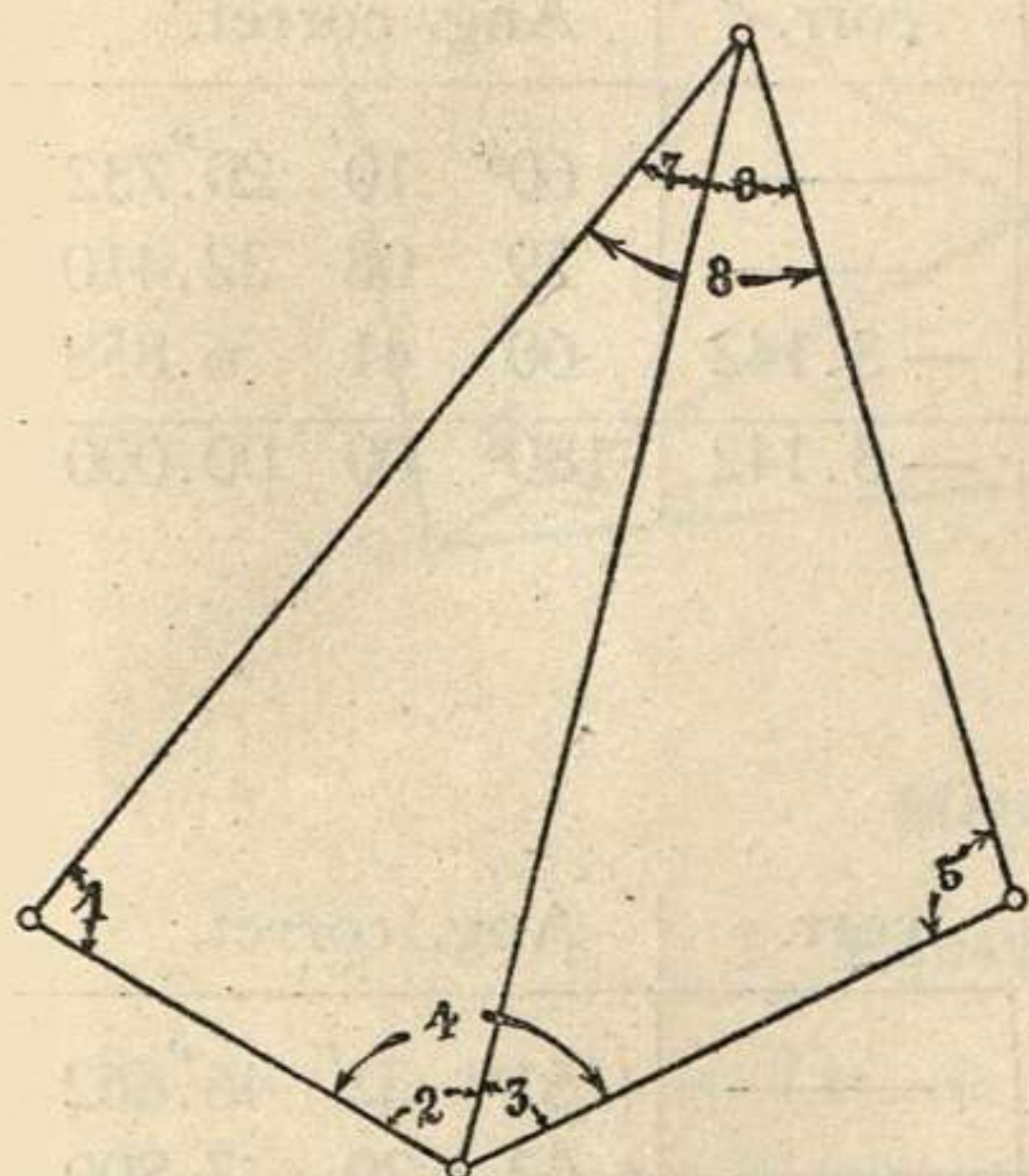


Fig. 1

Angulos observados				m ²
(1)	60°	10'	20"	0.15
(2)	59	08	33	0.70
(3)	61	32	47	0.40
(4)	120	41	18	0.22
(5)	62	29	06	0.37
(6)	55	58	06	0.18
(7)	60	41	10	0.23
(8)	116	39	12	0.08

$$I \quad (1) + (4) + (5) + (8) - 360^\circ = 0$$

				m ²	coef.	corr.	Ang. corret.
(1)	60°	10'	20"	0.15	0.183	+ 0".732	60° 10' 20".732
(4)	120	41	18	0.22	0.268	+ 1.072	120 41 19.072
(5)	62	29	06	0.37	0.450	+ 1.800	62 29 7.800
(8)	116	39	12	0.08	0.099	+ 0.396	116 39 12.396
359° 59 56				0.82	1.000	+ 4.000	360° 00 00.000
— 360							
— 4"							

II (2) + (3) — (4) = 0

	m ²	coef.	corr.	Ang. corret.
(2) 59° 08' 33"	0.70	0.636	— 0.590	59° 08' 32.410
(3) 61 32 47	0.40	0.364	— 0.338	61 32 46.662
120° 41 20	1.10	1.000	— 0.928	120° 41 19.072
— 120 41 19.072				
+ 0.928				

III (1) + (2) + (7) — 180° = 0

	m ²	coef.	corr.	Ang. corret.
(1) 60° 10' 20.732	—	—	—	60° 10' 20.732
(2) 59 08 32.410	—	—	—	59 08 32.410
(7) 60 41 10	—	—	— 3.142	60 41 6.858
180° 00 03.142			— 3.142	180° 00 00.000
— 180				
+ 3.142				

IV (3) + (5) + (6) — 180° = 0

	m ²	coef.	corr.	Ang. corret.
(3) 61° 32' 46.662	—	—	—	61° 32' 46.662
(5) 62 29 7.800	—	—	—	62 29 7.800
(6) 55 58 6.000	—	—	— 0.462	55 58 5.538
180° 00 00.462				180° 00 00.000
— 180				
± 0.462				

VERIFICAÇÃO

(6) + (7) — (8) = 0

(6) 55° 58' 5.538	
(7) 60 41 6.858	
116° 39 12.396	
(8) 116 39 12.396	
00° 00 00.000	

QUADRILATEROS COM DUAS DIAGONAIS

Solução pelo metodo pratico e pelo teórico, ou, dos minimos quadrados.

Quadrilatero com duas diagonais apresentando quatro triangulos conjugados.

Polo em 3

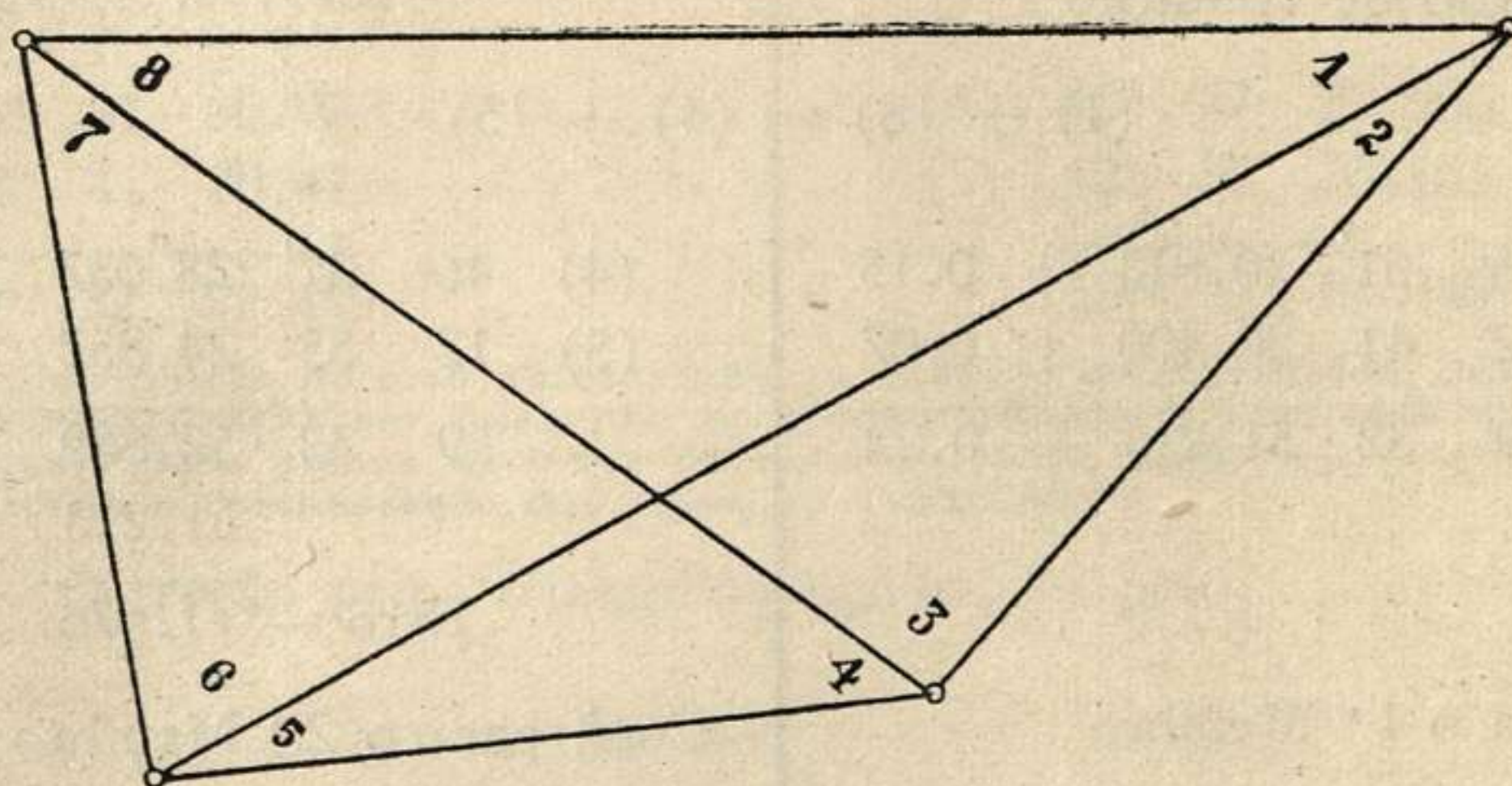


Fig. 2

Metodo pratico

I Equação de condição

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) - 360^\circ = 0$$

Angs. Observados				m ²	coef.	corr.	Ang. Corr. p/eq. I
(1)	26°	51'	31".03	0.15	0.050	— 0".217	30".813
(2)	16	18	44.30	0.08	0.026	— 0.117	44.183
(3)	104	08	27.31	0.38	0.126	— 0.547	26.763
(4)	46	37	28.64	0.42	0.139	— 0.603	28.037
(5)	12	55	26.18	0.92	0.306	— 1.328	24.852
(6)	54	20	21.25	0.87	0.289	— 1.254	19.996
(7)	66	06	45.13	0.12	0.040	— 0.174	44.956
(8)	32	41	20.50	0.07	0.023	— 0.100	20.400
360° 00 04.34				3.01	1.000	— 4.340	00.000
— 360							
erro + 4.34							

Nota: Na 4.^a coluna: $\text{Coef.} = \frac{m^2}{\sum m^2}$

Na 5.^a coluna: $\text{Corr.} = \text{erro} \times \text{coef.} (-1)$.

II Correção para o cruzamento das diagonais.

II Equação de condição:

$$(1) + (8) = (4) + (5)$$

(1)	26°	51'	30".813	0.15
(8)	32	41	20.400	0.07
	59	32	51.213	0.22

(4)	46°	37'	28".037	0.42
(5)	12	55	24.852	0.92
	59	32	52.889	1.34
			51.213	

Erro — 1.676

Coef. para o 1.^o Membro

$$\frac{0.22}{0.22 + 1.34} = 0.141$$

Coef. para o 2.^o Membro

$$\frac{1.34}{1.54} = 0.859$$

Cheque $0.141 + 0.859 = 1.000$

Correção para 1.^o Membro

$$0.141 \times 1".676 = + 0.236$$

Correção para 2.^o Membro

$$0.85 (-1".676) = - 1.440$$

Cheque $0.236 + 1.440 = 1".676$ (erro)

Coef. parciais do 1.^o Membro

(1)	0.15	
	—	= 0.682
	0.22	
(8)	0.07	
	—	= 0.318
	0.22	—
		1.000

Coef. parciais do 2.^o Membro

(4)	0.42	
	—	= 0.313
	1.34	
(5)	0.92	
	—	= 0.687
	1.34	—
		1.000

Corr. parciais 1.º Membro

$$(1) \quad 0.682 \times 0.236 = 0.161$$

$$(8) \quad 0.318 \times 0.236 = 0.075$$

$$\text{Cheque} = 0.236$$

Angulos corretos

$$(1) \quad 26^\circ \quad 51' \quad 30''.974$$

$$(8) \quad 32 \quad 41 \quad 20.475$$

$$\hline 59^\circ \quad 32 \quad 51.449$$

Corr. parciais 2.º Membro

$$(4) \quad 0.313 (-1.440) = -0.451$$

$$(5) \quad 0.687 (-1.440) = -0.989$$

$$\text{Cheque} = 1.440$$

Angulos corretos

$$(4) \quad 46^\circ \quad 37' \quad 27''.586$$

$$(5) \quad 12 \quad 55 \quad 23.863$$

$$\hline 59^\circ \quad 32 \quad 51.449$$

A distribuição do erro apresentado na equação do cruzamento das diagonais, verdadeiramente deve ser feita não proporcionalmente à soma dos m^2 , sim em partes iguais para ambos os lados da equação, desse modo ainda mais simplificado se torna a compensação dos erros no quadrilátero.

