Serie 2.ª Año I Zaragoza, Septiembre de 1899 Núm. 5

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

HISTORIA DEL PROBLEMA DE LAS TANGENTES

por M. A. Aubry

En el mero hecho de no haber estudiado los antiguos màs que el círculo y las cónicas se halla la razón de haber definido, al estudiar estas curvas, sus tangentes de modo que solo convinieran tales definiciones á las curvas de segundo grado. Y aunque muy probablemente daten estas teorías de la época de Platon, por hallarse tan solo expuestas en las obras de Euclides y Apolonio, comenzaremos á exponerlas según se encuentran en las obras de estos dos célebres geómetras.

Euclides dice, por definición, que *una recta que corta á una circunferencia le es tangente, cuando prolongada más allá del punto de contacto, no la corta de nuevo*; y que *dos circunferencias se tocan, cuando encontrándose en un punto, no se encuentran en otro punto.*

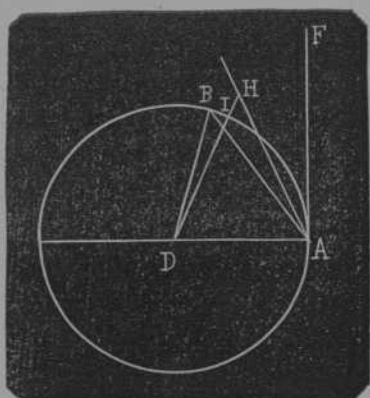


Figura 1

Euclides añade á estas definiciones varios teoremas, de los cuales el más importante es el siguiente: *La perpendicular levantada al diámetro en su extremo* A (fig. 1) *es tangente á la circunferencia, y entre esta tangente y la circunferencia no se puede trazar ninguna otra recta.* Si cayese según AB se tendría $\angle DBA = \angle DAB = 1$ recto; el triángulo DBA tendría dos ángulos rectos. Además, si entre AF y la circunferencia se pudiese trazar por A otra recta A H, la perpendicular D I H sobre A H daría $\angle$ D H A $= 1^{recto}$ y D A $>$ D H ó D I $>$ D H (lib. III, prop. VII).

Apolonio, después de haber demostrado (lib. I, prop. XVI) que *las cuerdas perpendiculares al eje de una cónica quedan cortadas por éste en dos partes iguales*, demuestra (prop. XVII) que *la paralela á estas cuerdas, trazada por el extremo del eje es tangente á la curva*, pues si la cortase en otro punto, el medio de la cuerda estaría sobre el eje, lo que sería absurdo.

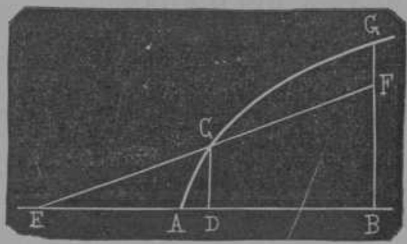


Figura 2

Después (prop. XXXIII) hace ver que *el vértice* A *de la parábola* AC (fig. 2) *corta á la subtangente* ED en dos partes iguales. En efecto, tomemos AE=AD, tracemos la secante ECF y una ordenada cualquiera BGF, se tendrá:

$$\frac{EB^2}{ED^2}=\frac{FB^2}{CD^2}<\frac{BG^2}{CD^2}=\frac{BA}{DA}=\frac{BA\,.\,AE}{DA\,.\,AE}=\frac{4BA\,.\,AE}{ED^2}$$

lo que daría $EB^2 < 4BA\,.\,AE$, contrario al teorema de Euclides: *Si una recta* AB *está dividida igualmente en* C *y desigualmente en* K, *el cuadrado construído sobre* AC *es mayor que el rectángulo de* AK *y* KB.

Apolonio demuestra enseguida que *ninguna recta puede trazarse entre la curva y la tangente*, y trata las mismas cuestiones para la elipse y la hipérbola.

