

ECUACIÓN DE RICCATI

POR D. LAURO CLARIANA Y RICART

Catedrático de la Universidad de Barcelona

Diferentes son los puntos de vista que pueden tomarse para alcanzar la integración de la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \text{ llamada de Riccati.}$$

Uno de los procedimientos más generales consiste en referirla á la ecuación diferencial que á continuación se expresa:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0.$$

Procedamos antes á la discusión de las diferentes integrales que pueden obtenerse en esta ecuación según los valores atribuidos á $2n$.

Los métodos más generales que se conocen para llegar á la integral, se fundan en el teorema de Maclaurin, y en el de los coeficientes indeterminados.

Vamos á utilizarnos del primer método, por medio de las consideraciones siguientes:

Multipliquemos (1) por x , y luego derivemos $\mu - 1$ veces:

$$(2) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2n \frac{dy}{dx} - m^2 yx = 0.$$

$$(3) \quad \left[x \frac{d^{\mu+1} y}{dx^{\mu+1}} + (\mu-1) \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} \right] + 2n \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} - m^2 \left[x \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} + (\mu-1) \frac{d^{\mu-2} y}{dx^{\mu-2}} \right] = 0.$$

Si en las ecuaciones (2) y (3) suponemos $x = 0$, resulta:

$$(4) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = 0; \quad (2n + \mu - 1) \left(\frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} \right)_0 = (\mu - 1) m^2 \left(\frac{d^{\mu-2} y}{dx^{\mu-2}} \right)_0;$$

esta última ecuación, se reduce á

$$(2n + 1) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 = m^2 y_0, \text{ si } \mu = 2.$$

Ahora bien, si $2n$ no es un entero negativo, las derivadas de órdenes impares de y , se anulan, y las pares vienen expresadas por la fórmula

$$(5) \quad \left(\frac{d^{2i}y}{dx^{2i}} \right)_o = \frac{1.3.5 \dots (2i-1)}{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2i-1)} m^{2i} y_o.$$

Si se designa por C el valor y_o , según la fórmula de Maclaurin, se deduce:

$$y = C \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} + \dots \right]$$

No puede aplicarse esta fórmula si $2n$ es un número entero impar negativo; pero dejando aparte este caso, que debe eliminarse por las condiciones del problema, la serie es aceptable por cuanto forma una serie convergente: en efecto, siendo la relación de dos términos igual á $\frac{m^2 x^2}{2i(2n+2i-1)}$, resulta que tiende hacia cero á medida que i aumenta.

Examinemos ahora el caso en que $2n$ sea igual á un entero negativo. Si este entero es impar, la segunda de la fórmula (4) nos indica que las derivadas impares son nulas cuando $x=0$, lo mismo que en el caso precedente; la misma fórmula indica que si $\mu = 1 - 2n$, se tiene $\left(\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}} \right)_o = 0$, y por consiguiente

$$\left(\frac{d^{-1-2n}y}{dx^{-1-2n}} \right)_o = 0 \dots \left(\frac{dy^2}{dx^2} \right)_o = 0 \quad y_o = 0.$$

La derivada $\left(\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}} \right)_o$ resulta pues arbitraria, haciéndose todas las demás dependientes de ésta. Si designamos por C , el valor arbitrario $\frac{1}{1.2.3 \dots (1-2n)}$ $\left(\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}} \right)_o$ y en el concepto de que sustituya á la y_o del problema anterior, cabrá escribir según la fórmula de Maclaurin.

$$y = C_1 x^{1-2n} \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)} + \dots \right]$$

Por fin si $2n$ es un entero par negativo, las derivadas de órdenes impares de y , se anulan para $x=0$ hasta la del orden $-1-2n$.

La derivada $\left(\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}} \right)_o$ puede ser escogida arbitrariamente, y las derivadas de órdenes impares que siguen á esta resultan ser funciones de ella.

Además, según la fórmula (5) se obtienen las derivadas pares en función de y_o . Así la función es una integral general, pues va á depender de dos constantes, tomando la suma de las dos series anteriores.

De lo que precede se deduce que para la integral general, conviene exceptuar el caso que $2n$, sea un entero impar positivo ó negativo.

Con estos preliminares podemos pasar inmediatamente al estudio de la fórmula de Riccati.

Sea
$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

en el supuesto que a y b sean constantes, y m un exponente cualquiera.

Supongamos: $y = \frac{1}{a} \frac{dz}{z}$, de donde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d^2z}{z^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{dz}{z}\right)^2$; sustituyendo estos valores en la primera ecuación, se halla

(a)
$$\frac{d^2z}{dx^2} = abx^m z.$$

Esta ecuación es lineal, resultando $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ para la integral.

Si la división de las dos constantes $\frac{C_2}{C_1}$, se designa por C , se obtiene:

$$y = \frac{1}{a} \frac{\frac{dz_1}{dx} + C \frac{dz_2}{dx}}{z_1 + Cz_2}$$

Esta es la integral general de la ecuación de Riccati.