III Correção pelos triangulos ligados ao polo.

a)

$$(4) + (5) + (6) - 180^\circ = 0$$

(4) + (5) é a soma dos angulos na correção anterior (II Membro)

	m^2	coef.	corr.	Angs. corrt
(4) + (5) = $59^\circ \quad 32' \quad 51''.449$		—	—	51''.449
(6) = $54 \quad 20 \quad 19.996$	0.87	0.879	+3.164	23.160
(7) = $66 \quad 06 \quad 44.956$	0.12	0.121	+0.435	45.391
$179 \quad 59 \quad 56.401$	0.99	1.000	+3.599	00.000
— 180				
— 3.599				

b) $[(1) + (8)] + (2) + (3) - 180^\circ = 0$

	m^2	coef.	corr.	Angs. corrt
$[(1) + (8)] = 59^\circ \quad 32' \quad 51''.449$				51''.449
(2) = $16 \quad 18 \quad 44.183$	0.08	0.174	—0.417	43.766
(3) = $104 \quad 08 \quad 26.763$	0.38	0.826	—1.978	24.785
$180^\circ \quad 00 \quad 02.395$	0.46	1.000	—2.395	00.000
— 180				
+ 2.395				

Angulos corretos para o cruzamento de diagonais:

(1)	26°	51'	30".974
(2)	16	18	43.766
(3)	104	08	24.785
(4)	46	37	27.586
(5)	12	55	23.863
(6)	54	20	23.160
(7)	66	06	45.391
(8)	32	41	20.475
	360	00	00.000

IV Correção — Equação Lateral

$$\frac{\text{sen (2) sen (4) sen (6) sen (8)}}{\text{sen (1) sen (3) sen (5) sen (7)}} = 1$$

N u m e r a d o r

				Logs. (+)	Dif. /"
(2)	16°	18'	43".766	9.4485059	72.0
(4)	46	37	27.586	9.8614546	19.9
(6)	54	20	23.160	9.9098172	15.1
(8)	32	41	20.475	9.7324573	32.8
				38.9522350	139.8

D e n o m i n a d o r

				Logs. (—)	Dif. /"
(1)	26°	51'	30".974	9.6549368	41.6
(3)	104	08	24.785	9.9866388	5.3
(5)	12	55	23.863	9.3495610	91.8
(7)	66	06	45.391	9.9611092	9.3
				38.9522458	148.0

350

— 108

$$\frac{108}{287.8} = 0,375 \text{ (+ para numerador — para denominador)}$$

Angulos corretos

(1)	26°	51'	30"599
(2)	16	18	44.141
(3)	104	08	24.410
(4)	46	37	27.961
(5)	12	55	23.488
(6)	54	20	23.535
(7)	66	06	45.016
(8)	32	41	20.850
	360	00	00.000

Metodo dos minimos quadrados.

Equações de condições

a) Angulares

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & (1) + (2) + (3) + (8) - 180^\circ = 0 \\ \text{II} \quad & (4) + (5) + (6) + (7) - 180 = 0 \\ \text{III} \quad & (2) + (3) + (4) + (5) - 180 = 0 \end{aligned}$$

b) Lateral

$$\text{IV} \quad \frac{\text{sen } (1) \text{ sen } (3) \text{ sen } (5) \text{ sen } (7)}{\text{sen } (2) \text{ sen } (4) \text{ sen } (6) \text{ sen } (8)} = 1$$

I	(1)	26°	51'	31"03
	(2)	16	18	44.30
	(3)	104	08	27.31
	(8)	32	41	20.50
		180°	00	03.14
		— 180		
			+	3.14

II	(4)	46°	37'	28"64
	(5)	12	55	26.18
	(6)	54	20	21.25
	(7)	66	06	45.13
		180°	00	01.20
		— 180		
			+	1.20

III	(2)	16°	18'	44".30
	(3)	104	08	27.31
	(4)	46	37	28.64
	(5)	12	55	26.18
		180°	00	06.43
		— 180		
			+	6.43

Damos a seguir a formação da equação lateral para depois escrever as quatro equações na forma linear entrando, então com os respectivos m^2 para cada angula.

IV Equação Lateral. (formação)

$$\frac{\text{sen (1) sen (3) sen (5) sen (7)}}{\text{sen (2) sen (4) sen (6) sen (8)}} = 1$$

				Logaritimos	Dif./1"
(1)	26°	51'	31".03	9.6549370	41.6
(3)	104	08	27.31	9.9866364	— 5.3
(5)	12	55	26.18	9.3495841	91.8
(7)	66	06	45.13	9.9611090	9.3
				38.9522665	

(2)	16°	18'	44".30	9.4485090	72.0
(4)	46	37	28.64	9.8614567	19.9
(6)	54	20	21.25	9.9098143	15.1
(8)	32	41	20.50	9.7324574	32.8
				38.9522374	

Numerador	(+)	2665
Denominador	(—)	2374
Dif.		291

Organizando a forma linear desta equação, dividimos por 10 as diferenças logarítmicas para 1", bem assim a diferença entre o numerador e o denominador, no balanço dos logs. dos senos.

As quatro equações ficam redigidas do modo seguinte:

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad & 0.15 (1) + 0.08 (2) + 0.38 (3) + 0.07 (8) = + 3.14 \\
 \text{II} \quad & 0.42 (4) + 0.92 (5) + 0.87 (6) + 0.12 (7) = + 1.20 \\
 \text{III} \quad & 0.08 (2) + 0.38 (3) + 0.42 (4) + 0.92 (5) = + 6.43 \\
 \text{IV} \quad & 0.15 \times 4.16 (1) - 0.08 \times 7.20 (2) - 0.38 \times 0.53 (3) - \\
 & - 0.42 \times 1.99 (4) + 0.92 \times 9.18 (5) - 0.87 \times 1.51 (6) + \\
 & + 0.12 \times 0.93 (7) - 0.70 \times 3.28 (8) = + 29.1
 \end{aligned}$$

Correlativas

v	m ²	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
1	0.15	0.15			+ 0.15 x 4.16
2	0.08	0.08		0.08	- 0.38 x 7.20
3	0.38	0.38		0.38	- 0.38 x 0.53
4	0.42		0.42	0.42	- 0.42 x 1.99
5	0.92		0.92	0.92	+ 0.92 x 9.18
6	0.87		0.87		- 0.87 x 1.51
7	0.12		0.12		+ 0.12 x 0.93
8	0.07	0.07			- 0.07 x 3.28

Formação das equações normais.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	
(1)	+ 0.15	+ 0	+ 0	+ 0.624	
(2)	+ 0.08	+ 0	+ 0.08	- 0.576	
(3)	+ 0.38	+ 0	+ 0.38	- 0.2014	
(8)	+ 0.07	+ 0	+ 0	- 0.2296	
I	+ 0.68	+ 0	+ 0.46	- 0.3830	= + 3.14

	K_1	K_2	K_3	K_4
(4)	+ 0	+ 0.42	+ 0.42	— 0.8358
(5)	+ 0	+ 0.92	+ 0.92	+ 8.4456
(6)	+ 0	+ 0.87	+ 0	— 1.3137
(7)	+ 0	+ 0.12	+ 0	+ 0.1110
II	+ 0	+ 2.33	+ 1.34	+ 6.4071 = + 1.20

	K_1	K_2	K_3	K_4
(2)	0.08	+ 0	+ 0.08	— 0.576
(3)	0.38	+ 0	+ 0.38	— 0.2014
(4)	0	+ 0.42	+ 0.42	— 0.8358
(5)	0	+ 0.92	+ 0.92	+ 8.4456
III	0.46	+ 1.34	+ 1.80	+ 6.8324 = + 6.43

	K_1	K_2	K_3	K_4
(1)	+ 0.6240	+ 0	+ 0	+ 0.2596
(2)	— 0.5760	+ 0	— 0.5760	+ 4.1472
(3)	— 0.2014	+ 0	— 0.2014	+ 0.1067
(4)	+ 0	— 0.8358	— 0.8358	+ 1.0912
(5)	+ 0	+ 8.4456	+ 8.4456	+ 77.5306
(6)	+ 0	— 1.3137	+ 0	+ 1.9837
(7)	+ 0	+ 0.1110	+ 0	+ 0.1032
(8)	+ 0.2296	+ 0	+ 0	+ 0.7531
IV	— 0.383	+ 6.4071	+ 6.8324	+ 85.9753 = + 29.1

Reunindo as quatro equações normais para ficar patente a simetria dos termos, relativamente àqueles da diagonal temos:

I	+ 0.68	+ 0.	+ 0.46	— 0.3830	+ 3.14
II	+ 0.	+ 2.33	+ 1.34	+ 6.4071	+ 1.20
III	+ 0.46	+ 1.34	+ 1.80	+ 6.8324	+ 6.43
IV	— 0.3830	+ 6.4071	+ 6.8324	+ 85.9753	+ 29.1

Soluções das equações normais.

1	2	3	4	5	6	
+0.68	0	+0.46	— 0.383	+ 3.14	+ 3.897	
C ₁	0	—0.6765	+ 0.5632	— 4.6176	— 5.7309	cheque
	+2.33	+1.34	+ 6.4071	+ 1.20	+ 11.2771	
	0	0	0	0	0	
	+2.33	+1.34	+ 6.4071	+ 1.20	+ 11.2771	
	C ₂	—0.5751	— 2.7498	— 0.5150	— 4.8399	cheque
		+1.80	+ 6.8324	+ 6.43	+ 16.8624	
		—0.3112	+ 0.2591	— 2.1241	— 2.6362	
		—0.7706	— 3.6847	— 0.6901	— 6.4855	
		+0.7182	+ 3.4068	+ 3.6158	+ 7.7407	
		C ₃	— 4.7435	— 5.0345	— 10.7780	cheque
			+85.9753	+29.1	+127.9318	
			— 0.2157	+ 1.7685	+ 2.1949	
			—17.6182	— 3.2997	— 31.0097	
			—16.1602	—17.1515	— 36.7185	
			+51.9812	+10.4173	+ 62.3985	
			C ₄	— 0.2004	— 1.2004	
				— 1.2004	— 1.2004	cheque

Calculos dos correlativos K.

K ₄	K ₃	K ₂	K ₁
—0.2004	— 5.0345	—0.5150	—4.6176
	+0.9506	+0.5511	—0.1129
	—4.0839	+2.3487	+2.7628
		+2.3848	0.
			—1.9677

Calculos dos Vs.

1	2	3	4	5	6	7	8
—1.9677	—1.9677	—1.9677					—1.9677
			+2.3848	+2.3848	+2.3848	+2.3848	
	—4.0839	—4.0839	—4.0839	—4.0839			
—0.8337	+1.4429	+0.1062	+0.3988	—1.8397	+0.3026	—0.1864	+0.6573
—2.8014	—4.6087	—5.9454	—1.3003	—3.5388	+2.6874	+2.1984	—1.3104
0.15	0.08	0.38	0.42	0.92	0.87	0.12	0.07
—0.4202	—0.3687	—2.2593	—0.5461	—3.2557	+2.3380	+0.2638	—0.0917

Substituindo nas equações de condição.

(1) — 0".4202	(4) — 0".5461	(2) — 0".3687
(2) — 0.3687	(5) — 3.2557	(3) — 2.2593
(3) — 2.2593	(6) + 2.3380	(4) — 0.5461
(8) — 0.0917	(7) + 0.2638	(5) — 3.2557
<u>— 3.1399</u>	<u>— 1.2000</u>	<u>— 6.4298</u>

Angulos Observados				Correções	Angulos Corretos			
(1)	26°	51'	31".03	— 0".4202	26°	51'	30".6098	
(2)	16	18	44.30	— 0.3687	16	18	43.9313	
(3)	104	08	27.31	— 2.2593	104	08	25.0507	
(4)	46	37	28.64	— 0.5461	46	37	28.0939	
(5)	12	55	26.18	— 3.2557	12	55	22.9243	
(6)	54	20	21.25	+ 2.3380	54	20	23.5880	
(7)	66	06	45.13	+ 0.2638	66	06	45.3938	
(8)	32	41	20.50	— 0.0917	32	41	20.4083	
					360	00	00.0000	

Comparação dos dois métodos, o teórico e o prático.

Minimos quadrados	Bierrenbach	Diferenças
(1) 30".6098	30".599	+ 0".0108
(2) 43.9313	44.141	+ 0.2097
(3) 25.0507	24.410	— 0.5407
(4) 28.0939	27.961	— 0.1329
(5) 22.9243	23.488	+ 0.5637
(6) 23.5880	24.535	+ 0.9470
(7) 45.3938	45.016	— 0.3778
(8) 20.4083	20.850	+ 0.4417

As diferenças da 3.^a coluna permitem afirmar que a compensação pelo método prático dá uma aproximação bastante satisfatória sendo a máxima discrepância 1".