Demuestra la propiedad característica de las asíntotas de la hipérbola: *la recta trazada desde el centro* C (fig. 3) *por el extremo de una ordenada en el vértice, igual al parámetro, no corta á la curva*. En efecto, si la encontrase, por ejemplo en G, se tendría:

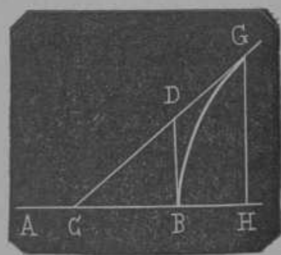


Figura 3

$$\frac{AH\,.\,HB}{HG^2}=\frac{AB}{BD}=\frac{AB^2}{AB\,.\,BD}=\frac{BC^2}{BD^2}=\frac{CH^2}{GH^2}$$

de donde $AH\,.\,HB = CH^2$, conclusión absurda, puesto que $AH\,.\,HB = CH^2 - BC^2$.

El génio de Arquímedes elevándose con poderoso impulso al descubrimiento de una curva transcendente, la espiral, extendía la cuestión; pero esto no daba ningún acceso á una definición de la tangente, ni á su construcción en general. Aunque así sea, lo que sigue puede dar una idea de su trabajo, acerca de este asunto:

IV.—*Dadas dos rectas de longitudes* Δ *y* Γ, *se puede siempre hallar una recta cuya longitud esté comprendida entre ellas.* Sea $\Gamma - \Delta = \varepsilon$ y $n\varepsilon > \Delta$, se podrá tomar la recta $\Delta + \frac{\Delta}{n}$.

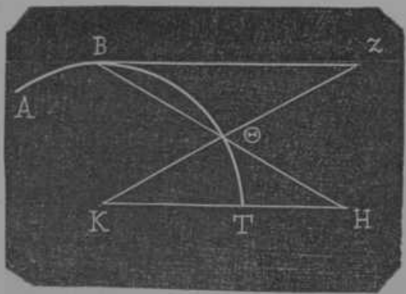


Figura 4

V.—*Dada la tangente* BZ (figura 4) *á la circunferencia* K, *se puede hallar un arco* BΘ *tal, que la relación de* ZΘ *á* KΘ *sea menor que la de los arcos* BΘ *y* AB. Basta inscribir entre las paralelas BZ y KH la recta BH tal, que ΘH sea mayor que el arco BA, lo que determinará el punto Θ (*).

XVI.—*La tangente en un punto* Δ *de la espiral forma con el radio correspondiente un ángulo agudo, hacia el lado del origen.* Tracemos la circunferencia AΔ (fig. 5); sus radios son mayores que los de la espiral antes de llegar á Δ y menores después (**): luego el ángulo IΔA no es agudo. No es tampoco recto, porque de otro modo, trazando AI de manera que se tenga:

$$\frac{PI}{AP} < \frac{\text{arc } \Delta P}{\text{arc } \Delta NT}$$

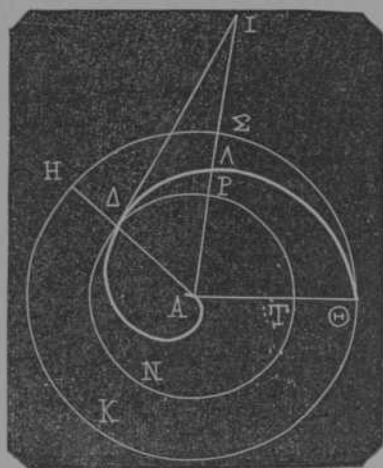


Figura 5

lo que es posible, según V, se tendría:

(*) Ya que puede tomarse AB tan pequeño como se quiera, la relación $\frac{Z\Theta}{B\Theta}$ puede hacerse también tan pequeña como se quiera. Este es el estilo del método de exhaución; hoy se diría, siendo BΘ infinitamente pequeño de primer orden, ZΘ es infinitamente pequeño de segundo.