Para determinar z_1 y z_2 , supondremos

$$x^{\frac{m+2}{2}} = t, \text{ luego } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{m+2}{2} x^{\frac{m}{2}} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(m+2)^2}{4} x^m \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m^2 + 2m}{4} x^{\frac{m-2}{2}} \frac{dz}{dt}.$$

Sustituyendo estos valores en (a), se tiene

(b)
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \frac{4ab}{(m+2)^2} z = 0,$$

y el valor de la integral general en función de t , es

$$y = \frac{m+2}{2a} x^{\frac{m}{2}} \frac{\frac{dz_1}{dt} + C \frac{dz_2}{dt}}{z_1 + Cz_2}$$

z_1 y z_2 designan las integrales particulares de la ecuación (b). Según los principios que preceden para que sea posible obtener dicha integral, dentro del círculo de funciones ordinarias, débese evitar que el coeficiente del segundo término de b , ó sea, $\frac{m}{m+2}$, resulte ser un número impar positivo ó negativo; luego la condición de integrabilidad, viene expresada por

$$\frac{m}{m+2} = \pm 2i, \text{ esto es; } m = \frac{\pm 4i}{1 \mp 2i}$$

según las condiciones exigidas en el problema.

Veamos ahora como los procedimientos particulares que se conocen para la resolución de la ecuación de Riccati, concuerdan con las conclusiones que acabamos de hallar.

Si en la ecuación de Riccati: $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$, suponemos $x = 0$, es posible la separación de variables, resultando

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + adx = 0.$$

Además puede escribirse

$$\frac{1}{y^2 - \frac{b}{a}} = \frac{A}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} + \frac{B}{y - \sqrt{\frac{b}{a}}} \text{ de donde}$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}, A = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}. \text{ Así, pues,}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \int \frac{y - \sqrt{\frac{b}{a}}}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} + a(x-c) = 0, \text{ ó también}$$

$$\frac{y - \sqrt{\frac{b}{a}}}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} = e^{-2a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ y por fin:}$$

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{e^{a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}} + e^{-a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}}{e^{a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}} - e^{-a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

Dado caso que $\sqrt{\frac{b}{a}}$ fuese imaginario, ó de la forma $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{-1}$, nos podríamos utilizar de las fórmulas de Euler:

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}; \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

obteniéndose el valor siguiente:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{-1} \cot a(x-c) \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{-1} = \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \cot a(x-c) \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

Aparte de este caso particular hay otros en que puede aun asegurarse la integración dentro de las funciones ordinarias, como ya hemos visto en el caso general.—Vamos á justificarlo.

Sea
$$y = My^1 + N.$$

y^1 representa una nueva variable, y M, N , designan funciones de x que pueden determinarse á voluntad: luego

$$\frac{dy}{dx} = M \frac{dy^1}{dx} + y^1 \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}.$$

Al sustituir este valor en la ecuación primera, se tiene

$$(c) \quad M \frac{dy^1}{dx} + \left(\frac{dM}{dx} + 2aMN \right) y^1 + aM^2 y'^2 + \left(\frac{dN}{dx} + aN^2 - bx^m \right) = 0.$$

Ahora bien, para determinar M y N , supondremos:

$$\frac{dN}{dx} + aN^2 = 0, \quad (\Delta) \quad \frac{dM}{dx} + 2aMN = 0, \quad \text{de donde}$$

$-\frac{1}{N} + ax = \text{const.}$ lo cual nos permite escribir $N = \frac{1}{ax}$, transformándose (Δ) en:

$$\frac{dM}{dx} + \frac{2M}{x} = 0, \quad \text{ó sea } \frac{dM}{M} + \frac{2dx}{x} = 0,$$

y por fin, $Mx^2 = \text{const.}$ cuya constante podemos suponer igual á uno, y en su virtud $M = \frac{1}{x^2}$.

Así, pues, la ecuación primitiva; $y = My^1 + N$, se transforma en:

$y = \frac{y^1}{x^2} + \frac{1}{ax}$, y la ecuación (c) en:

$$\frac{dy^1}{dx} + \frac{a}{x^2} y^1{}^2 - bx^{m+2} = 0. \quad (\pi)$$

En el caso de $m = -2$, resulta:

$$\frac{dy^1}{dx} = b - a \frac{y^1{}^2}{x^2}.$$

Ecuación que por su naturaleza permite realizar la separación de variables; en efecto si $y = zx$, se halla:

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z; \quad x \frac{dz}{dx} + z = f(z); \quad \frac{dz}{f(z) - z} - \frac{dx}{x} = 0$$

de donde

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z) - z} - \log \frac{x}{x_0} = C.$$

A pesar de la solución de este caso particular, podemos estender nuestras consideraciones á la misma ecuación (π), refiriéndola á la fundamental de Riccati.

Sea: $y^1 = \frac{1}{y_1}; \quad x = x_1 \frac{1}{m+3}$; de donde

$$dy^1 = -\frac{dy_1}{y_1^2}; \quad dx = \frac{1}{m+3} x_1 - \frac{m+2}{m+3} dx_1;$$

sustituyendo en (π), se obtiene

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{b}{m+3} y_1^2 = \frac{a}{m+3} x_1 - \frac{m+4}{m+3}$$

Al suponer: $a_1 = \frac{b}{m+3}, \quad b_1 = \frac{a}{m+3}, \quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3},$

se deduce:

$$\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{m_1}$$

Esta ecuación es de la misma forma que la primitiva, resultando integrable en funciones logarítmicas y circulares si $m_1 = 0$, ó sea $m = -4$.