TRIANGULO COM PONTO INTERNO

Solução pelo método de Mininos Quadrados

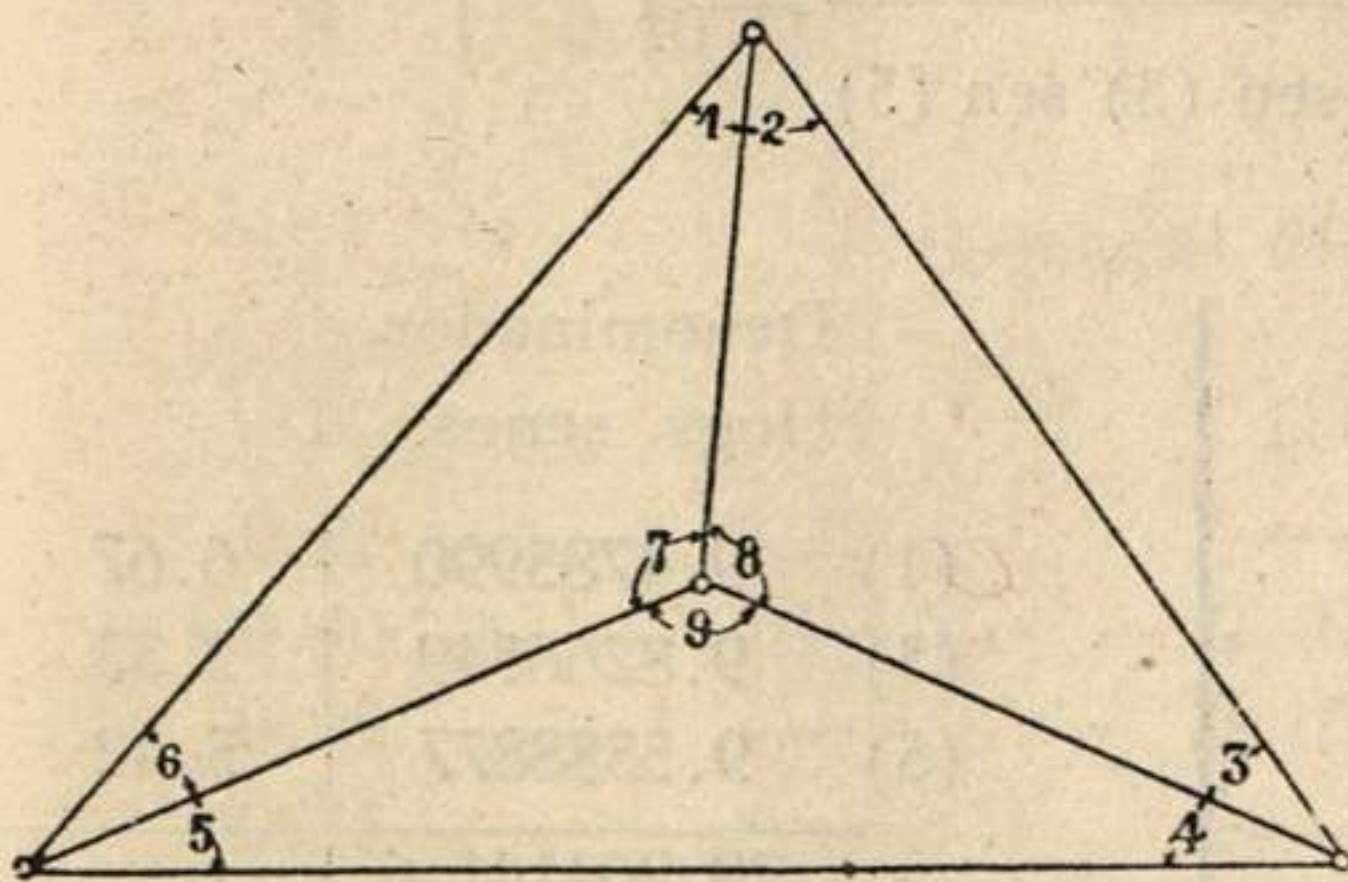


Fig. 3

	Angl. observados			m ²
(1)	17°	31'	08".5	0.25
(2)	65	29	49.4	0.40
(3)	42	08	10.4	0.15
(4)	13	32	34.1	0.25
(5)	21	13	56.1	0.20
(6)	20	04	23.4	0.35
(7)	142	24	25.4	0.40
(8)	72	22	03.2	0.10
(9)	145	13	28.5	0.30

$$I \quad (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) - 180^\circ = 0$$

(1)	17°	31'	08".5
(2)	65	29	49.4
(3)	42	08	10.4
(4)	13	32	34.1
(5)	21	13	56.1
(6)	20	04	23.4
	180°	00	01.9
	— 180°		
			+ 01.9

II (1) + (6) + (7) — 180° = 0 III (2) + (3) + (8) — 180° = 0

(1)	17°	31'	08".5
(6)	20	04	23.4
(7)	142°	24	25.4
	179°	59	57.3
	— 180°		
			— 02.7

(2)	65°	29'	49".4
(3)	42	08	10.4
(8)	72	22	03.2
	180°	00	03.0
			+ 03.0

IV $\frac{\text{sen } (2) \text{ sen } (4) \text{ sen } (6)}{\text{sen } (1) \text{ sen } (3) \text{ sen } (5)} = 1$

Numerador logs. senos.			Denominador logs. senos.		
(2)	9.9590127	0.96	(1)	9.4785990	6.67
(4)	9.3695345	8.74	(3)	9.8266549	2.33
(6)	9.5355724	5.76	(5)	9.5588877	5.42
	28.8641196			28.864141.6	
				119.6	
			Erro	— 22.0	

Equações de Condições.

$$\text{I} \quad 0.25 (1) + 0.40 (2) + 0.15 (3) + 0.25 (4) + 0.20 (5) + \\ + 0.35 (6) - 1.90 - 180^\circ = 0$$

$$\text{II} \quad 0.25 (1) + 0.35 (6) + 0.40 (7) - 180^\circ + 2.70 = 0$$

$$\text{III} \quad 0.40 (2) + 0.15 (3) + 0.10 (8) - 180^\circ - 3.00 = 0$$

$$\text{IV} \quad 0.25 (1) + 0.40 (2) - 0.15 (3) + 0.25 (4) - 0.20 (5) + \\ + 0.35 (6) + 22.0 = 0 \quad \text{Cada termo } \times \text{ pelo corres-} \\ \text{pondente da IV Coluna.}$$

Correlativas

	m ²	I	II	III	IV
1	0.25	+ 1	+ 1		- 6.67
2	0.40	+ 1		+ 1	+ 0.96
3	0.15	+ 1		+ 1	- 2.33
4	0.25	+ 1			+ 8.74
5	0.20	+ 1			- 5.42
6	0.35	+ 1	+ 1		+ 5.76
7	0.40				
8	0.10			+ 1	

I Equação Normal.

I	II	III	IV
0.25	+ 0.25	—	- 1.667
0.40	—	+ 0.40	+ 0.384
0.15	—	+ 0.15	- 0.349
0.25	—	—	+ 2.185
0.20	—	—	- 1.084
0.35	+ 0.35	—	+ 2.016
1.60	+ 0.60	+ 0.55	+ 1.485 - 1.90

II Equação Normal.

I	II	III	IV
0.25	+ 0.25	—	— 1.667
0.35	+ 0.35	—	+ 2.016
—	+ 0.40	—	—
0.60	+ 1.00	—	+ 0.349 + 2.70

III Equação Normal.

I	II	III	IV
0.40	—	+ 0.40	+ 0.384
0.15	—	+ 0.15	— 0.349
—	—	+ 0.10	—
0.55	—	+ 0.65	+ 0.035 — 3.00

IV Equação Normal.

I	II	III	IV
— 1.667	— 1.667	—	+ 11.119
+ 0.384	—	+ 0.384	+ 0.369
— 0.349	—	— 0.349	+ 0.813
+ 2.185	—	—	+ 19.097
— 1.084	—	—	+ 5.875
+ 2.016	+ 2.016	—	+ 11.612
+ 1.485	+ 0.349	+ 0.035	+ 48.885 + 22.0

Equações Normais.

1.60	+ 0.60	+ 0.55	+ 1.485	— 1.90	+ 2.335
0.60	+ 1.00	—	+ 0.349	+ 2.70	+ 4.649
0.55	—	+ 0.65	+ 0.035	— 3.00	— 1.765
1.485	+ 0.349	+ 0.035	+ 48.885	+ 22.00	+ 72.754

SOLUÇÃO

I	II	III	IV	C	Σ
+ 1.60	+ 0.60	+ 0.55	+ 1.485	— 1.90	+ 2.335
— 1	— 0.3750	— 0.3437	— 0.9281	+ 1.1875	— 1.4594
	+ 1.00	—	+ 0.3490	+ 2.7000	+ 4.649
	— 0.2250	— 0.2062	— 0.5569	+ 0.7125	— 0.8756
	+ 0.7750	— 0.2062	— 0.2079	+ 3.4125	+ 3.7734
	— 1.	+ 0.2661	+ 0.2682	— 4.4032	— 4.8689
		+ 0.65	+ 0.035	— 3.00	— 1.765
		— 0.1890	— 0.5105	+ 0.6531	— 0.8027
		— 0.0549	— 0.0553	+ 0.9079	+ 1.0040
		+ 0.4061	— 0.5308	— 1.4390	— 1.5637
		— 1.	+ 1.3071	+ 3.5435	+ 3.8505
			+ 48.885	+ 22.00	+ 72.754
			— 1.3782	+ 1.7634	— 2.1672
			— 0.0558	+ 0.9154	+ 1.0122
			— 0.6938	— 1.8809	— 2.0438
			+ 46.7572	+ 22.7979	+ 69.5552
			— 1.	— 0.4876	— 1.4876

Coeficientes

K ₄	K ₃	K ₂	K ₁
— 0.4876	+ 3.5435	— 4.4032	+ 1.1875
	— 0.6373	— 0.1308	+ 0.4525
	+ 2.9062	+ 0.7733	— 0.9989
		— 3.7607	+ 1.4103
			+ 2.0514

Vs

1	2	3	4	5	6	7	8
+2.0514 —3.7607	+2.0514	+2.0514	+2.0514	+2.0514	+2.0514 —3.7607	—3.7607	
	+2.9062	+2.9062					+2.9062
+3.2523	—0.4681	+1.1361	—4.2616	+2.6428	—2.8086		
+1.5430 0.25	+4.4895 0.40	+6.0937 0.15	—2.2102 0.25	+4.6942 0.20	—4.5179 0.35	—3.7607 0.40	+2.9062 0.10
+0.3858	+1.7958	+0.9141	—0.5526	+0.9388	—1.5813	—1.5043	+0.2906

Trocando os sinais e verificando as equações de condição, temos:

I		II		IV	
(1)	— 0.3858	(1)	— 0.3858	(1)	+ 2.5733
(2)	— 1.7958	(6)	+ 1.5813	(2)	— 1.7240
(3)	— 0.9141	(7)	+ 1.5043	(3)	+ 2.1299
(4)	+ 0.5526		<u>+ 2.6998</u>	(4)	+ 4.8297
(5)	— 0.9388		— 2.70	(5)	+ 5.0883
(6)	+ 1.5813			(6)	+ 9.1083
	<u>— 1.9006</u>				<u>+22.0055</u>
	+ 1.90		III		—22.00
		(2)	— 1.7958		
		(3)	— 0.9141		
		(8)	— 0.2906		
			<u>— 3.0005</u>		
			+ 3.00		

Solução pelo método prático

I (7) + (8) + (9) — (360°) = 0

			m ²	Coef.	Corr.	
(7)	142°	24' 25".4	0.40	0.500	+1".4500	142° 24' 26".8500
(8)	72	22 03.2	0.10	0.125	+0.3625	72 22 3.5625
(9)	145	13 28.5	0.30	0.375	+1.0875	145 13 29.5875
	179°	59 57.1	0.80	1.000		360° 00 00.0000
	Erro — 2.9					

II (1) + (6) + (7) — 180° = 0

			m ²	Coef.	Corr.	
(1)	17°	31' 08".5	0.25	0.416	+0".520	17° 31' 09".020
(6)	20	04 23.4	0.35	0.584	+0.730	20 04 24.130
(7)	142	24 26.85	—	—	—	142 24 26.850
	179°	59 58.75	0.60	1.000	+1.250	180° 00 00.000
	— 180°					
	— 1.25					

III (2) + (3) + (8) — 180° = 0

			m ²	Coef.	Corr.	
(2)	65°	29' 49".4	0.40	0.7272	—2".4452	65° 29' 46".9548
(2)	42	08 10.4	0.15	0.2728	—0.9173	42 08 9.4827
(8)	72	22 3.5625	—	—	—	72 22 3.5625
	180°	00 03.3625	0.55	1.0000	—3.3625	180° 00 00.0000
	+ 3.3625					

$$\text{IV } (4) + (5) + (9) - 180^\circ = 0$$

			m ²	Coef.	Corr.	
(4)	13°	32'	34".1	0.25	0.55	+0".1169
(5)	21	13	56.1	0.20	0.45	+0.0956
(9)	145	13	29.5875	—	—	—
	179°	59	59.7875	0.45		
		—	0.2125			
						180° 00 00.0000

Os valores dos ângulos desta equação podem ser obtidos por deduções.

Confronto dos resultados.

	Método prático	Minimos	Quadrados	Diferenças
(1)	9".020		8".1142	0".90
(2)	46.9548		47.6042	0.65
(3)	9.4827		9.4859	0.003
(4)	34.2169		34.6526	0.44
(5)	56.1956		56.1612	0.036
(6)	24.130		24.9813	0.85
(7)	26.85		26.9043	0.05
(8)	3.5625		2.9094	0.65
(9)	29.5875		30.1863	0.60

Pelas diferenças da última coluna verifica-se que estas são inferiores a 1".

(1)	17°	31'	09".020
(2)	65	29	46.9548
(3)	42	08	9.4827
(4)	13	32	34.2169
(5)	21	13	56.1956
(6)	20	04	24.130
	180°	00	00.0000

Um caso como o que acabamos de apresentar constitue, em uma rede de triangulação, problema isolado; o triângulo ABC sendo parte integrante da rede seria ajustado como simples triângulo, pelo primeiro exemplo que apresentamos.

Tambem no caso de um quadilatero com duas diagonais, escolhendo-se os dois triângulos de melhor conformação pode-se com vantagem prescindir de calculá-lo como quadrilatero, simplificando muitíssimo os trabalhos de escritorio.

E' bom fazer sentir que os trabalhos de triangulação que estão sendo executados, todos eles, têm a finalidade da construção de cartas geográficas, por isso, não se tratando de finalidades de extremado rigorismo científico deve se dar preferencia às soluções práticas, por serem menos trabalhosas e oferecem uma excelente aproximação às soluções rigorosamente teóricas.

O emprego do erro medio quadrático, como espuzemos, é um ótimo meio de destruição do erro de fechamento dos triângulos, tendo-se em vista o gráo de exatidão com que foram medidos os ângulos, conforme ficou positivado.

CARATERÍSTICAS DA REDE DE TRIANGULAÇÃO ENTRE AS BASES DE CAPÃO BONITO E Sto. ANGELO

Posição geográfica da base Capão Bonito determinação
astronômica

Marco A	Latitude	23°	57'	21, 3"	S.
	Longitude	48°	24	30, 2	W de Gr.
	Azimute	267°	24	24, 6	

Azimute contado de S no sentido SW NE.

Comprimento da base 10469,795 m. reduzida ao nivel médio do mar.

Posição geográfica da base Santo Angelo determi-
nação astronômica

Marco A	Latitude	23°	35'	22",9	S
	Longitude	46°	15	45,3	W. Gr.
	Azimute	204°	03	56,8	

Contado exatamente como no caso anterior.

Comprimento da base 5072,829 m. reduzida ao nível medio do mar.

Essas bases foram medidas com a basimetro "Invar".

Os trabalhos astronômicos foram realizados com teodolito "Zeiss" II e tomada de tempo pela radio telegráfica, em ondas curtas, comparadas com cronometro sideral — tipo de marinha. A distancia entre as bases citadas, em linha reta, é de, aproximadamente 250 km. tendo se construido os sinais de triangulação constantes da relação publicada neste trabalho.