(**) Esto se ha demostrado anteriormente.

$$\frac{IA}{AP} < \frac{\text{arc } P\Delta NT}{\text{arc } \Delta NT} = \frac{\text{arc } \Sigma HK\Theta}{\text{arc } HK\Theta} = \frac{A\Lambda}{A\Delta}.$$

Pero la desigualdad

$$\frac{IA}{AP} < \frac{A\Lambda}{A\Delta}$$

es imposible, porque $PA = A\Delta$, y $IA > A\Delta$.

XVIII.—*Consideremos la parte descrita en la primera revolución del radio* $A\Theta$, *y levantemos una perpendicular* (fig. 6) *á* $A\Theta$ *en* A; *la longitud de esta perpendicular entre* A *y la tangente es igual á la circunferencia de radio* $A\Theta$. Según XVI, esta perpendicular debe encontrar á la tangente, puesto que el ángulo $Z\Theta A$ es agudo. Supongamos ahora que ZA sea $>$ circ. $A\Theta$; se puede tomar, según IV, una longitud ΛA comprendida entre estas dos longitudes.

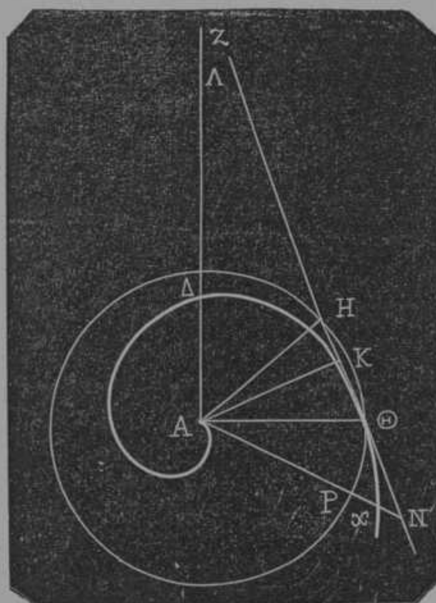


Figura 6

Ahora se tiene:

$$\frac{\Theta A}{A\Lambda} > \frac{\Theta A}{AZ} > \frac{K\Theta}{AK}$$

Tracemos AN de manera que se tenga:

$$\frac{NP}{\Theta P} = \frac{OA}{A\Lambda}; \quad (*)$$

resultará

$$\frac{NP}{PA} = \frac{\Theta P}{A\Lambda} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ.}},$$

de donde

$$\frac{NA}{PA} < \frac{\text{circ.} + \Theta P}{\text{circ.}} = \frac{AX}{A\Theta}$$

lo que es imposible, porque $NA > AX$ y $AP = A\Theta$.

(*) Arquimedes demuestra anteriormente la posibilidad de esta construccion.

Demuestra enseguida, de una manera análoga, que z A no puede ser menor que la circunferencia.

XX.—*Tangente en un punto cualquiera.* Construcción y demostraciones análogas.

Las primeras ideas generales sobre la naturaleza y la teoría de las tangentes se deben á Apolonio. En el quinto libro de su gran obra sobre las cónicas, se ocupa de diversas cuestiones relativas á sus normales, que considera como de *máxima* y de *mínima*. Se tenía así una definición de la tangente expresiva de una propiedad general que podía conducir á su descripción; pero era precisa la consideración del infinitamente pequeño, demasiado vagamente entrevisto hasta entonces, y el algoritmo algébrico, para conducir este trabajo á feliz término. Además el bagaje científico de los antiguos era todavía demasiado poco importante para que hubieran pensado en clasificar sus investigaciones algo rudimentarias, y darse cuenta de las lagunas y extensiones posibles, y en abordar el estudio de los métodos generales, reservado á los modernos.