Estas transformaciones pueden efectuarse indefinidamente, obteniéndose la fórmula general

$$\frac{dy_i}{dx_i} + a_i y_i^2 = b_i x_i^{m_i}.$$

Los valores de m , se deducen del modo siguiente:

$$m_1 = -\frac{m+4}{m+3}; m_2 = -\frac{m_1+4}{m_1+3}, m_3 = -\frac{m_2+4}{m_2+3} \dots$$

de donde

$$m_1 = -\frac{m+4}{m+3}, m_2 = -\frac{3m+8}{2m+5}, m_3 = -\frac{5m+12}{3m+7} \dots$$

Por inducción, se alcanza la fórmula general

$$m_i = -\frac{(2i-1)m+4i}{im+(2i+1)}$$

Ahora bien, para que $m_i = 0$, es necesario que $m = -\frac{4i}{2i-1}$; i , se supone un número entero positivo.

Empero no es esta la única fórmula que podemos considerar, pues cabe aun otro caso de integrabilidad: en efecto, si $y = \frac{f}{Y}$; $x = X^{\frac{1}{m+1}}$; sustituyendo en la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \text{ los valores respectivos}$$

$$dy = -\frac{dY}{Y^2}, dx = \frac{1}{m+1} X^{-\frac{m}{m+1}} dx$$

junto con los anteriores, se halla:

$$\frac{dY}{dX} + \frac{b}{m+1} Y^2 = \frac{a}{m+1} X^{-\frac{m}{m+1}};$$

y como esta ecuación tiene la misma forma que la correspondiente á la general del primer caso, para la integración en funciones ordinarias, bastará suponer:

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1} \text{ ó sea } m = -\frac{4i}{2i+1}$$

De suerte que si reducimos á una sola fórmula los dos casos hallados, se deduce:

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$$

Resultado exactamente igual al que habíamos encontrado según el primer procedimiento.



EL CLIMA DE MÁLAGA *

SEGUN LOS RESUMENES MENSUALES DE LOS AÑOS 1889 Y 1890

POR EL DR. D. PEDRO MARCOLAIN

Catedrático en el Instituto de Málaga

La persistencia de las brisas y vientos del SE., que figuran en 39 observaciones, es uno de los caracteres más salientes del mes de septiembre último. El viento del E. se ha registrado 5 veces: en cuatro de ellas ofreció notable intensidad y en tres, en los días 26, 27 y 28, levantó en el mar grande oleaje.

El régimen dominante de estos vientos determina en Málaga una gran cantidad de vapor acuoso, que se ha manifestado por aumento de humedad en un ambiente relativamente cálido durante la mayor parte de los días de este mes, como ocurrió en el del año anterior.

El viento terral ó del NO. solamente se ha registrado seis veces, de las cuales cinco lo han sido por la tarde; de modo que alternando con la brisa del SO., que reinaba por la mañana, solamente ha producido una modificación benéfica en el estado higrométrico del aire.

Esto es decir, que la humedad, consecuencia del régimen de los vientos del SE., es otro de los caracteres de septiembre.

Afortunadamente á las calmas, que dieron caracter al mes de agosto, sucedieron frescas y frecuentes brisas, que han modificado ventajosamente las condiciones del aire en septiembre.

La temperatura ha sido también moderada, y solo el estado higrométrico la ha hecho aparecer más elevada de lo que ha sido en realidad. Han sido más pequeñas que en el año anterior la media y las máximas temperaturas de sombra y de sol.

Aunque menor que en igual mes del año anterior, la presión atmosférica no ha ofrecido mínimos de importancia. A excepción de 3 días de llovizna, nada merece consignarse; pues ninguna tempestad háse mostrado en nuestro cielo.

Coincidiendo con el máximo barométrico de 766 mm., se presentó el mar con gran oleaje en el día 26 con vientos del E; sosteniéndose en este mismo estado hasta el 29 con vientos del mismo rumbo, del SE. del S. y del SO.

X.—RESÚMEN DEL ESTADO DEL TIEMPO DURANTE EL MES DE OCTUBRE.

Presión atmosférica corregida y referida al nivel del mar: media 763 mm.: máxima 768'52 mm., correspondiente á las 9 h. de la mañana del día 3, con el cielo despejado, brisa del SE., largos cirrus y mar tranquila: mínima 752'77 mm., anotada á las 3 h. de la tarde del día 27, con viento del O., cielo casi cubierto y oleaje.

Vientos más frecuentes: el SE., el E., el NO. y el O.: *id más fuertes;* el N., el NO. y el E.

Velocidad del viento en 24 h.: media 164'9 km.: máxima 374'3 km. registrados el día 28 con viento N.

Una máxima de 368'6 km. fué anotada el día 24 con viento del E. y otra de 360'3 km. correspondió al día 31 y al viento NO.