Pelo cálculo da rêde obedecendo-se a técnica moderna, segundo os preceitos da teoria obtivemos os seguintes resultados:

Diferença entre o transporte e a observação, partindo da base Capão Bonito para a de Santo Angelo.

Latitude	—	11",0
Longitude	—	2,0
Azimute	—	4,3

Diferença entre o comprimento calculado e o medido, para a base Santo Angelo 0,38 m.

A diferença em Latitude é, segundo nossa opinião, grandemente influenciada pelo desvio da vertical, dada as posições relativas das duas bases com a linha do litoral, entrando como fatores preponderantes as massas dos terrenos acidentados existentes na zona S. da Ribeira de Iguape, bem assim aquela da maciço da Serra dos Itatins.

Infelizmente não dispomos da aparelhagem necessaria para realizar a determinação desse desvio.

LUGAR	LATITUDE			LONGITUDE		
Marco A (B. C. BON.)	— 23°	57'	05".780	— 48°	18'	20".309
Candóca	— 23	52	41.155	— 48	21	09.862
Teodoro	— 23	57	55.881	— 48	17	20.363
Gramadinho	— 23	48	01.441	— 48	09	18.392
Papuda	— 23	56	03.944	— 48	09	12.734
Assunção	— 23	49	02.275	— 47	58	43.298
Soares	— 23	32	05.330	— 47	57	48.989
Barra	— 23	44	18.679	— 47	48	17.021
Damasio	— 23	31	59.815	— 47	43	13.787
Piedade	— 23	45	51.330	— 47	26	35.046
Light	— 23	35	32.117	— 47	21	25.014
Setubal	— 23	36	18.930	— 47	12	05.564
Coqueiros	— 23	42	16.329	— 47	08	54.837
S. Roque	— 23	34	25.645	— 47	03	04.410
Caucaia	— 23	41	46.327	— 47	00	20.849
Volta	— 23	38	52.578	— 46	53	00.790
Jaraguá	— 23	27	08.053	— 46	45	51.200
Pelado	— 23	38	04.524	— 46	25	33.720
Itaquá	— 23	27	37.706	— 46	18	56.947
Marco B (B S. Ang.)	— 23	36	43.764	— 46	13	15.105
Colegio	— 23	36	15.312	— 46	18	26.371
Marco A (B. S. Ang.)	— 23	35	11.418	— 46	15	43.350
Itaquéra	— 23	32	56.426	— 46	28	40.821
Virgilio	— 23	41	28.971	— 47	16	22.115
Capão Bonito	— 24	00	13.921	— 48	20	53.881
Martinelli	— 23	32	35.143	— 46	38	02.470
(Para-raio do predio Martineli.)						

Os trabalhos astronômicos das duas bases foram executado pelo Engenheiro J. O. Quintão.

As bases foram medidas pelos Engenheiros:

G. C. Bierrenbach Lima

J. O. Quintão

L. Taliberti

A. Colucci

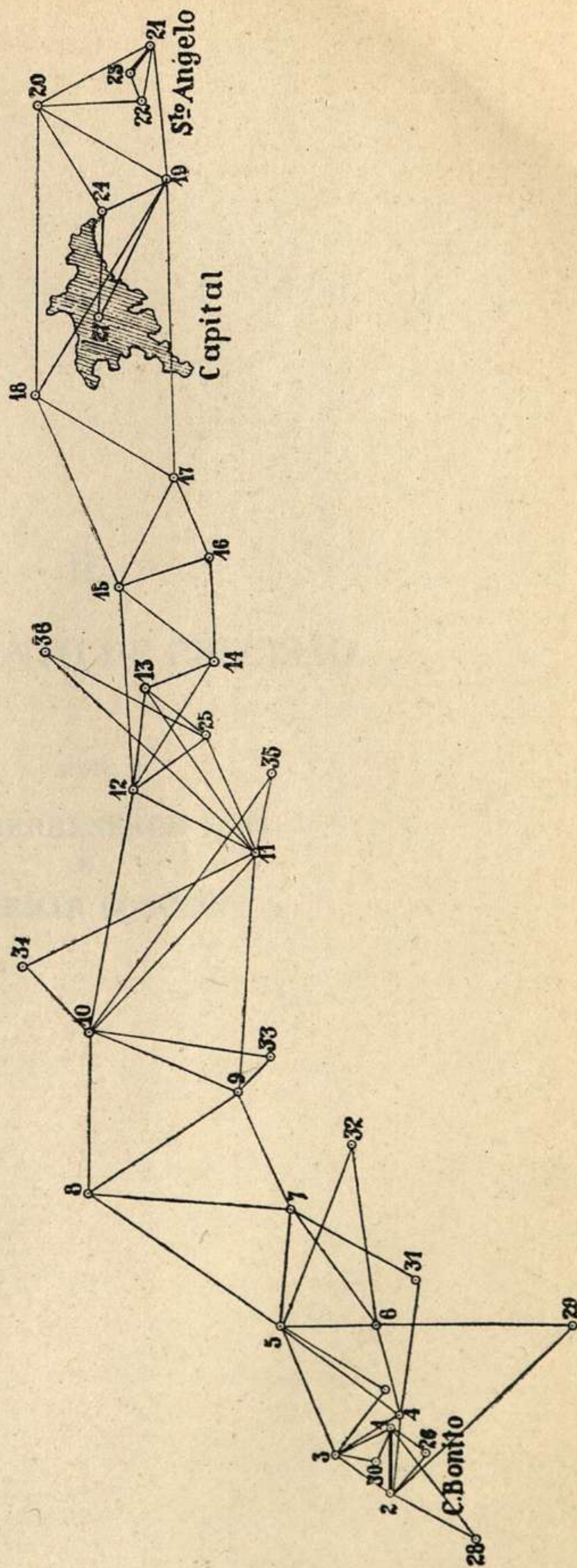
e auxiliares: Thales Guimarães e Carlos de Castro.

Os trabalhos de triangulação entre as bases foram realizados por G. C. Bierrenbach Lima, tendo sido usado um teodolito Vild T₃, na medição dos ângulos.

1 — Marco A (B. C. Bonito)
 2 — Marco B (B. C. Bonito)
 3 — Candóca
 4 — Teodóro
 5 — Gramadinho
 6 — Papuda
 7 — Assunção
 8 — Soares
 9 — Barra
 10 — Damasio
 11 — Piedade
 12 — Light

13 — Setubal
 14 — Coqueiros
 15 — São Roque
 16 — Caucaia
 17 — Volta
 18 — Jaraguá
 19 — Pelado
 20 — Itaquá
 21 — Marco B (B. Sto. Angelo)
 22 — Colégio
 23 — Marco A (B. Sto. Angelo)
 24 — Itaquera

25 — Virgílio
 26 — Capão Bonito
 27 — Martinelli
 28 — Morro Alto
 29 — Morro ads Formigas
 30 — Fazenda Candóca
 31 — Taquaral
 32 — Morro Alegre
 33 — Torre de Pilar
 34 — Serra do Ipanema
 35 — Serra dos Picapaus
 36 — Saboó



II

NIVELAMENTO DE PRECISÃO

POR

G. C. BIERRENBACH LIMA

E

ADHEMAR COLUCCI

II

NIVELAMENTO DE PRECISÃO

por

G. C. BIERRENBACH LIMA

II

ASSIMILAR GORRUCI

NIVELAMENTO DE PRECISÃO

Considerações Gerais

A organização dos trabalhos de nivelamento geométrico de precisão, em uma vasta região como, por exemplo, o Estado de São Paulo, necessariamente exige um plano preliminar da distribuição dos perímetros principais e secundários, aproveitando-se para os primeiros as melhores rodovias e deixando para os últimos as estradas secundárias.

O ponto de partida, também denominado ponto fundamental, deve ser uma referência de nível (RN) relacionada com o nível médio do mar.

Esse nível médio do mar somente é possível ser conseguido por meio de observações sistemáticas, durante largo período de tempo, empregando-se para isso instrumentos apropriados, registradores, denominados maregrafos.

Os maregrafos são instalados nos portos, em locais abrigados de correntes marítimas de movimentos anormais.

Esses aparelhos trabalham subordinados ao movimento de relojoaria, para manter em rotação um cilindro sobre o qual se adapta uma folha de papel com graduação correspondente as horas e minutos; a pena registradora está ligada a um dispositivo que recebe os movimentos de uma pequena boia que acompanha os movimentos ascendentes e descendentes da água, no local, registrando a respectiva altitude, em qualquer movimento.

Pelo estudo de gráficos conseguidos com auxílio dos maregrafos obtem-se os valores máximos e mínimos das flutuações marítimas, em período de 24 horas.

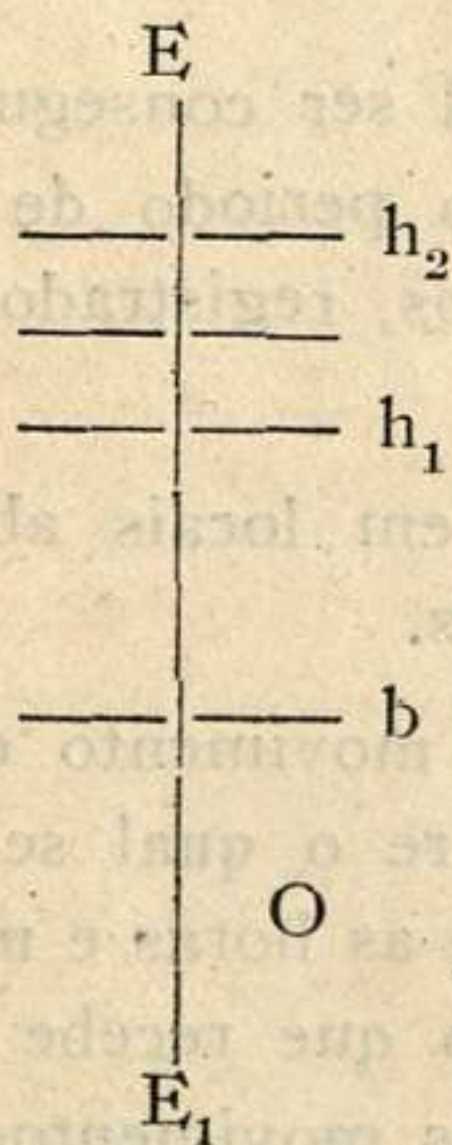
A instalação de um maregrafo exige o conhecimento das variações máximas e mínimas da altura das águas, no ponto escolhido.

Ao limite máximo da **maré montante** denominam **preamar**; ao limite mínimo da maré vasante dão o nome de **baixamar**.

Entre duas marés, uma montante e outra vasante, há um periodo de estacionamento ou equilíbrio.

Por convenção estabeleceu-se que a hora de pleno már é o momento intermediário entre aquele quando o mar deixa de subir e o em que começa descer. Para a hora de baixamar é justamente o inverso.

Para se estabelecer um posto de observações das marés, instala-se uma escala vertical graduada em metros e centímetros, em local onde as águas do mar entrem com facilidade, tendo-se o cuidado de que o zero, dessa escala, fique em ponto inferior ao de maré vasante mínima ou baixamar. Seja EE' essa escala e O o zero do mesma. Suponha-se que em duas marés montantes máximas, sucessivas, marcamos na escala os pontos h_1 e h_2 ; e que a maré mínima intermediária entre as anteriores foi marcada no ponto b .



A maré total será:

$$\frac{1}{2} (h_1 + h_2) - b$$

Retardamento das marés

As horas de preamar e baixamar chamam-se horas das marés. Este fenômeno não se dá em momentos exatos, em um periodo de tempo

de 24 horas. A hora de cada maré sofre sempre um retardamento de, aproximadamente, 25 minutos, sobre a precedente, por isso, no periodo de 24 horas, isto é, de um dia para outro nota-se um retardamento de 50 minutos por se darem, durante ele, duas marés, uma pela tarde e outra pela manhã.

Se observarmos a passagem da Lua no meridiano local, notaremos que essa passagem também está subordinada a um retardamento idêntico, havendo, por essa razão, uma interessante analogia entre os movimentos da Lua e os fenômenos das marés.

De outro lado as marés são muito mais fortes quando a Lua se aproxima das sizigias dos equinoxios.

As marés são mais fracas quando se dá o que se denomina quadratura vizinha dos solstícios.

A atração que esses corpos celestes exercem sobre o elemento líquido do nosso planeta não se faz sentir de um modo rápido, ela se nota somente 36 horas, mais ou menos, depois das sizigias, em cada lunação.