Este descubrimiento de la construcción general de las tangentes á las curvas se debe á Descartes y á Fermat. En su *Géométrie* impresa, como se sabe, con su *Dióptrique* y los *Météors* á continuación de su *Discours sur la Méthode* (Leyde, 1637), Descartes dió la primera solución conocida de esta importante cuestión, que enuncia así: «. . . . ie croirai avoir mis icy tout ce qui est requis pour les élémens des lignes courbes, lorsque i'auray généralement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est ceci le problesme le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais mesme que j'aie jamais désiré de sçavoir en géométrie . . . . ». Hace ver que siendo x la ordenada del punto C (fig. 7) y su abscisa, s la distancia de C á un punto dado P, cuya abscisa es v, se tendrá:

$$x=\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2} \quad \text{ó} \quad y=v+\sqrt{s^2-x^2}$$

lo que permitirá, sustituyendo en la ecuación de la curva, obtener una ecuación auxiliar en x y v, ó en y y v. Supongamos que se da s: la ecuación en y y v, por ejemplo, dará las abscisas A M y A Q de las intersecciones de la circunferencia P C y de la curva A N C.

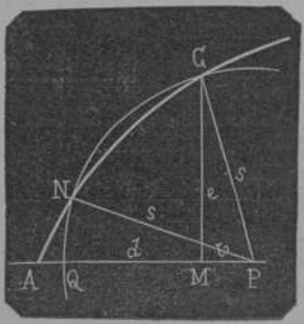


Figura 7

Para que P C sea la normal, es preciso que estas dos raíces AM y AQ, de desiguales se conviertan en iguales. El problema queda así reducido á determinar la ecuación auxiliar, de manera que tenga dos raíces iguales, lo que se hará multiplicando $(y - e)^2$ por un polinomio de un grado inferior en 2, y cuyos coeficientes se determinarán por la identificación de los dos polinomios.

Aplica el método á la *elipse* al *tridente*, á la *concoide* y á los *óvalos*. Añade que se obtendrán las tangentes (*) á una curva en el espacio, proyectándola sobre dos planos perpendiculares y construyendo las tangentes en los puntos correspondientes de estas proyecciones.

Llegamos á Fermat, considerado como el creador del cálculo infinitesimal, ó adaptación del análisis á los métodos infinitesimales de Euclides y de Arquímedes.

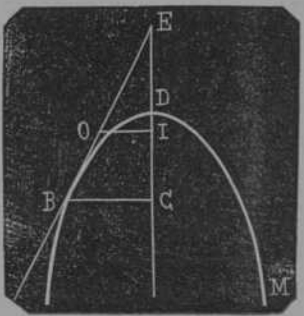


Figura 8

Después de haber expuesto en un escrito á Descartes en 1638 su método de *maximis et minimis*, continúa así. (véase figura 8):

«*De tangentibus linearum curvarum*. Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

Si data, verbi gratia, parabole B D M cujus vertex D, diameter D C, et punctum in ea ductum B, tangens parabolen, et in puncto E, cum diametro concurrens; ergo sumendo quod libet punctum, in recta B E, et abeo ducendo

(*) Descartes dice «perpendiculares» (normales) en vez de tangentes, lo que evidentemente es una inadvertencia.

ordinatam O I, ad puncto autem B, ordinatam B C major erit proportio C D ad D I, quam quadrati B C ad quadratum O I, qui a punctum O, est extra parabolen; sed propter similitudinem triangulorum, ut B C, quadratum ad O I, quadratum, ita C E, quadratum ad I E, quadratum: major igitur erit proportio C D ad DI, quam quadrati C E, ad quadratum I E, quum autem punctum B detur, datur applicata B C, ergo punctum C; datur etiam C D: sit igitur CD æqualis D, datæ. Ponatur CE, esse A; ponatur C I esse E; ergo D, ad D — E habebit majorem proportionem, quam A^2 ad $A^2 + E^2 - A$, in E bis (*). Et ducendo inter se medias et extremas, D in A^2+D in E^2—D in A in E bis, majus erit quam D, in $A^2 - A^2$ in E, adæquentur igitur juxta superiorem methodum: demptis itaque communibus D, in E^2 — D, in A in E bis. A dæquabitur A^2 in E, aut quod idem est, D in E^2 + A^2 in E, adæquabitur D in E bis, Omnia dividatur per E: ergo D in E + A^2 adæquabitur D in A bis. Elidatur D in E: ergo A^2 æquabitur D in A bis, ideoque A æquabitur D bis. Ergo C E, probavimus duplam ipsius C D, quod quidem ita se habet».