Trajecto recorrido por el viento en 31 días: 5113 km.

* Conclusión, véanse págs. 1, 89 y 129.

Temperatura del aire á la sombra: media 19'8° centígrados: máxima 28'0° centígrados, anotados el día 19, día despejado con vientos del SE. y del O., cirrus y mar tranquila: mínima 10'8° centígrados, correspondientes al día 29, despejado por vientos del NO. y del N., cirro cúmulus y pequeño oleaje.

Temperatura máxima al Sol: 32'6° centígrados que se anotaron el día 19, ya citado.

Tensión del vapor de agua de la atmósfera: media 13'4 mm.: máxima 16'5 mm. registrados á las 3 h. de la tarde del día 17, con brisa del SE. todo el día, cielo despejado y niebla al mediodía: mínima 5'5 mm. á las 9 h. de la mañana del día 29, ya citado por ser el de mínima temperatura.

Humedad relativa del aire: referida á 100; media 71: máxima 91 á las 9 h. de la mañana de los días 14 y 15, estando el cielo cubierto y reinando calma ó brisas débiles del N. y NO. que daban lugar á insignificante lluvia: mínima 44 á las 9 h. de la mañana del repetido día 29.

Evaporación: media en 24 h. 3'5 mm.: máxima 9'8 mm., producida el día 29 por los vientos del NO. y N.: mínima 1'1 mm., registrada el día 16, cas cubierto, con vientos del SE. y del O. y mar tranquila.

Lluvia recogida en todo el mes: 37 mm., de los cuales 26 corresponden al día 13, con una presión atmosférica media de 765'5 mm., vientos del NO., (precedidos de vientos del E. y del S.) cielo cubierto y oleaje.

Estado general de la atmósfera: 13 días despejados, 15 nubosos y 3 cubiertos; 5 de lluvia, 1 de llovizna, 1 de niebla, 1 de bruma y ninguno de tempestad.

Estado de la mar: 27 registros de mar tranquila, 10 de pequeño oleaje, 19 de oleaje, 4 de gran oleaje, 1 de mar rizada y 1 de mar picada. Total 62.

En el mes de octubre todavía ha figurado el viento del SE. por un número notable de registros; pero ya es menor este que en el mes anterior, y en cambio ha resultado mayor el de rumbos antagónicos ó del NO.

Los rumbos del O., del NO. y del N. se han registrado 8, 9 y 6 veces respectivamente, que hacen en junto 23 veces.

Los rumbos del E., del SE. y del S. lo han sido 10, 21 y 7 veces respectivamente, ó sean en total 38 registros.

En cuanto á la fuerza del viento, se han hecho 13 registros de brisa débil, 41 de viento moderado y 8 de viento fuerte.

De la 1.^a á la 2.^a y á la 3.^a década del mes ha ido disminuyendo la presión atmosférica, siendo las medias respectivas 764; 763 y 762 mm. en números redondos.

Al mismo tiempo ha ido aumentando en proporción análoga, aunque en mayor grado, de la 2.^a á la 3.^a década la velocidad del viento y con esta el estado de agitación de la mar.

Efectivamente, durante las dos primeras décadas estuvo la mar casi siempre tranquila ó levemente agitada; mientras que en la 3.^a se ha presentado agitada casi todos los días y muy especialmente en los días 24 y 25, que han sido de grande oleaje y de vientos fuertes del E.

En la 2.^a década es notable la noche del 13, en la cual, tras el régimen de

vientos del E. y del S. durante los dos días anteriores, con cuyo régimen se produjo un *máximo barométrico*, llovió copiosamente con vientos del NO., siendo 26 mm. la lluvia recogida en la siguiente mañana. Mientras duró el NO., el barómetro descendió en nuestra localidad, hasta el día 16, en que volvieron á indicarse vientos del SE.

En la 3.^a década se ha registrado un fuerte *aguacero* de breve duración, correspondiente á la noche del 23. En la tarde de este día reinaba viento del NO., precedido de vientos del SE. Desde la mañana del 24 se estableció por 48 horas el viento del E., elevando la columna barométrica, y cedió el puesto á vientos del S. y del NO. en los días 26 y 27, al aproximarse el *mínimo barométrico* de 753'77 mm., registrado en la tarde de este último día. Este mínimo produjo el aumento de fuerza de los vientos y el estado de agitación de la mar, de que se ha hecho mención anteriormente.

XI.—RESÚMEN DEL ESTADO DEL TIEMPO DURANTE EL MES DE NOVIEMBRE.

Presión atmosférica corregida y referida al nivel del mar: media 761'74 mm.: máxima 770'51 mm., registrada á las 9 h. de la mañana del día 21, reinando brisa del SE. y estando el cielo nuboso y el mar con oleaje: mínima 748'88 mm., anotada á las 3 h. de la tarde del día 27, con brisa de E., cielo entoldado con cúmulus, cirrocúmulus y mar tranquila.

Vientos más frecuentes: el NO. y el SE.: *id* más fuertes el NO.