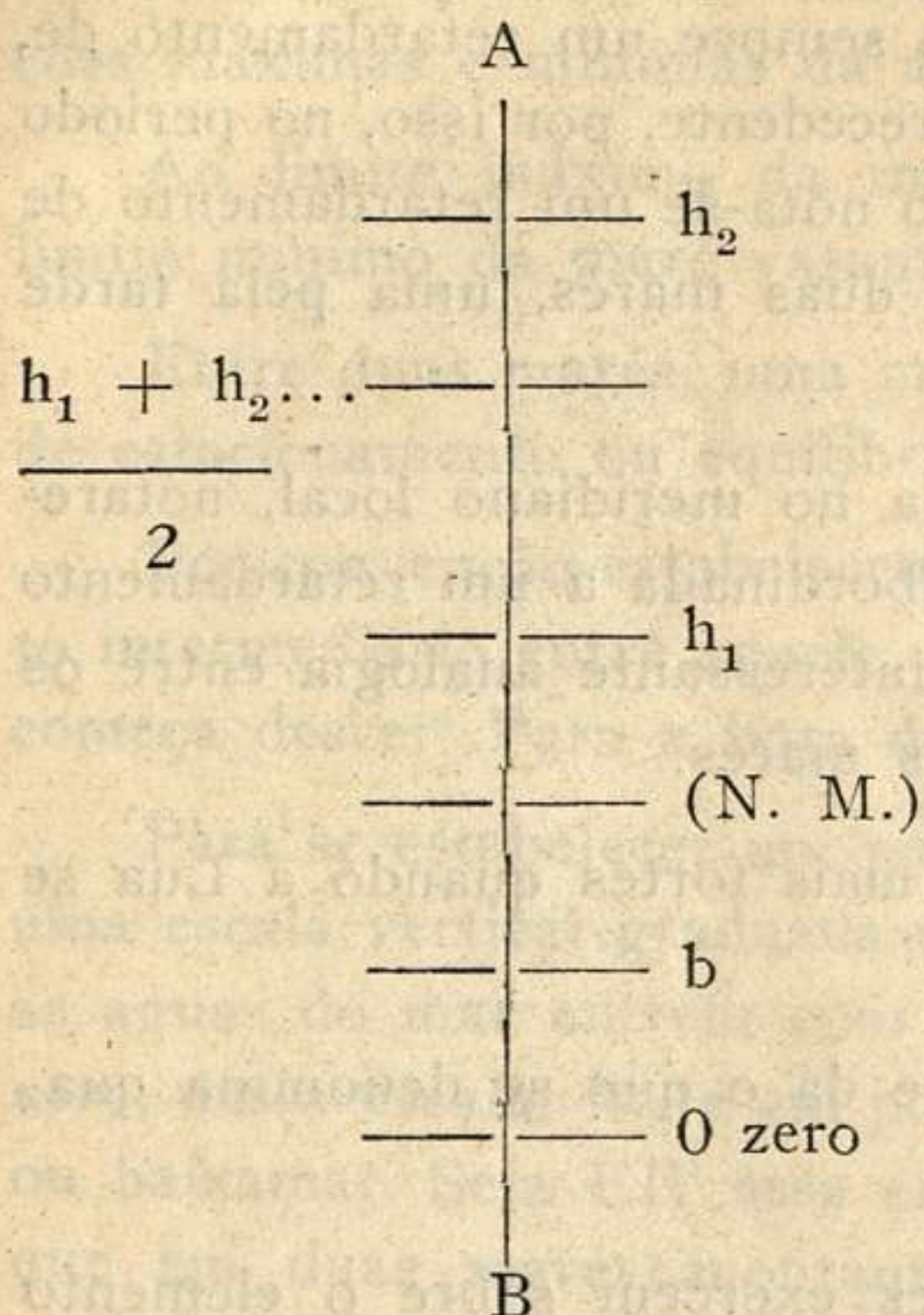
E' evidente que a atração referida é mais sensível nos grandes oceanos, nos quais as profundidades são maiores.

NIVEL MEDIO DO MAR

A fixação do nivel médio do mar como plano de referência para os trabalhos de nivelamentos na superficie do nosso planeta tem apoio nos trabalhos de Laplace.

Foi ele quem relacionou as elevações das marés ao nivel de equilibrio que teriam as aguas marítimas se as marés não existissem e se a pressão atmosférica conservasse sempre o valor médio.

Para conseguir determinar o nivel médio do mar, quando não se tenha instalado um maregrafo, usa-se uma escala de marés e sobre ela marea-se o ponto que corresponde a metade de uma maré total, observada quando a pressão barométrica é 760 mm.



Seja A B a escala de maré, graduada como já dissemos em metros centímetros, instalada verticalmente em um porto.

Os pontos h_1 e h_2 são as leituras de duas marés montantes sucessivas, acima do ponto zero da escala; b é o ponto de baixamar.

A maré total é $= 1/2 (h_1 + h_2 - 2b)$.

A metade desse valor dará o valor da altura do nível médio do mar relativamente a zero da escala (N. M.) uma vez somado à altura b .

Temos, então $1/4 (h_1 + h_2 - 2b)$ que adicionado a b , nível da baixa mar, nos dará N. M.

As alturas h_1 , h_2 e b devem ser relacionadas com a pressão atmosférica, do seguinte modo:

Suponhamos que B_1 , B_2 e B_0 designam as pressões barométricas nos momentos em que foram marcadas as alturas h_1 , h_2 e b . Como a maré observada é tanto mais fraca quanto mais alta estiver a coluna barométrica, deve-se a h_1 , por exemplo, aplicar a correção devida a Daussy...

$$+ 14.7 (B_1 - 760 \text{ mm}).$$

Portanto denominando-se Z_1 , Z_2 , Z_0 os excessos positivos ou negativos das alturas barométricas observadas relativamente a 760 mm, por ocasião das experiências, ter-se-á

$$N M = 1/4 (h_1 + h_2 - 2b) + 1/4 (Z_1 + Z_2 - 2Z_0) 14,7.$$

É necessário levar em consideração os sinais de Z_1 , Z_2 e Z_0 . Também se b , ponto da baixamar, estivesse abaixo de zero da escala, necessá-

rio seria fazer entrar esta leitura negativa com seu respectivo sinal, na fórmula.

Para se fixar um nível médio dos mares é necessária uma longa série de observações. Por essa razão empregam-se os maregrafos com ótimos resultados.

Esse nível médio não é constituído pela altura da meia amplitude entre a preamar e a baixa mar, como parece a primeira vista, existindo varias fórmulas para o seu cálculo.

A que citamos, acima, incluye as pressões barométricas o que nos faz colocá-la em primeiro lugar; a fórmula de Bauquet de la Crye é:

$$NM = 1/16 [h_0 + 4 (H_1 + h_1) + 3 (H_0 + h_2) + H_2]$$

H_0, H_1, H_2 alturas de três preamar consecutivas h_0 altura da baixamar que precede a primeira preamar H_0 ; h_1, h_2 alturas das duas baixamar seguintes. A seguinte fórmula:

$$N M = 1/16 [h_0 + 4 (H_1 + h_1) + 3 (H_0 + h_1) + H_2] + \\ + 1/4 (Z_1 + Z_2 - 2 Z_0) 14.7$$

que é a combinação da II com a primeira deve ser preferida por se adaptar à II as pressões atmosféricas dos momentos de observações.

Estabelecido o nível médio do mar, nas visinhanças da escala de marés ou do maregrafo, em terreno firme, preferivelmente sobre rocha, assenta-se um RN cuja altitude deve ser determinada com relação ao NM da escala; esse RN fica sendo o ponto de referência fundamental de nível para todos os trabalhos de nivelamento que se realizem na região.

NIVELAMENTO

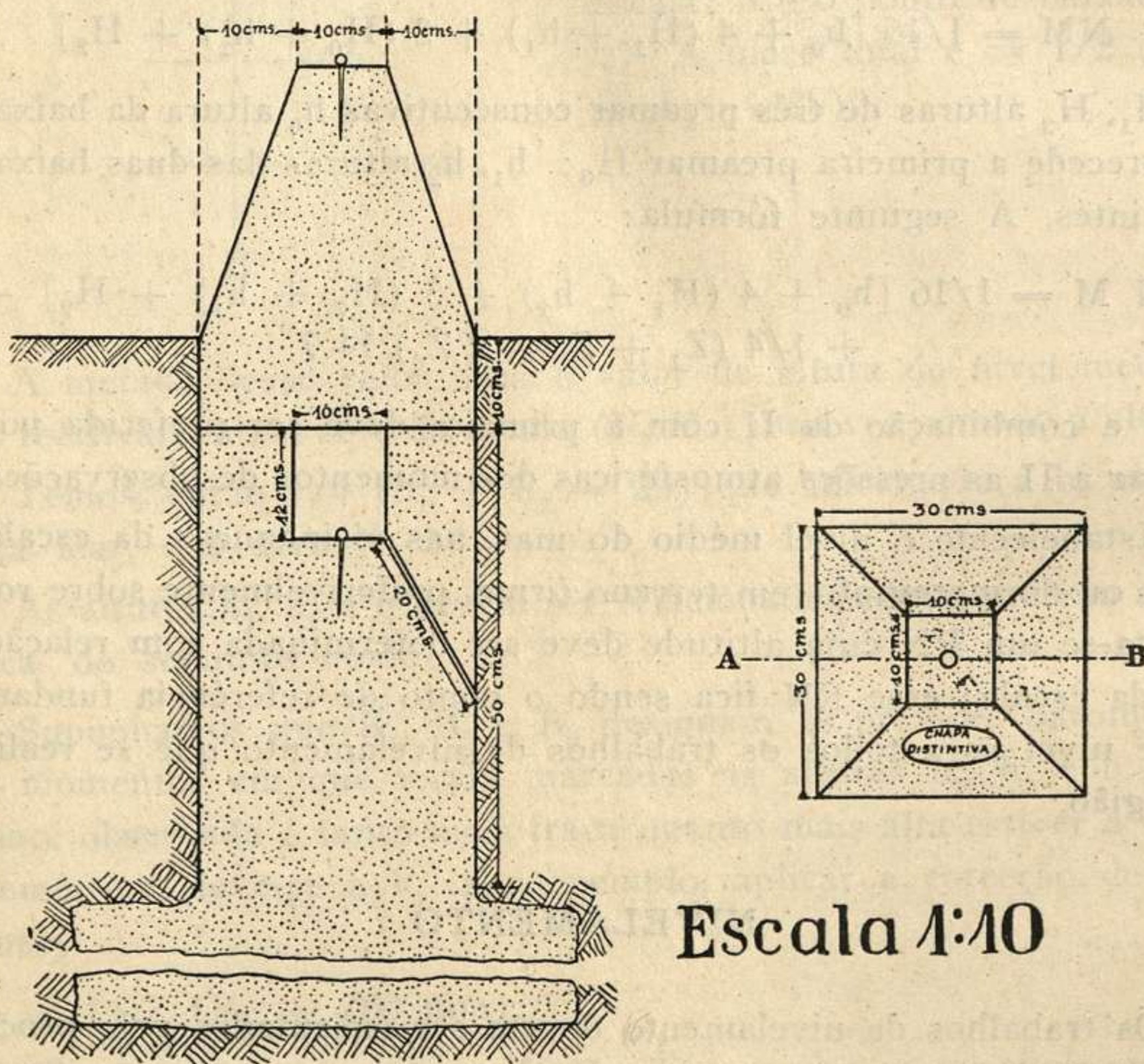
Os trabalhos de nivelamento devem ser executados pelo processo de fechamento de perimetros, visando-se uma compensação final de todo o serviço; para isso estuda-se uma rede dos perimetros, de tal modo disposta, que os caminhamentos sejam feitos pelas melhores rodovias.

Aquí, no Estado de S. Paulo, como a Diretoria de Estradas de Rodagem mandou colocar marcos definitivos de 5 em 5 Km, ao longo

das principais rodovias, constituindo esses marcos ótimas referências para os RNs do Institutos, estabeleceu-se, logo de início, que nas proximidades desses marcos principais da quilometragem das estradas, deveriam ficar localizados os nossos RNs.

Esses pontos de referência de nível são construídos em concreto de dosagem 1:3:6, tendo as dimensões e características constantes da gravura abaixo.

RN (Referencia de nivel)

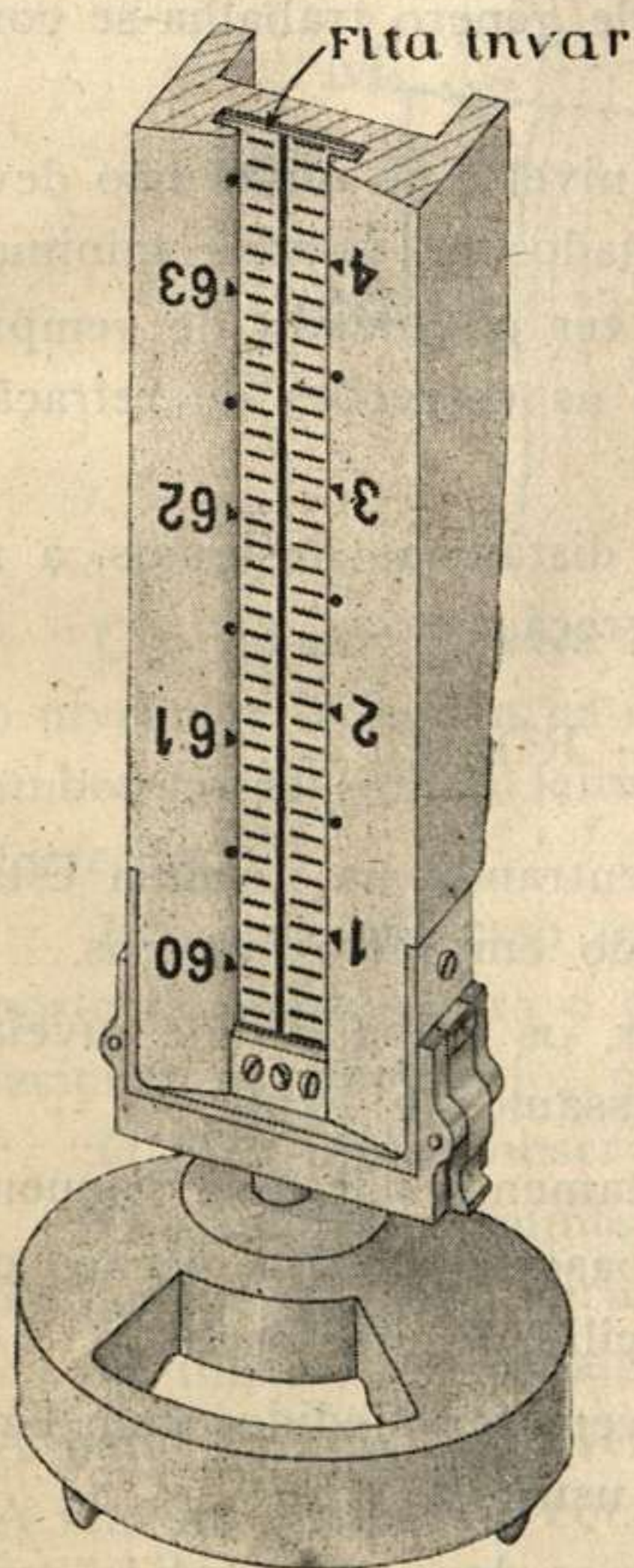


O tipo de nível empregado nos trabalhos de nivelamento de precisão é o Zeiss — A; com dispositivo de placa plano-paralela.

Com esse aperfeiçoamento, introduzido nos níveis de alta precisão, evitam-se as leituras por estimativa quando a imagem do retículo cai sobre a mira no espaço compreendido pelos limites de 1/2 centímetros.

O dispositivo da placa plano-paralela está adaptado um tambor micrométrico cuja divisão é em 100 partes para uma rotação completa; qualquer movimento que se faça com o tambor, este se transmite a placa plano-paralela colocada na frente da objetiva, deslocando a linha de colimação paralelamente a sua posição se as faces da placa estiverem perfeitamente perpendiculares ao eixo ótico da luneta.