Este método de Fermat ha sido, desde Descartes hasta los últimos tiempos, objeto de diversas interpretaciones. En fin, gracias á una carta del ilustre geómetra, hallada y publicada por M. Ch. Henry (B. Bon. 1880), se ha comprendido que supone construída la tangente en B, y que compara por adæquation las ordenadas de la tangente y de la curva correspondientes á la misma abscisa D I, lo que da el valor da la sub-tangente.

Descartes, tratando de corregir lo que encuentra de vago y aún de defectuoso en este método, imaginó otros dos: el primero (*lettre à Mersenne*, 1638) consiste en hacer girar al rededor de un punto dado E (fig. 9) una secante EDB, expresar enseguida la relación de las dos abscisas A C, A G, y compararlas por adigualdades, ó cuando se transforman en raiz doble, lo que determina la tangente E F. En su segundo método Descartes (*Lettre à Hardy*, el mismo año) se propone trazar una tangente en B, haciendo girar

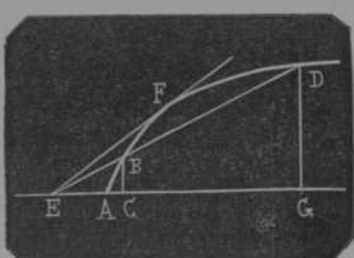


Figura 9

(*) Como Vieta, Fermat representa las incógnitas por las vocales A, E, . . . los datos por las consonantes B C, . . .; la palabra *in* es el signo de la multiplicación.

una secante al rededor de este punto, y comparando por adigualdades las dos abscisas A C y A G. Como se ve, es el método que sirve hoy para la definición de la tangente y para el cálculo de los elementos de su construcción (véase el tomo III de las *Lettres* de Descartes, cartas LX y LXI); véase igualmente Duhamel, *Mém. sur la méth. de Fermat*, en las *Mém. de l'Acad. des sc*, 1864).

En una carta á Mersenna de 1638, Descartes da su método de construcción de las tangentes á las ruletas; la obtiene mediante la consideración de un polígono que rueda sobre una recta, y deduce la construcción de la tangente á una *cicloide* cualquiera; da también el punto de inflexión de la *cicloide acortada*. Este método fué publicado por Schooten en sus ediciones latinas de la *Géométrie*, de las cuales la primera data de 1649.

Descartes atacó también, sin dudar de su importancia, dos teorías nuevas; la rectificación de las curvas y la definición de una curva por una propiedad específica de su tangente. Examinando (*Lettres*, tome I, lettre LXXIV, á Mersenne) por qué debe reemplazarse un plano inclinado, cuando no se hace abstracción de la redondez de la tierra, llega á la consideración de una curva plana que corta todos sus radios vectores según el mismo ángulo, y tal, que dos arcos cualesquiera que comienzan en el origen son entre sí como los radios qne terminan en sus extremos: esta última propiedad equivale á la rectificación de la curva, que ciertamente se ha reconocido ser la *espiral logarítmica*.

Ha debido también llegar á la determinación de sus célebre óvalos, dándose *á priori* ciertas propiedades ópticas de sus tangentes. Parece que también Fermat consideró este *método inverso de las tangentes*, como se le ha llamado durante largo tiempo, poco después que su método de las tangentes, ó sea hacia 1629.