Velocidad del viento en 24 h.: media 253'6 kilómetros: máxima 453'3 km., correspondientes al día 30, en que reinaron vientos del SO. y del NO. Otras máximas, poco inferiores á la indicada y debidas al viento del NO., se han registrado en varios días de este mes y especialmente en la 1.^a década.

Trayecto recorrido por el viento: en la 1.^a década 3743'1 km.; en la 2.^a *id.* 1532'1; en la 3.^a *id.* 2335'1, que hacen un total de 7608'3 km. en 30 días.

Temperatura del aire á la sombra: media 15'5° centígrados; máxima 24'2°, con viento del NO., cielo despejado y mar tranquila; mínima 2'0 centígrados, anotada el día 29 con viento del NO. cielo despejado, cúmulus en el horizonte y mar tranquila.

Tensión del vapor acuoso de la atmósfera: media 9'2 mm.: máxima 12'7 mm., correspondiente al día 4, día nuboso, de viento NO. y mar tranquila: mínima 3'4 mm. á las 9 h. de la mañana del día 29, ya citado por ser el de mínima temperatura.

Humedad relativa referida á 100: media 65: máxima 84, registrada á las 9 h. de la mañana del día 30, antes citado por la fuerza del viento. Debe serlo también por la nieve, si bien efímera, que cayó en Málaga á las 6 h. de la mañana y en la que algunos creyeron ver menudo granizo, á que bien pronto sucedió la lluvia; y por haber aparecido cubiertos de *nieve* los montes situados al O. y NNO. de la capital, así como las sierras de Mijas y Yunquera.

La humedad mínima corresponde á la tarde del mismo día 30 y fué de 41°.

Lluvia recogida en todo el mes: 2 mm. pertenecientes á la mañana del día 30 y al viento del SO.

Evaporación media en 24 h.: 5'8 mm.: máxima 10'8, correspondientes al día 3 y al viento NO.: mínima 1'7 mm. registrados el día 18 con vientos del SE. y del O. y cielo nuboso.

Agua evaporada en 30 días: 173 mm.

Estado general de la atmósfera: 17 días despejados, 12 nubosos y 1 cubierto.

Registros de: brisa 10, viento moderado 27, viento fuerte 23: el mayor número de estos corresponde á la 1.^a década y al rumbo NO.

Estado del mar: 46 observaciones de mar tranquila, 7 de mar rizada, 4 de pequeño oleaje, 2 de oleaje y 1 de gran oleaje. Esta última corresponde á la mañana del 30.

Tres periodos pueden distinguirse en este mes. Comprende el 1.^o los 9 días primeros del mes, en los cuales el barómetro se mantuvo indicando una presión poco diferente de 760 mm. de mercurio; reinaron en él vientos del NO., fuertes durante varias horas, alcanzó la temperatura del aire un valor medio de unos 18° centígrados y fué el de la humedad relativa media de unos 60, habiendo sido este periodo el de mayor sequedad de todo el mes.

Comienza el 2.^o periodo el día 10 y termina el día 24. El alza barométrica iniciada el día 10, llegó en los días 20 y 21 á más de 770 mm., señalando el centro de un área de gran presión, cuyos límites se pierden en nuestra localidad en el transcurso del día 24. Efectivamente con una oscilación de 3'72 mm. entre las 9 h. de la mañana y las 3 h. de la tarde de este día, fué la presión barométrica de la última hora citada 759'30 mm. y continuó sin interrupción su gradual descenso en los días siguientes.

En este periodo, desde el 13 al 24, alternaron con los vientos del NO. y del N., y aun llegaron á predominar, los del SE. y alguna vez los del S. y SO.; siendo de notar que el régimen de estos tuvo lugar principalmente en la mañana de cada día.

En este 2.^o periodo la temperatura media fué de unos 16° centígrados en números redondos; la humedad relativa media 72; y en general el cielo despejado y la mar tranquila.

El periodo 3.^o fué ciclónico. El descenso del barómetro, iniciado en la tarde del día 24, se manifestó decididamente, si bien con cielo despejado, en el siguiente día 25 con el viento fuerte del NO., que persistió durante 48 h.; la presión barométrica, que era de 756'77 mm. á las 9 h. de la mañana del día 25, llegó sin interrupción á 748'88 mm. á las 3 h. de la tarde del día 27. Este *mínimo barométrico* se produjo en pos de vientos del NO. y en coincidencia con los del O., cuyos rumbos y sus congéneres dominaron hasta fin de mes.

La temperatura media del aire, bastante inferior á la media del mes, fué en este tercer periodo 11'3° centígrados, habiéndose observado en los termómetros de mínima del observatorio, *resguardos de la irradiación*, las temperaturas mínimas siguientes, que corresponden á los 4 últimos días del mes, 7'0; 5'1; 2'0 y 2'6° centígrados, todas sobre cero.

Las *temperaturas mínimas*, correspondientes á los mismos días y observadas en el llamado *termómetro reflector*, que es un termómetro de mínima, de alcohol, cuya bola está situada en el foco de un reflector hemisférico plateado expuesto á la intemperie, fueron 1'0; 1'0; 4'0; y 3'0 centígrados sobre cero.