Com esse deslocamento da linha de colimação, consegue-se a coincidência desta com o traço divisor do centímetro inteiro ou meio centímetro, imediatamente inferior a posição da pontaria sobre a mira; desse modo o pequeno tambor, do dispositivo referido, registra na sua divisão o deslocamento da linha de colimação e cada divisão do tambor corresponde à centesima parte de 5 mm., isto porque as miras "invar" são graduadas de 5 em 5 mm.



A graduação do tambor para cada divisão corresponde $1/20$ do milímetro, por isso, juntando-se a leitura sobre a mira àquela do tambor e dividindo-se por 20 tem-se a leitura em metro e fração do metro.

$$\text{mira } 43,8 + 425 = 43.8425$$

$$\frac{43.8425}{20} = 2,1921 \text{ m.}$$

Sendo 425 a leitura do tambor micrométrico.

As miras de precisão são construídas em madeira cuja seção está indicada na fig. 2.

A fita invar é presa somente nos extremos do estojo de madeira por um dispositivo que permite mantê-la estirada.

As divisões da mira são feitas de 5 em 5 cm. sobre o estojo de madeira e,

na fita invar a divisão é feita de 1/2 em 1/2 cm., desse modo, feita a coincidência de um traço da fita está retificada a mira.

E' interessante o dispositivo arranjado para a graduação sobre duas numerações, uma à direita e outra à esquerda da fita invar; procedendo-se às duas leituras e somando-se as mesmas obtem-se uma constante que permite controlar as leituras; por isso a leitura da direita dá a altitude da linha de colimação do nível e a da esquerda fornece o elemento de controle.

As miras invar trabalham apoiadas em uma chapa suporte que é fixada sobre o terreno por meio de três pontas de aço. No centro dessa chapa, na parte superior, existe um pino para o assentamento da mira.

O modo de operar com o nível e mira de precisão é um pouco diferente do empregado nos nivelamentos comuns.

Para se executar um nivelamento daquele gênero trabalha-se com duas miras, uma a ré e outra a avante.

Em terrenos planos a distância entre o nível e as miras não deve ser excedida de 50 m; em terrenos acidentados as visadas minimas devem ser maiores de 10 metros. Deve-se ter o cuidado de sempre trabalhar com distâncias iguais para evitar as correções de refração e curvatura da terra.

Nos casos, porem, de ser preciso usar distâncias desiguais, a ré e a avante, é necessário empregar uma correção:

$$C = 0,000000132 (V^2 - R^2),$$

sendo V a leitura de vante e R a de ré; entrando na fórmula estas leituras em metros e obtendo-se o resultado em meios metros.

Nas travessias de rios e braços de mar, os trabalhos de nivelamento requerem certas precauções que passamos a expôr.

A distância a transpôr é medida indiretamente por uma pequena triangulação local, para isso mede-se uma base com trena de aço ou fio invar (caso se disponha deste), com facilidade, no local.

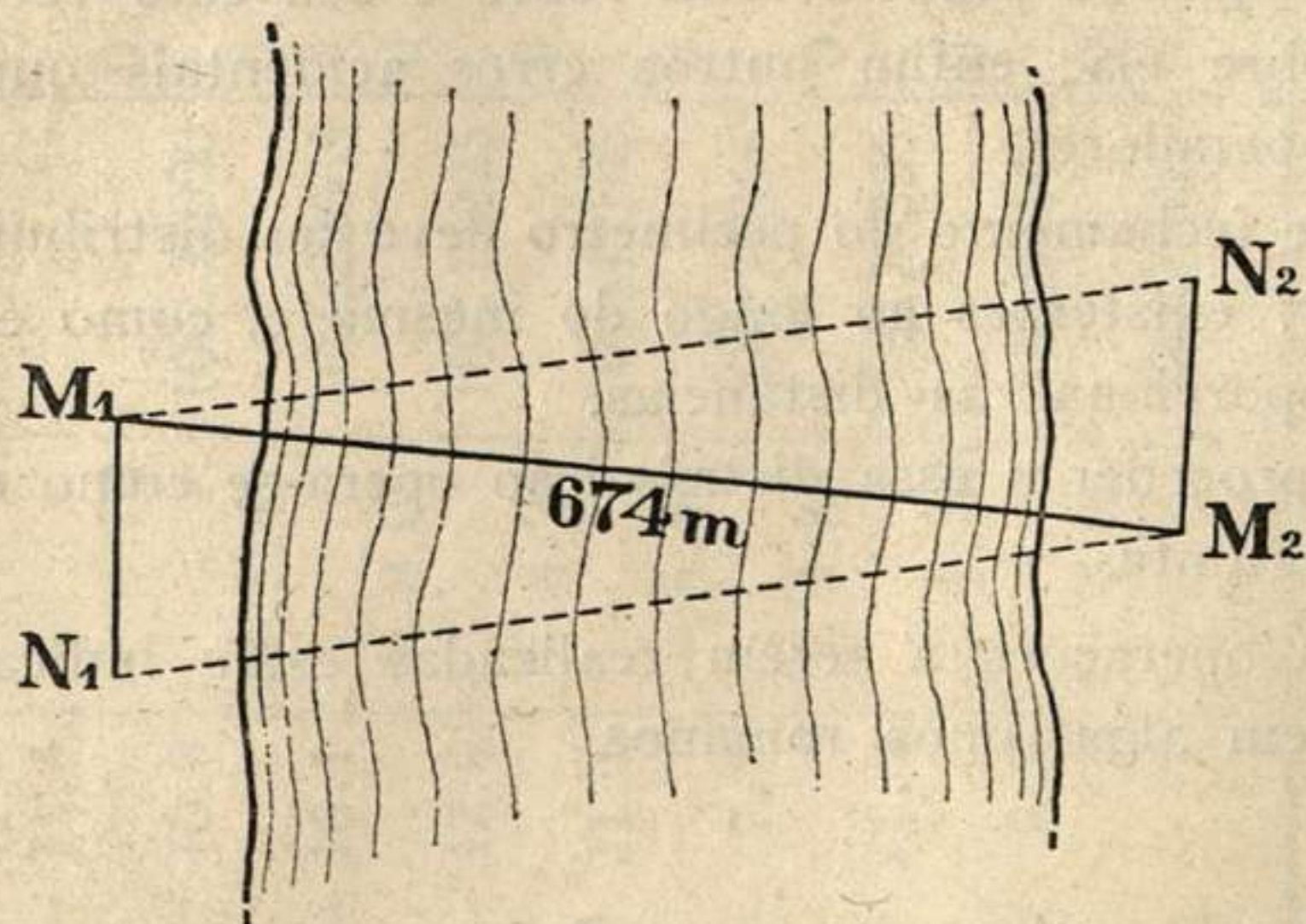
Os ângulos dos triângulos formados devem ser medidos com bastante cuidado e compensados pelos meios usuais.

Em cada margem do rio ou braço de mar deve ser medida uma

normal de 20 metros a linha de travessia, formando-se, desse modo, um retângulo cuja diagonal é a própria linha de travessia.

Dois operadores, com dois níveis, devem trabalhar conjuntamente em observações recíprocas, um em cada extremo do retângulo.

As miras são munidas de alvos corrediços adaptados de modo tal que com um parafuso de chamada possa-se ajustar o alvo na altura da linha de colimação do nível; esses alvos são pintados de branco e preto, alternadamente em quatro quadrantes para facilitar a visada. Eles tem as dimensões de 25 x 20 cm. com uma frêsta de 4 x 1 cm, bem no centro.



O nivelador N_1 visa a mira M_1 e depois a mira M_2 , do mesmo modo o nivelador N_2 opéra na outra margem, visa a mira M_2 e depois a M_1 ; ambos procedendo a leitura da bolha para que se possa fazer a devida correção.

Por esse processo conseguiu-se passar o nivelamento do cais do porto de Santos para o da Ilha do Barnabé com o objetivo de se relacionar os maregrafos que a Cia. Docas de Santos alí possui.

O erro médio observado nessa transposição foi de ± 5 mm.

O exemplo seguinte mostra como se deve compensar os erros de fechamento dos perimetros de nivelamento.

O início dos trabalhos teve lugar em um RN (A). Seguido de A para B e contra nivelou-se de B para A; por essa razão o ponto A tem na I coluna a cota de partida e na II coluna a cota de chegada ao terminar o contra-nivelamento.

Partindo de B com a cota da I coluna o nivelamento foi feito até C e contra-nivelou-se de C para B, por isso, B tem uma segunda cota que está registrada na II coluna.

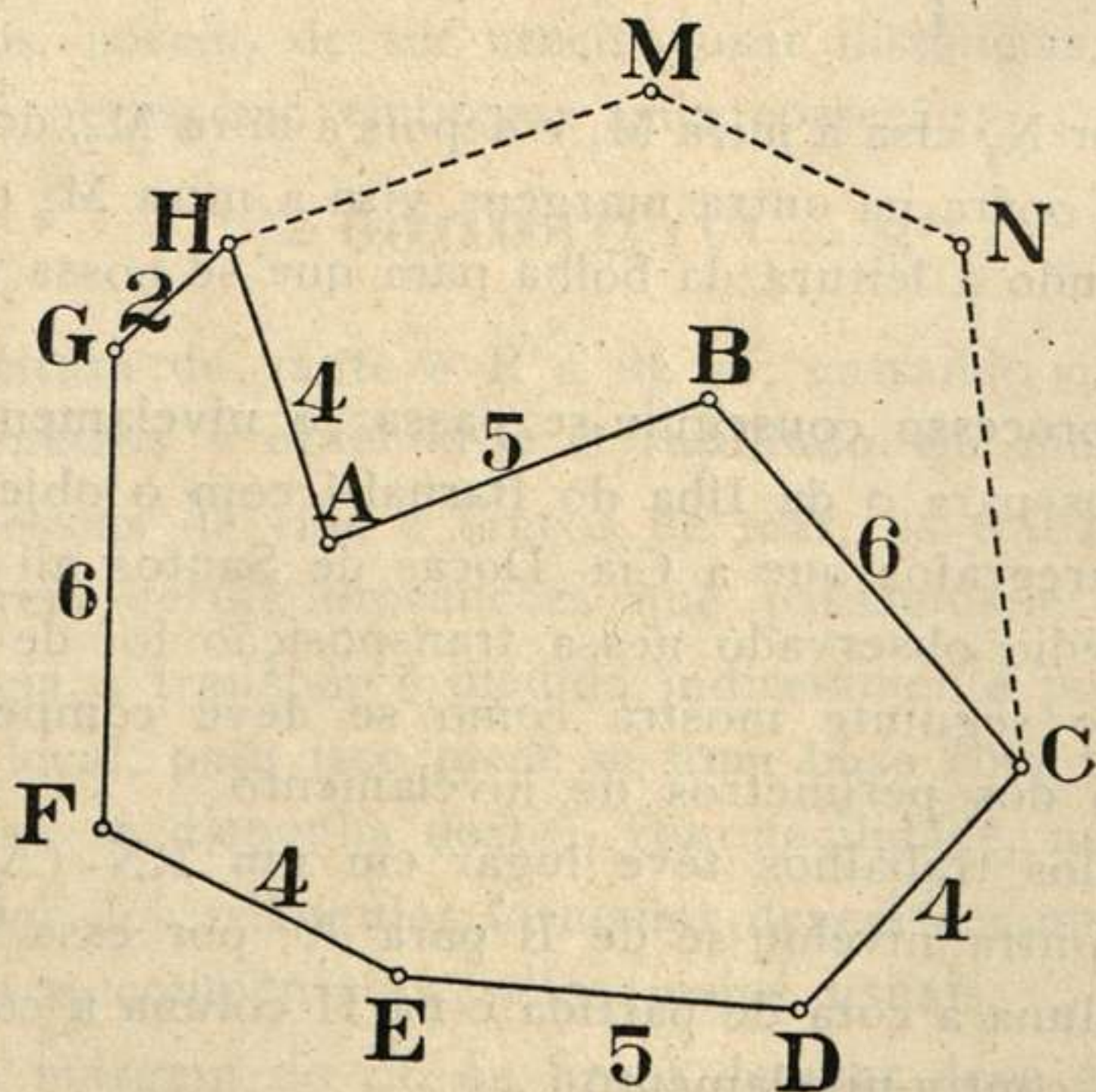
De C para D nivelou-se e contra-nivelou-se tendo C duas cotas como se vê nas colunas I e II, assim sucessivamente, passando pelos pontos E. F. G. H. até voltar ao ponto A.

Fechando o perimetro verifica-se, logo, que a cota de chegada não é igual a de partida, pois sobre aquela estão acumulados os erros devido as causas que são inevitáveis como refração, abaixamento da mira por causa do natural assentamento da sapata motivada pela rotação da própria mira sobre o seu eixo vertical, quando repousada sobre ela; enfim outros erros acidentais que escapam a pericia dos operadores.

O erro de fechamento do perimetro deve ser distribuido em todos os pontos RN existentes ao longo do mesmo e, como é natural, ele deve ser proporcional às distâncias.

Para se proceder a essa distribuição opera-se como está indicado no quadro seguinte.

Todas as operações a serem realizadas estão indicadas no próprio quadro em algarismos romanos.



	I Nivelat.º	II C. Nivel.º	III Dist.	IV Discrep.	V ½ Disc	IV I + V Alt. prov.	VII Coef.	VIII Cor. parciais	IX Cor. Adicio.	X VI + IX Alt.Reais
A (RN)	100.4500	100.4614	Km. 5.0	— 11.4	+ 5.70		0.139	0.0147		100.4500
B	104.3652	104.3541	6.0	+ 10.9	— 5.45	104.37090	0.166	0.0176	0.0147	104.3856
C	109.2321	109.2482	4.0	— 16.1	+ 8.05	109.22665	0.111	0.0117	0.0323	109.2589
D	107.1042	107.1121	5.0	— 17.9	+ 8.95	107.11225	0.139	0.0147	0.0440	107.1562
E	101.4321	101.4210	4.0	+ 11.1	— 5.55	101.44105	0.111	0.0117	0.0587	101.4997
F	98.3641	98.3718	6.0	— 7.7	+ 3.85	98.35855	0.166	0.0176	0.0704	98.4289
G	95.7814	95.7700	2.0	+ 11.4	— 5.70	95.78525	0.056	0.0059	0.0880	95.8732
H	98.3501	98.3402	4.0	+ 9.9	— 4.95	98.34440	0.112	0.0118	0.0939	98.44388
A (RN)	100.3491		— 36.0			100.34415	— 1.000		0.1058	100.4499

(R N) A — 100.45000
 Erro — 0.10585

Coef. da VII = Distância parcelada

Distância total

Corr da VIII = Coeficiente VII × erro

Uma vez distribuído o erro de fechamento as cotas são consideradas ajustadas e sobre os pontos assim corretos podem ser apoiadas novas linhas constituindo outros perímetros.