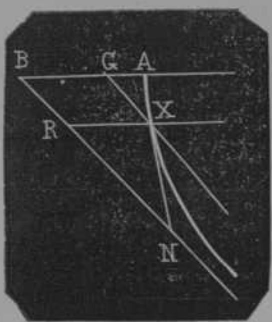


Figura 10

Además debe citarse el *problema de De Beaune,* tratado por Descartes en una carta á este geómetra, fechada en 1639 (*Lettres*, tome III, lettre LXXI). Se trata, como se sabe, de obtener la curva cuya ordenada sea á la sub-tangente como una longitud dada á la parte de la ordenada comprendida entre la curva y una recta inclinada 45° respecto al eje de las abscisas. Descartes resolvió este problema en cuanto era posible entonces: Considerando dos tangentes muy próximas, llega á concluir que esta curva tiene una asintota BN (fig. 10), que la sub-tangente RN, medida sobre la asíntota, tiene una longitud constante, y en fin, que la curva puede considerarse como lugar de las intersecciones de dos rectas que se mueven paralelamente á sí mismas, la una GX uniformemente, la otra RX según una velocidad que, en R, sea á la velocidad de GX, como AB es á GB. Se reconocerá facilmente que es una *logarítmica* deformada.

(*Concluirá*).

SUR LES LIGNES CYLINDRIQUES

par Geminiano Pirondini, à Parme

1

Soient:

$\Lambda\,(\xi, \eta, \zeta)$ une ligne placée sur un cylindre quelconque K ayant les génératrices parallèles à l'axe des z, ρ et σ le rayon de courbure et l'arc de cette ligne; L (x, y, o) la sección droite de K placée sur le plan $z = o$, r et s le rayon de courbure et l'arc de cette ligne; Λ_1 la transformée de Λ (ligne à laquelle se réduit Λ en étalant le cylindre K sur un plan); θ l'inclinaison de Λ sur les génératrices de K.

$$\xi = x, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = \int \cot\theta \,.\, d\,s,$$

d'où il suit:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,\xi}{d\,\sigma} &= \frac{d\,x}{d\,s}\sin\theta \\ \frac{d\,\eta}{d\,\sigma} &= \frac{d\,y}{d\,s}\sin\theta \\ \frac{d\,\zeta}{d\,\sigma} &= \cos\theta \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\,\sigma^2} &= \left(\frac{d^2 x}{d\,s^2}\sin\theta + \frac{d\,x}{d\,s}\cos\theta\,.\,\frac{d\,\theta}{d\,s}\right)\sin\theta \\ \frac{d^2\eta}{d\,\sigma^2} &= \left(\frac{d^2 y}{d\,s^2}\sin\theta + \frac{d\,y}{d\,s}\cos\theta\,.\,\frac{d\,\theta}{d\,s}\right)\sin\theta \\ \frac{d^2\zeta}{d\,\sigma^2} &= -\sin^2\theta\,\frac{d\,\theta}{d\,s} \end{aligned}\right.$$

Donc:

$$\frac{1}{\rho} = \sin\theta \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{r^2} + \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}$$

et $\left(\text{puisque } \sin\theta = \frac{ds}{d\sigma}\right)$:

$$(1) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin^2\theta}\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2}$$

Le rayon de courbure géodésique ρ_g de Λ sur le cylindre K est égal au rayon de courbure ρ_1 de Λ_1. On a donc:

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{d\theta}{d\sigma} = \sin\theta \, . \, \frac{d\theta}{ds}$$

En désignant par ε l'angle sous lequel les plans osculateurs de Λ coupent la surface de K, on a:

$$\cos\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_g}$$

Conséquemment:

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{1}{r} \, . \, \frac{\sin\theta}{\frac{d\theta}{ds}} = \frac{\rho_g}{r}\sin^2\theta$$

Si l'on remarque d'ailleurs que:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho^2_g - \rho^2}}{\rho}$$

on a par comparaison:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2_g} + \frac{\sin^4\theta}{r^2}$$

Celle-ci est la genéralisation d'une formule connue relative à l'hélice cylindrique.