De modo que lo más notable ocurrido en este periodo ha sido el descenso de la temperatura. Añádase á esto el predominio de los vientos del NO. y su consiguiente estado de sequedad, la escasa cantidad de nubes y aun la ausen-

cia de éstas en las últimas noches y podrá formarse idea del frío producido por la irradiación nocturna, que ha dejado triste recuerdo de los últimos días de noviembre en la memoria de los cultivadores de la caña de azúcar.

Esto no obstante, si se comparan las temperaturas experimentadas en Málaga con las que han sufrido los habitantes del resto de la Península, en muchos de cuyos puntos ha señalado el termómetro muchos grados bajo cero, mientras que las del aire en esta capital han sido positivas, siendo esto causa de que las mismas nubes que en regiones elevadas dan origen á la nieve, solo viertan aquí menuda lluvia; si se atiende al número insignificante de días cubiertos, y á que el de nubosos, inferior á la mitad del mes, comprende días, que en muchas horas ofrecen un cielo casi despejado, y si se tiene en cuenta la tranquilidad del mar, apenas alterada, habrá que convenir forzosamente en que, apesar de la última semana de noviembre, confirma este mes una vez más las excelencias de este clima.

El invierno en Málaga

XII.—RESÚMEN DEL ESTADO DEL TIEMPO DURANTE EL MES DE DICIEMBRE

Presión atmosférica corregida y referida al nivel del mar; media 756'63 mm.: máxima 763'71 mm. á las 9 h. de la mañana del día 11, estando el cielo casi cubierto, la mar tranquila y reinando viento del NO.: mínima 745'55 mm. á las 3 h. de la tarde del día 4, día cubierto y lluvioso, con oleaje y viento del SO. en la mañana y del SE. en la tarde.

Vientos más frecuentes: el NO. y el E., siguiendo á éstos el O. y el SO.: *id. más fuertes:* el NO.

Velocidad del viento en 24 h.; media 235'9 km.; máxima 436'0 km., registrada el día 17 con viento NO., cielo nuboso y mar tranquila. Otra máxima de 432'8 km. se anotó con vientos NNO. en el día 22 y correspondieron ambas á periodos de alza barométrica.

Trayecto recorrido por el viento en 31 días: 7313'7 km.

Temperatura del aire á la sombra, y bajo de techado; media 11'1° centígrados; máxima 16'6° centígrados, registrados el día 9, con cielo nuboso, viento moderado de NO. y mar tranquila; mínima 3'3° centígrados, anotada el día 1.° del mes, con viento NO., cielo nuboso y mar rizada.

Temperatura máxima al Sol, observada en termómetro de bola negra: 20'6° centígrados el día 22, despejado, con viento NNO. y mar tranquila.

Temperatura mínima por irradiación, observada en termómetro de alcohol, cuya bola coincide con el foco de un reflector hemisférico plateado, expuesto al aire libre en el suelo del terrado del Observatorio: 0'0° centígrados, correspondiente á los días 1 y 2.

Tensión del vapor acuoso de la atmósfera: media 7'5 mm.: máxima 9'9 mm. á las 3 h. de tarde del día 4, ya citado por coincidir con el mínimo barométrico del mes; mínima 4'9 mm. el día 1.°, también citado por el mínimo de temperatura.

Humedad relativa del aire; media 73; máxima 96, anotada á las 9 h. de la mañana del día 12, con cielo cubierto y lloviendo; mínima 43 el expresado día 1.°

Evaporación: media en 24 h.: 3'4 mm.; máxima 6'9 mm. registrados el

día 23, con viento del NO. que reinaba en los dos días anteriores; mínima 0'5 mm. registrada el día 16, día casi cubierto, precedido de dos días muy lluviosos.

Agua evaporada en 31 días: 103 mm.

Lluvia recogida en todo el mes: 239'5 mm., que equivalen á otros tantos litros vertidos sobre cada metro cuadrado y corresponden á 15 días de lluvia distribuidos en 7 periodos, que fueron los días 2, 3, 4; 7, 8; 11, 12; 14, 15; 20; 24, 25, 26, 27; y 31.

Las mayores cantidades corresponden á los días 7 y 8 y fueron 47'5 y 43'0 que hacen en junto 90'5 mm., más de la 3.^a parte del total del mes, habiendo sido traídas por viento del E.

Sigue en importancia á estas la del día 15, igual á 36'5 mm., vertida con vientos del E. y del NE.

Estado general de la atmósfera: 2 días despejados, 17 nubosos y 12 cubiertos.

Registros de: brisa 9; viento moderado 42; viento fuerte 11.

Estado del mar: rizada el día 1.^o, con oleaje en la tarde del 2 y los días, 3, 4, 7 y 8; tranquila en la 2.^a década, excepto en los días 14 y 15 y en las tardes del 19 y 20, de pequeño oleaje.

La 3.^a década es más agitada: el oleaje, pequeño en los días 23 y 29 y de mediana altura el 27, 30 y 31, fué grande todo el día 26 y en las tardes del 30 y 31.