No caso do exemplo dado, acima, a nova linha partiu de H e ligou-se em C; as cotas de H e C são consideradas ajustadas e, como é natural, ao chegar o nivelamento em C haverá um erro devido às causas já mencionadas. Esse erro deverá ser distribuído somente na linha H, M, N, C.

Sucessivamente, por esse processo, vão se agregando os perímetros até conclusão final da rede geral, somente depois desta concluída é que se poderá realizar a compensação geral pelo processo dos mínimos quadrados.

Damos, na última parte deste trabalho uma relação dos RNs do Instituto Geográfico e Geológico, de acordo com os trabalhos de nivelamento de precisão executados pelo engenheiro Adhemar Colucci.

Correção ortométrica

Devido a falta de paralelismo das superfícies equipotenciais terrestre o resultado de um nivelamento de precisão de um perímetro fechado, apresenta, abstraindo-se dos erros de observação, um erro devido ao defeito acima citado, principalmente nos polígonos que atravessam zonas muito acidentadas.

A expressão dada pelo prof. Giovanni Cicconetti — da R. Università di Roma, para a correção ortométrica entre dois pontos A e B é definida pela segunda integral abaixo:

$$H_B = H_A + \int_L dH - 2\beta \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} H \sin 2\varphi d\varphi$$

na qual $\beta = 0.002665$, sendo H em metros. Em milímetros, teremos $\beta = 2.665$.

Esta correção é proporcional à altura da estação e subordinada às latitudes dos pontos. Será nula nos polos e no equador, adquirindo seu máximo valor na latitude $\varphi = 45^\circ$. Será, também, negativa quando o acréscimo da latitude for positivo e, como é natural, positiva em caso contrário.

A fórmula geral é

$$\delta_{AB} = 2\beta \frac{H_A + H_B}{2} \operatorname{sen} (\varphi_A + \varphi_B) (\varphi_B - \varphi_A) \text{ "arc 1"}$$

sendo δ_{AB} em mm e H em metros.

$$\delta_{AB} = 2.665 (H_A + H_B) \operatorname{sen} (\varphi_A + \varphi_B) (\varphi_B + \varphi_A) \text{ "arc 1"}$$

sendo o resultado em mm, devendo-se notar que o sinal $(\varphi_B - \varphi_A)$ é negativo se o caminhamento segue no sentido das latitudes crescentes.

Esta correção é, como dissemos, bastante sensível nos terrenos muito acidentados, sendo desprezível nos perímetros em zonas sem grandes acidentes.

O Instituto Geográfico e Geológico do Estado já deu início ao seu trabalho de nivelamento de precisão, tendo tomado como RN fundamental aquele instalado pela Companhia Docas de Santos, no passeio do predio da Alfandega (lado do mar), na cidade de Santos.

A altitude desse RN está relacionada com vários maregrafos que a Companhia tem instalado no porto, sendo a sua cota 3,065 ms. acima do nível médio ali observado durante um longo espaço de tempo.

NIVELAMENTO DE PRECISÃO

EXECUTADO

pelo

Eng.º Adhemar Colucci

RELAÇÃO DAS ALTITUDES

1 — LINHA: SANTOS — PERUIBE

DENOMINAÇÕES	ALTITUDES
	Metros
RN O G (ALFANDEGA)	3,0650
RN 1 G (Est. E.F.S. Santos)- P. B.	2,87
RN 1 G (Est. E.F.S. Santos) P. C.	3,41
RN 2 G (Est. São Vicente) P. B.	5,81
RN 2 G (Est. São Vicente) P. C.	6,34
RN Aux. G (Est. S. Vicente) P. B.	6,30
RN Aux. G (Est. S. Vicente) P. C.	6,82
RN D.E.R. (Ponte pencil)	5,36
RN 3 G Boqueirão (Praia Grande) P. B.	3,44
RN 3 G Boqueirão (Praia Grande) P. C.	3,98
RN Aux. G Vila Ostende (Praia Grande)	3,59
RN 4 G (Km. 30,5) (Est. V. Balnearia) P. B.	5,02
RN 4 G (Km. 30.5) (Est. V. Balnearia) P. C.	5,54
RN 5 G (Km. 38.0) Est. Praia Grande P. B.	3,17
RN 5 G (Km. 38.0) Est. Praia Grande P. C.	3,67
RN 23 P (Km. 38.1)	2,45
RN 24 P (Km. 40)	2,80
RN 25 P (Km. 41) Est. V. Atlantica	3,75
RN 26 P (Km. 43)	3,72
RN 27 P (Km. 45)	4,26
RN 28 P (Km. 47)	3,95
RN 29 P (Km. 48.6)	4,37
RN 30 P (Km. 50.5) Est. Verde Mar	5,12
RN 31 P (Km. 52)	5,55

RN 32 P (Km. 53.6)	Est. Suarão	6,19
RN 33 P (Km. 55.5)		6,05
RN 34 P (Km. 57.6)	Est. Itanhaen	3,84
RN 6 G (Km. 57.6)	Est. Itanhaen P. B.	6,02
RN 6 G (Km. 57.6)	Est. Itanhaen P. C.	6,53
RN 35 P (Km. 59.6)		3,70
RN 36 P (Km. 61.5)		2,87
RN 37 P (Km. 63.5)	Est. Camburiú	3,85
RN 38 P (Km. 65.5)		5,52
RN 39 P (Km. 67.5)		7,47
RN 40 P (Km. 69.5)		9,26
RN 41 P (Km. 71.1)		8,94
RN 42 P (Km. 73.1)		7,42
RN 43 P (Km. 75)		9,62
RN 44 P (Km. 77)		9,49
RN 45 P (Km. 78,9)		9,79
RN 46 P (Km. 81)		8,58
RN 47 P (Km. 82.8)		7,79
RN 48 P (Km. 84.9)	Est. Peruibe	5,87

N. B. — RNG referência de nível do I.G.G.

RNP referência de nível da P.P.I.C.

2 — LINHA: PERUIBE-JUQUIÁ

DENOMINAÇÕES	ALTITUDES
	Metros
RN 48 P (Km. 84.9) Est. Peruibe	5,87
RN 49 P (Km. 87)	6,24
RN 50 P (Km. 89)	3,52
RN 51 P (Km. 90)	5,14
RN 52 P (Km. 91.8) Est. Ana Dias	10,61
RN 53 P (Km. 93.5)	15,14
RN 54 P (Km. 95)	20,61
RN 55 P (Km. 96.6)	35,31
RN 56 P (Km. 97.7)	52,41
RN 57 P (Km. 98.9) Est. Raposo Tavares	63,37

RN 58 P (Km. 101)	55,27
RN 59 P (Km. 103) Est. Itariri	54,23
RN 60 P (Km. 105)	53,01
RN 61 P (Km. 107)	46,99
RN 62 P (Km. 108)	46,84
RN 63 P (Km. 109.3) Est. Pedro Toledo	45,16
RN 7 G Est. Pedro Toledo P. B.	45,55
RN 7 G Est. Pedro Toledo P. C.	46,06
RN 64 P (Km. 111.4)	47,62
RN 65 P (Km. 113.1) Parada P. Anchieta	39,91
RN 66 P (Km. 115)	40,63
RN 67 P (Km. 116.6) Est. Iberá	37,67
RN 68 P (Km. 118)	36,59
RN 70 P (Km. 121.1)	34,98
RN 71 P (Km. 123)	32,86
RN 72 P (Km. 125)	31,19
RN 73 P (Km. 127)	30,71
RN 74 P (Km. 128.9)	32,30
RN 75 P (Km. 130.7) Est. Pedro Barros	28,51
RN 76 P (Km. 132.5)	28,27
RN 77 P (Km. 134.5) Jaraçatiá	28,91
RN 79 P (Km. 138)	37,27
RN 8 G (Km. 141.2) Est. Prainha P. B.	27,13
RN 8 G (Km. 141.2) Est. Prainha P. C.	27,63
RN 81 P (Km. 141.2)	26,77
RN 82 P (Km. 143)	33,54
RN 83 P (Km. 145)	37,14
RN 84 (Km. 147) Est. Biguá	24,62
RN 86 P (Km. 150)	31,86
RN 87 P (Km. 152) Est. Serrinha	42,75
RN 89 P (Km. 155) Est. Cedro	32,13
RN 91 P (Km. 159)	17,78
RN 9 G (Km. 161.1) Est. Juquiá P. B.	17,76
RN 9 G (Km. 161.1) Est. Juquiá P. C.	18,26

N. B. — RNG referência de nível do I.G.G.

RNP referência de nível da P.P.I.C.

3 — LINHA: JUQUIA'-PIEDADE

DENOMINAÇÕES	ALTITUDES	
	Infelior Metros	Superior Metros
RN 9 G (Est. de Juquiá)	17,76	18,26
RN (Km. 197)	34,49	34,99
RN (Km. 195)	32,32	32,83
RN (Km. 190)	25,57	26,13
RN (Km. 185)	24,63	25,15
RN (Km. 180) Capela do Porto	27,27	27,78
RN (Km. 175)	41,91	42,41
RN (Km. 170)	52,50	53,04
RN (Km. 165)	191,67	192,23
RN (Km. 160)	419,97	420,47
RN (Km. 155)	448,36	448,87
RN (Km. 150)	697,51	698,00
RN (Km. 145)	755,15	775,65
RN (Km. 140) Patrimonio S. Catarina	891,45	891,96
RN (Km. 135)	868,35	868,84
RN (Km. 130)	831,45	831,95
RN (Km. 125)	953,29	953,79
RN (Km. 120)	1027,82	1028,33
RN (Km. 115)	961,88	962,38
RN (Km. 110)	1083,11	1083,66
RN (Km. 105)	945,87	946,43
RN (Km. 104) Encruzilhada	979,34	979,84
RN (Km. 100)	857,73	858,23
RN (Km. 98,5) Piedade	780,69	781,19

4 — LINHA: PIEDADE-CAPITAL

DENOMINAÇÕES	ALTITUDES	
	Inferior Metros	Superior Metros
RN (Km. 98.5) Piedade	780,69	781,19
RN (Km. 95)	881,61	882,11

RN (Km. 90)	900,97	901,47
RN (Km. 85)	862,74	863,24
RN (Km. 80)	869,78	870,27
RN (Km. 75)	849,55	850,06
RN (Km. 71,5) Una	860,12	860,62
RN (Km. 70)	848,87	849,36
RN (Km. 65)	891,71	892,21
RN (Km. 60)	853,18	853,68
RN (Km. 55)	869,59	870,08
RN (Km. 50)	867,92	868,41
RN (Km. 45) Vargem Grande	877,65	878,13
RN (Km. 40)	911,99	912,50
RN (Km. 34,5) Cotia	853,03	853,54
RN (Km. 30)	803,20	803,69
RN (Km. 25)	816,44	816,93
RN (Km. 20)	798,83	799,31
RN (Km. 15)	788,61	789,10
RN (Km. 10)	756,49	756,99
RN 6 (Rua Vital Brasil)	723,00	
RN 5 (Rua Vital Brasil)	725,18	725,68
RN 4 (Rua Iguatemy)	724,02	
RN 3 (Rua Afonso Braz)	737,24	
RN 2 (Rua Afonso Braz)	747,97	
PIQ. 5 (Rua Sena Madureira)	802,07	
RN 1 (Estr. do Vergueiro)	738,68	
RN 0 (Museu do Ipiranga)	773,23	
RN (Museu do Ipiranga) A. M.	773,30	

5 — LINHA: PIEDADE-SOROCABA

DENOMINAÇÕES

ALTITUDES

	Inferior	Superior
	Metros	Metros
RN (Km. 98.5) Piedade	780,69	781,19
RN (Km. 100)	847,45	847,93
RN (Km. 105)	777,38	777,88
RN (Km. 110)	720,50	720,99

RN (Km. 115)	770,46	770,95
RN (Km. 120)	648,54	649,02
RN (Km. 125)	554,75	555,23
RN (Km. 130) Sorocaba	565,19	565,67
RN (Km. 100)	565,97	566,46
RN (Km.97.650) Encruzilhada	555,74	556,24

6 — LINHA: SOROCABA-VARGEM GRANDE

DENOMINAÇÕES	ALTITUDES	
	Inferior Metros	Superior Metros
RN (Km. 97.650) Encruzilhada	555,74	556,24
RN (Km. 95)	617,66	618,21
RN (Km. 90)	616,53	617,08
RN (Km. 85)	683,04	683,60
RN (Km. 80)	721,99	722,99
RN (Km. 75)	773,49	773,99
RN (Km. 70)	797,99	798,48
RN (Km. 65)	789,34	789,84
RN (Km.62) São Roque	771,32	771,86
RN (Km.60)	801,10	801,63
RN (Km. 55)	912,02	912,56
RN (Km. 50)	1000,07	1000,62
RN (Km. 45) Vargem Grande	877,68	878,17