2

On peut toujours plier le plan d'une ligne Λ_1 sur un cylindre K tel, que le rayon de courbure de la ligne Λ à laquelle se réduit Λ_1 soit donné par une fonction arbitraire

$$\rho = f(\sigma)$$

de l'arc.

En effet la transformée plane Λ_1 soit représentée par l'équation intrinsèque:

$$\rho_1 = \lambda(\sigma);$$

on déduit de l'équation (2):

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda(\sigma)}$$

Si donc on a recours à l'égalité (1) et si l'on remarque de plus que

$$ds = d\sigma \,.\, \sin\theta,$$

on trouve:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{\sin^2\left[\int \frac{d\sigma}{\lambda(\sigma)}\right]} \sqrt{\frac{1}{f^2(\sigma)} - \frac{1}{\lambda^2(\sigma)}} \\ s &= \int \sin\left[\int \frac{d\sigma}{\lambda(\sigma)}\right] d\sigma + c, \end{aligned} \right.$$

c étant une constante arbitraire qu'on peut toujours déterminer par un choix préalable de l'origine de l'arc s.

L'élimination de σ entre les équations (4) conduit à une certaine relation

$$r = \psi(s)$$

entre le rayon de courbure r et l'arc s de la ligne L; cette ligne est donc déterminée. C'est le même, par conséquent, du cylindre K.

Pour voir de quelle façon on doit superposer le plan de Λ_1 à la surface du cylindre K, on suppose de donner à σ une valeur particulière α; soit a la valeur correspondante de s (déduite de la deuxième équation (4)).

Les équations:

$$\sigma = \alpha, \quad \rho_1 = \lambda(\alpha); \quad s = a, \quad r = r(a)$$

définissent une couple de points correspondants A_1, A sur les lignes A_1, L.

D'ailleurs l'équation:

$$\theta = \int \frac{d\sigma}{\lambda(\sigma)} = \Phi(\sigma),$$

dans le point A_1 se réduit à:

$$(\theta)_{A_1} = \Phi(\alpha) \tag{5}$$

On a donc la construction suivante:

Après d'avoir mené par le point A_1 une droite D inclinée à la courbe Λ_1 de l'angle $(\theta)_{A_1}$ donné par l'égalité (5), on doit superposer le plan de Λ_1 au cylindre K, en plaçant le point A_1 sur le point A et la droite D sur la génératrice rectiligne de K passant par A.

La propriété énoncée est ainsi démontrée.

Il suit de l'analyse précédente: *Une ligne Λ à double courbure est déterminée de forme quand on connait:* 1) *son rayon de courbure en fonction de l'arc.* 2) *la tranformée plane Λ_1 de cette ligne.*

La transformée plane Λ_1 soit définie par l'équation cartésienne:

$$\zeta_1 = F(s) \tag{6}$$

On a dans ce cas:

$$\cot\theta = F'(s)$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\rho_1} = \frac{F''(s)}{\left[1 + F'^2(s)\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{7}$$

et conséquemment.

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma = \int \sqrt{1+F'^2(s)}\,.\,ds \\ \dfrac{1}{r} = \sqrt{\dfrac{[1+F'^2(s)]^2}{f^2\left[\int \sqrt{1+F'^2(s)}\,.\,ds\right]} - \dfrac{F''(s)}{1+F'^2(s)}} \end{cases}$$

L'élimination de σ entre ces équations donne une relation entre r et s, ce qui définit la ligne L et conséquemment le cylindre K.

Après cela, on doit superposer le plan de Λ_1 sur la surface de K de façon, que l'axe des ζ_1 $(s = 0)$ coïncide avec la génératrice de K qui passe par le point de L déterminé par les équations dérivant des égalités (8), en y faisant $s = 0$.