Registros de: mar tranquila 34; mar rizada 3; pequeño oleaje 9; mediano oleaje 12; y gran oleaje 4.

DEPRESIONES BAROMÉTRICAS

La presión media barométrica del mes de diciembre ha sido inferior á la normal, que corresponde á este mes en Málaga y el máximo barométrico (763'71) ha superado en muy poco á la media anual. De donde resulta que hemos estado comprendidos durante todo el mes en áreas de pequeña presión. Esta condición, una de las principales que determinan la dirección de las borrascas, ha dado por resultado que nuestra región se haya visto invadida por ellas con frecuencia inusitada. De aquí también procede el carácter que ha dado á diciembre del año 1890 la cantidad de lluvia vertida en la mitad de sus días.

Comenzó el mes con una presión barométrica de 757'77 mm., temperatura de 7'8° centígrados, viento del NO. y cielo nuboso. La presión descendió continuamente el día 2 con vientos del SO. y del O., acentuó su descenso el 3 con viento del E. y llegó á las 3 h. de la tarde del 4, con viento del SE. hasta 745'55 mm., *mínimo barométrico* del mes.

La lluvia vertida en este periodo fué de 35'5 mm.

Volvió el viento al rumbo NO, que se mantuvo el día 5 elevando la columna de mercurio, la cual marcaba 757'92 mm. á las 9 h. de la mañana del 6; pero el viento saltó al SO. y luego al O., deteniendo el alza barométrica, precursora tal vez de próxima depresión.

Efectivamente, durante el día 7, cubierto y lluvioso, con viento del E., descendió la columna mercurial hasta 753'50 mm. á las 3 h. de la tarde, y en el

siguiente día, cubierto y lluvioso como el anterior, continuó descendiendo hasta alcanzar otro *mínimo* de 752'32 mm. á las 9 h. de la mañana, con vientos del E. y del SE.

La lluvia traída por esta depresión fué de 90'5 mm., distribuidos casi por partes iguales entre los días 7 y 8.

En los días 9 y 10 volvió el viento al NO. y con él se produjo el alza barométrica que la mantuvo á más de 761 mm.

En la 2.^a década forman nuevo periodo de lluvia los días 11 y 12 con vientos del NO., del O. y del S., con cuyo último rumbo se registró *otra depresión* de 753'67 mm. á los 3 h. de la tarde del día 12.

La cantidad de *lluvia* recogida en los dos días fué de 20'5 mm.

Merced á vientos del NO. y N. llegó á señalar el barómetro á las 9 h. de la mañana del día 14 una presión de 758'33 mm.: pero en la tarde del mismo día saltó el viento al SO., detuvo el movimiento ascendente de la columna de mercurio y trajo otra *depresión* de 750'09 mm., señalados á las 3 h. de la tarde del día 15, en que reinaban ya vientos del E. y del NE.

La *lluvia* producida á consecuencia de esta depresión fué de 45 mm. en los días 14 y 15.

En la mañana del día 19 llegaba la presión atmosférica á más de 762 mm. por efecto de los vientos del NO. y O., que habían reinado en los días anteriores; de nuevo descendió á 756 mm., en que se mantuvo el 20 y 21, bajo la influencia de vientos del SO. y del E. en lucha con los del N. y NO.; de la cual resultó 1'5 mm. de *lluvia* el día 20 y el predominio final del viento NO., que reinó sin competidor en los días 21, 22 y 23 elevando la columna barométrica á 760 mm.

En la 3.^a década, los días 24, 25, 26 y 27, que fueron cubiertos, forman otro periodo de lluvia, estimada en 41 mm., cuya mayor parte corresponde á los días 25 y 26. El viento dominante fué el SO. y O. en el primer día; SO. y N. en el 2.^o; SE. y NO. en el 3.^o y NO. y O. en el 4.^o En este día 27 llegó el barómetro á señalar á las 9 h. de la mañana *otra depresión* de 752'28 mm.

Con vientos del NO.,—que en este mes han elevado por regla general la columna barométrica,—llegaba ésta en la mañana del 29 casi á 762 mm.; más su antagonista del SE., que reinó todo el día 30 con cielo nuboso y mar agitada, determinó la *depresión* gradual y continua del mercurio hasta 753'83 mm., anotados á las 3 h. de la tarde del día 31. Esta última depresión coincidió con *gran oleage* y produjo una *lluvia* de 5'5 mm.

De lo expuesto resulta que las depresiones barométricas han correspondido en general á los vientos del E. y del SE., en los días 3, 4, 7, 8, 15 y 31 y á los del S. en el día 12: y por el contrario que el alza barométrica se ha producido por vientos del NO. y del O.; resultados, cuya aplicación no es absoluta á todos los meses en Málaga, según se ha hecho notar especialmente en los resúmenes de los meses de estio.

También resulta que los *temporales de levante* vienen generalmente en pos

de una depresión que desaparece con viento NO., se anuncian deteniendo el alza barométrica iniciada y deprimiendo luego la columna de mercurio con viento del SO., á la vez que el cielo se entolda y el mar se agita; cuyos hechos anteceden por lo general al establecimiento de los vientos del E. y del SE. y á las copiosas lluvias que derraman.