1 — LINHA: SANTOS-PERUIBE

E R R O S

RNs		mm.	COMPRIMENTOS
		+	—
RN 0 G	— RN 1 G	0,88	3829
RN 1 G	— RN 2 G	0,77	6195
RN 2 G	— RN D.E.R.		0,77 2090

RN D.E.R. — RN 3 G		3,80	4869
RN 3 G — RN Aux. G		6,65	9979
RN Aux. G — RN 4 G		0,80	6955
RN 4 G — RN 5 G		6,07	7654
RN 5 G — RN 24 P		3,00	2017
RN 24 P — RN 26 P		4,10	3010
RN 26 P — RN 27 P	1,37		2010
RN 27 P — RN 28 P	1,10		2000
RN 28 P — RN 29 P	3,57		1670
RN 29 P — RN 30 P		0,02	1830
RN 30 P — RN 31 P		0,75	1413
RN 31 P — RN 32 P		2,60	1620
RN 32 P — RN 33 P		4,07	1970
RN 33 P — RN 34 P		0,67	2095
RN 34 P — RN 35 P		1,87	1925
RN 35 P — RN 36 P	0,17		1896
RN 36 P — RN 37 P	0,92		2010
RN 37 P — RN 38 P	1,15		1980
RN 38 P — RN 39 P		0,77	2000
RN 39 P — RN 40 P	3,87		2003
RN 40 P — RN 41 P		2,80	1640
RN 41 P — RN 42 P		2,40	2000
RN 42 P — RN 43 P	0,67		1880
RN 43 P — RN 44 P	0,70		2000
RN 44 P — RN 45 P		1,10	1980
RN 45 P — RN 46 P		1,92	2060
RN 46 P — RN 47 P		2,67	1840
RN 47 P — RN 48 P		4,00	2040

Total: + 15,17 — 50,83 88460

Erro = — 35,66

Erro da média = $\pm$ 17,83

2 — LINHA: PERUIBE-JUQUIÁ

E R R O S

RNs				mm.	COMPRIMENTOS
				+	—
RN 48	P	—	RN 49 P	1,62	2085
RN 49	P	—	RN 50 P		4,60 2000
RN 50	P	—	RN 51 P	2,32	1007
RN 51	P	—	RN 52 P	2,07	1805
RN 52	P	—	RN 53 P		1,35 1771
RN 53	P	—	RN 54 P		0,02 1414
RN 54	P	—	RN 55 P	1,97	1690
RN 55	P	—	RN 56 P		0,42 1100
RN 56	P	—	RN 57 P		0,70 1165
RN 57	P	—	RN 58 P	1,67	2063
RN 58	P	—	RN 59 P		1,25 2085
RN 59	P	—	RN 60 P		2,00 1915
RN 60	P	—	RN 61 P		0,70 2000
RN 61	P	—	RN 62 P		2,97 1000
RN 62	P	—	RN 63 P		1,90 1308
RN 63	P	—	RN 64 P	0,80	2100
RN 64	P	—	RN 65 P	2,52	1780
RN 65	P	—	RN 66 P	2,42	1820
RN 66	P	—	RN 67 P	2,15	1600
RN 67	P	—	RN 68 P		0,95 1400
RN 68	P	—	RN 70 P		1,52 3160
RN 70	P	—	RN 71 P	1,00	1840
RN 71	P	—	RN 72 P	1,75	2000
RN 72	P	—	RN 73 P	0,95	2000
RN 73	P	—	RN 74 P		0,10 1977
RN 74	P	—	RN 75 P	0,12	1786
RN 75	P	—	RN 76 P	3,72	1762
RN 76	P	—	RN 79 P	5,07	5396
RN 79	P	—	RN 81 P		4,92 3610
RN 81	P	—	RN 82 P		0,37 1707
RN 82	P	—	RN 83 P	0,52	2000

RN 83 P — AN 84 P	1,15	2000
RN 84 P — RN 86 P	1,30	3000
RN 86 P — RN 87 P	2,85	2000
RN 87 P — RN 89 P	1,15	2996
RN 89 P — RN 91 P	4,35	4230
RN 91 P — RN 9 G	4,27	2055

Total	+ 44,59	— 24,92	76627
-------	---------	---------	-------

Erro = + 19,67

Erro da média = $\pm$ 9,83

3 — LINHA: JUQUIÁ-PIEDADE

E R R O S

RNs	mm.	COMPRIMENTOS
	+	—
RN 9 G — RN (Km. 197)	3,47	810
RN (Km. 197) — RN (Km. 195)		0,65 1930
RN (Km. 195) — RN (Km. 190)	3,20	5013
RN (Km. 190) — RN (Km. 185)	4,17	5074
RN (Km. 185) — RN (Km. 180)		0,97 4921
RN (Km. 180) — RN (Km. 175)	0,47	5138
RN (Km. 175) — RN (Km. 170)	0,42	4879
RN (Km. 170) — RN (Km. 165)	3,97	5057
RN (Km. 165) — RN (Km. 160)	3,95	4874
RN (Km. 160) — RN (Km. 155)	1,97	5065
RN (Km. 155) — RN (Km. 150)	7,60	4944
RN (Km. 150) — RN (Km. 145)	3,40	5009
RN (Km. 145) — RN (Km. 140)	1,85	4928
RN (Km. 140) — RN (Km. 135)	3,35	5011
RN (Km. 135) — RN (Km. 130)	4,45	4945
RN (Km. 130) — RN (Km. 125)	1,95	5078
RN (Km. 125) — RN (Km. 120)	1,95	4949
RN (Km. 120) — RN (Km. 115)	5,27	4962

RN (Km. 115) — RN (Km. 110)	6,80	5071
RN (Km. 110) — RN (Km. 105)	2,85	5082
RN (Km. 105) — RN (Km. 104)	2,45	994
RN (Km. 104) — RN (Km. 100)	0,35	4083
RN (Km. 100) — RN (Km. 98,5)	0,07	1533

Total: + 63,89 — 1,69 99350

Erro = + 62,20

Erro médio = $\pm$ 31,10

4 — LINHA: PIEDADE-CAPITAL

E R R O S

RNs.	mm. +	COMPRIMENTOS	
		—	
RN 98.5 — RN (Km. 95)		7,15	3518
RN (Km. 95) — RN (Km. 90)		0,17	5036
RN (Km. 90) — RN (Km. 85)	2,22		4980
RN (Km. 85) — RN (Km. 80)	3,82		5012
RN (Km. 80) — RN (Km. 75)	1,67		5015
RN (Km. 75) — RN (Km. 71.5)	1,50		3482
RN (Km. 71.5) — (PIQ. 5=0)	3,45		1665
PIQ. 5 = 0 — PIQ. 10 = 0		0,60	4892
PIQ. 10 = 0 — RN (Km. 60)		4,13	5068
RN (Km. 60) — P. 8 = 0 (Km. 55)	3,82		5206
P. 8 = 0 (Km. 55) — RN (Km. 50)		0,92	4919
RN (Km. 50) — RN (Km. 45)	2,05		4911 V.G.
RN (Km. 45) — RN (Km. 40)	0,60		4960
RN (Km. 40) — RN (Km. 34.5)	6,75		5537
RN (Km. 34.5) — RN (Km. 30)	3,35		4490
RN (Km. 30) — RN (Km. 25)	0,87		5287
RN (Km. 25) — RN (Km. 20)	5,77		5156
RN (Km. 20) — RN (Km. 15)		6,47	5055
RN (Km. 15) — RN (Km. 10)		3,80	5063

RN (Km. 10) — RN 6		0,27	982
RN 6 — RN 5		3,15	768
RN 5 — RN 4	2,77		3293
RN 4 — RN 3		0,60	2406
RN 3 — RN 2		0,65	1048
RN 2 — PIQ. 5		6,87	3191
PIQ. 5 — RN 1	3,30		1978
RN 1 — RN 0		0,42	1656
RN 0 — RN		0,00	34

Total: + 41,94 — 35,20 104608

Erro = + 6,74

Erro da média = $\pm$ 3,37

5 — LINHA: PIEDADE-SOROCABA

E R R O S

RNs.	mm.	COMPRIMENTOS	
	+	—	
RN (Km. 98.5) — RN (Km. 100)		0,70	1519
RN (Km. 100) — RN (Km. 105)		4,12	5065
RN (Km. 105) — RN (Km. 110)		6,05	5113
RN (Km. 110) — RN (Km. 115)	2,50		5062
RN (Km. 115) — RN (Km. 120)	4,47		5061
RN (Km. 120) — RN (Km. 125)	4,97		5059
RN (Km. 125) — RN (Km. 130)	6,52		5544
RN (Km. 130) — RN (Km. 100)		1,05	1418
RN (Km. 100) — RN (Km. 97.6)	5.70		2313

Total: + 24,16 — 11,92 36154

Erros = + 12,24

Erro da média = $\pm$ 6,12

6 — LINHA: SOROCABA-VARGEM GRANDE

E R R O S

RNs.		mm.	COMPRIMENTOS	
		+	—	
RN (Km. 97.6)	— RN (Km. 95)	6,25		2839
RN (Km. 95)	— RN (Km. 90)		2,97	4957
RN (Km. 90)	— RN (Km. 85)	7,27		5084
RN (Km. 85)	— RN (Km. 80)		1,30	5031
RN (Km. 80)	— RN (Km. 75)	0,72		5190
RN (Km. 75)	— RN (Km. 70)	1,45		5084
RN (Km. 70)	— RN (Km. 65)	2,27		4991
RN (Km. 65)	— RN (Km. 62)	6,70		4216
RN (Km. 62)	— RN (Km. 60)	0,40		2021
RN (Km. 60)	— RN (Km. 55)		1,62	5132
RN (Km. 55)	— RN (Km. 50)		2,87	4929
RN (Km. 50)	— RN (Km. 45)		6,22	5092
Total:		+ 25,06	— 14,98	54566

$$\text{Erro} = + 10,08$$

$$\text{Erro da média} = \pm 5,04$$

— LINHA: SOROCABA-VARGEM GRANDE

F R R O S

COMPRIMENTOS	mm		
—	—	RN (Km. 95) — RN (Km. 95)	0.25
2.97	2.97	RN (Km. 95) — RN (Km. 90)	0.25
2.984	2.984	RN (Km. 90) — RN (Km. 85)	0.25
2.041	1.30	RN (Km. 85) — RN (Km. 80)	0.25
2.190	0.75	RN (Km. 80) — RN (Km. 75)	0.25
2.084	1.45	RN (Km. 75) — RN (Km. 70)	0.25
4.991	2.27	RN (Km. 70) — RN (Km. 65)	0.25
4.516	0.70	RN (Km. 65) — RN (Km. 60)	0.25
2.021	0.40	RN (Km. 60) — RN (Km. 55)	0.25
2.132	1.62	RN (Km. 55) — RN (Km. 50)	0.25
4.929	2.87	RN (Km. 50) — RN (Km. 45)	0.25
2.092	0.22		

Total: + 23.00 — 14.98 24.56

Exto = + 10.08

Exto da média			
1.00	RN (Km. 100) — RN (Km. 95)	0.25	1.00
1.01	RN (Km. 101) — RN (Km. 96)	0.25	1.01
1.02	RN (Km. 102) — RN (Km. 97)	0.25	1.02
1.03	RN (Km. 103) — RN (Km. 98)	0.25	1.03
1.04	RN (Km. 104) — RN (Km. 99)	0.25	1.04
1.05	RN (Km. 105) — RN (Km. 100)	0.25	1.05
1.06	RN (Km. 106) — RN (Km. 101)	0.25	1.06
1.07	RN (Km. 107) — RN (Km. 102)	0.25	1.07
1.08	RN (Km. 108) — RN (Km. 103)	0.25	1.08
1.09	RN (Km. 109) — RN (Km. 104)	0.25	1.09
1.10	RN (Km. 110) — RN (Km. 105)	0.25	1.10
1.11	RN (Km. 111) — RN (Km. 106)	0.25	1.11
1.12	RN (Km. 112) — RN (Km. 107)	0.25	1.12
1.13	RN (Km. 113) — RN (Km. 108)	0.25	1.13
1.14	RN (Km. 114) — RN (Km. 109)	0.25	1.14
1.15	RN (Km. 115) — RN (Km. 110)	0.25	1.15
1.16	RN (Km. 116) — RN (Km. 111)	0.25	1.16
1.17	RN (Km. 117) — RN (Km. 112)	0.25	1.17
1.18	RN (Km. 118) — RN (Km. 113)	0.25	1.18
1.19	RN (Km. 119) — RN (Km. 114)	0.25	1.19
1.20	RN (Km. 120) — RN (Km. 115)	0.25	1.20
1.21	RN (Km. 121) — RN (Km. 116)	0.25	1.21
1.22	RN (Km. 122) — RN (Km. 117)	0.25	1.22
1.23	RN (Km. 123) — RN (Km. 118)	0.25	1.23
1.24	RN (Km. 124) — RN (Km. 119)	0.25	1.24
1.25	RN (Km. 125) — RN (Km. 120)	0.25	1.25
1.26	RN (Km. 126) — RN (Km. 121)	0.25	1.26
1.27	RN (Km. 127) — RN (Km. 122)	0.25	1.27
1.28	RN (Km. 128) — RN (Km. 123)	0.25	1.28
1.29	RN (Km. 129) — RN (Km. 124)	0.25	1.29
1.30	RN (Km. 130) — RN (Km. 125)	0.25	1.30
1.31	RN (Km. 131) — RN (Km. 126)	0.25	1.31
1.32	RN (Km. 132) — RN (Km. 127)	0.25	1.32
1.33	RN (Km. 133) — RN (Km. 128)	0.25	1.33
1.34	RN (Km. 134) — RN (Km. 129)	0.25	1.34
1.35	RN (Km. 135) — RN (Km. 130)	0.25	1.35
1.36	RN (Km. 136) — RN (Km. 131)	0.25	1.36
1.37	RN (Km. 137) — RN (Km. 132)	0.25	1.37
1.38	RN (Km. 138) — RN (Km. 133)	0.25	1.38
1.39	RN (Km. 139) — RN (Km. 134)	0.25	1.39
1.40	RN (Km. 140) — RN (Km. 135)	0.25	1.40
1.41	RN (Km. 141) — RN (Km. 136)	0.25	1.41
1.42	RN (Km. 142) — RN (Km. 137)	0.25	1.42
1.43	RN (Km. 143) — RN (Km. 138)	0.25	1.43
1.44	RN (Km. 144) — RN (Km. 139)	0.25	1.44
1.45	RN (Km. 145) — RN (Km. 140)	0.25	1.45
1.46	RN (Km. 146) — RN (Km. 141)	0.25	1.46
1.47	RN (Km. 147) — RN (Km. 142)	0.25	1.47
1.48	RN (Km. 148) — RN (Km. 143)	0.25	1.48
1.49	RN (Km. 149) — RN (Km. 144)	0.25	1.49
1.50	RN (Km. 150) — RN (Km. 145)	0.25	1.50

Total: + 10.08

Exto = + 10.08