De modo que el caracter principal del pasado diciembre en Málaga ha sido en primer lugar el estado de *baja presión atmosférica*, que ha dado entrada en nuestra región á un periodo ciclónico, no terminado con el mes, en que se han presentado una serie de borrascas sucesivas, de las que las más importantes para nuestra región han sido las de levante.

Dió caracter á este mes la lluvia extraordinaria, 239'5 mm., próximamente igual á $\frac{3}{7}$ de la lluvia media anual de un período de once años.

Tambien le ha dado especial fisonomía la frecuencia de los vientos del NO. y NNO., fuertes en algunas ocasiones y frios siempre, especialmente para los privilegiados mortales que viven en la atmósfera de Málaga, cuya temperatura durante el dia ha oscilado entre 10 y 13 centígrados.

Cortos períodos de frío constituyeron los dias 1 y 2; 14 y 15; 20 y 21; 27, 28 y 29, de los cuales fué el más notable el 1.º en que la mínima temperatura del aire fué + 3'3º centígrados á la sombra y bajo de techado y 0'0º centígrados en el termómetro de mínima reflector y al aire libre.

Para darse cuenta de esta diferencia, debe notarse que la temperatura del aire, es diferente de la que pueden ofrecer los cuerpos colocados á la intemperie; pues así como por la acción de los rayos solares adquieren los cuerpos situados en el suelo una temperatura mayor que la del aire, el cual, siendo muy diatérmico, deja pasar los rayos del astro, sin interceptarlos apenas; así tambien por la irradiación terrestre, que notoriamente se manifiesta en ausencia del Sol y principalmente en la madrugada, la tierra y los cuerpos expuestos al aire libre se enfrían con rapidez y mucho más que el aire, máxime cuando el cielo está desprovisto de nubes y el ambiente privado de humedad por el régimen continuado de los vientos del N.

Y estas circunstancias, más la orientación de algunos terrenos, han determinado en su vejetación los daños observados en los dias referidos.

Resúmen del año 1890.—VALORES MEDIOS Y TOTALES

Presión barométrica media.	760'18 mm.
Temperatura media del aire á la sombra.. . . .	17'6º centígrados.
Humedad relativa media de id.	68º
Tensión media del vapor acuoso de id.. . . .	11'2 mm.
Evaporación media por día ó sea en 24 horas.	4'4
Vientos dominantes en el año:	el NO. y el SE.
Trayecto recorrido por el viento durante el año.	67620 kilómetros.
Relación del núm. de observaciones de calma ó de brisa débil con el de registros.	1 : 5
Los días despejados fueron 160; los nubosos 166 y los cubiertos 39.	
Cantidad de lluvia recogida durante el año.	625'1 mm.

Vientos dominantes:

» en invierno	NO.; S.; E. y SE.
» » primavera.	NO.; E. y SE.
» » estío.	SE. y S.
» » otoño.	SE. y NO.

VALORES MÁXIMOS

Presión atmosférica máxima, registrada á las 9 ^h de la mañana del día 6 de enero.	774'80 mm.
Temperatura máxima al sol, registrada el 29 de junio.	40'2° centígrados.
Temperatura máxima del aire á la sombra, anotada el mismo día 29 de junio.	35'0° centígrados.
Humedad máxima del aire correspondiente á las 9 ^h de la mañana de los días 4 de enero y 9 de mayo.	98°
Tensión máxima del vapor acuoso de la atmósfera á las 9 ^h de la mañana del 16 de agosto.	19'9 mm.
Evaporación máxima que correspondió al día 6 de julio.,	17'8 mm.
Máxima velocidad del viento, correspondiente al día 1.º de abril.	673'3 kilometros.
Máxima lluvia de un día, anotada el 7 de diciembre.	47'5 mm.
Meses más ventosos.	Marzo, noviem. y diciem.
Id. más lluviosos.	Diciem., febrero y marzo.
Id. con mayor número de días despejados.	Julio, agosto, sep. y enero.

VALORES MÍNIMOS

Mínimo barométrico del año, registrado á las 3 ^h de la tarde del día 4 de diciembre.	745'55 mm.
Mínimo térmico del aire á cubierto de la irradiación, (dentro de la torre del Observatorio, cuyas cuatro paredes tienen ventanas provistas de persianas, á cuyo través puede circular el aire), correspondió al día 1.º de diciembre.	+ 3'3° centígrados.
Mínimo de temperatura del aire por irradiación (en termómetro de alcohol igual al anterior, pero colocado en el foco de un reflector hemioférico plateado y sobre el terrado del Observatorio) se registró en los días 1 y 2 de diciembre.	0'0° centígrados.
Mínima tensión del vapor de agua atmosférico registrada á las 9 ^h de la mañana del 29 de noviembre.	3'4 mm.
Mínima humedad, registrada á las 9 ^h de la mañana del día 29 de junio.	29°
Evaporación mínima en 24 ^h , correspondiente al día 16 de diciembre.	0'5 mm.
Meses sin lluvia.	Agosto y septiembre.
Figuran también con insignificante lluvia.	Junio y julio.