Exemple.—Plier le plan d'un cercle Λ_1 *sur un cylindre de façon à construire une ligne gauche* Λ *à courbure constante.*

Dans ce cas on a:

$$\rho = f(\sigma) = a, \quad \rho_1 = \lambda(s) = b, \quad \theta = \frac{\sigma}{b}, \quad s = -b\cos\left(\frac{\sigma}{b}\right) + b,$$

et conséquemment.

$$r = \frac{a}{b\sqrt{b^2 - a^2}}\left\{b^2 - (s-b)^2\right\}$$

en supposant d'avoir déterminé la constante c des équations (4) de façon, qu'il résulte $s = 0$ pour $\sigma = 0$.

Le cylindre K est ainsi déterminé.

En remarquant que, pour $\sigma = 0$, on a: $\theta = 0$, $r = 0$, on voit que pour la solution complète du problème on doit mener une tangente D au cercle A_1 à un point quelconque A_1 et ensuite envelopper le plan de Λ_1 sur le cylindre K de façon, que A_1 soit sur le point A de L dans lequel $r = 0$, et la droite D soit sur la génératrice de K passant par A.

Le problème: *Sur un cylindre donné* K *décrire la ligne* Λ *dont le rayon de courbure* ρ *est une fonction donnée de l'arc* σ peut être résolu *théoriquement* par deux méthodes différentes.

1) On peut déterminer la transformée plane Λ_1 de Λ, en ayant recours à la deuxième équation (8), qui conduit évidemment à une équation différentielle du troisième ordre en F (s).

2) On peut déterminer l'inclinaison θ de L sur les génératrices du cylindre K, en fonction de σ ou de s; et pour atteindre ce but on a respectivement les relations;

$$\left(\frac{d\,\theta}{d\,\sigma}\right)^2 + \frac{\sin^4\theta}{r^2\,(\int \sin\theta\,.\,d\,\sigma)} = \frac{1}{\rho^2\,(\sigma)}$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\,\theta}{d\,s}\right)^2 + \frac{\sin^4\theta}{r^2\,(s)} = \frac{1}{\rho^2\left(\int \frac{d\,s}{\sin\theta}\right)}$$

conduisant à deux équations différentielles du deuxième ordre en θ.

Exemple.—On veut tracer une ligne à courbure constante sur un cylindre circulaire.

Dans ce cas on a:

$$\rho = a, \qquad r = b;$$

la détermination de θ se fait donc au moyen de l'équation différentielle:

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\,\theta}{d\,s}\right)^2 + \frac{\sin^4\theta}{b^2} = \frac{1}{a^2}$$

Et puisqu' on dérive d'ici:

$$\int \frac{\sin\theta\,d\,\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^4\theta}} = \frac{1}{a}\,s + \text{cont.}^e,$$

on voit qu'on tombe sur une intégrale elliptique; le problème peut être donc résolu complétement.

3

Si l'on a recours à l'équation (3) en se rappelant l'égalité (7), on trouve:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + F'^2(s)}}{F''(s)}\cdot\frac{1}{r},$$

d'où il suit:

$$\frac{1}{r}=\frac{F''(s)}{\sqrt{1+F'^2(s)}}\cdot\operatorname{tang}\varepsilon$$

On conclut que *l'on peut toujours déterminer le cylindre* K *sur lequel on doit plier le plan d'une ligne plane donnée* Λ_1, *pour que les plans osculateurs de la ligne gauche à laquelle se réduit* Λ_1 *soient inclinés d'un angle* ε *constant, ou fonction donnée de l'arc* s, *sur la surface du cylindre.*

Exemple.—Si la ligne plane donnée Λ_1 est la parabole

$$\zeta_1=\frac{s^2}{a},$$

on trouve:

$$r=\cot\varepsilon\sqrt{\frac{a^2}{4}+s^2}$$

et la section droite L du cylindre K est déterminée.

Pour ε constante, on tombe sur une courbe trocoïdale.

On dérive de la formule (3):

$$\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{\cot\varepsilon}{r}\,ds,$$

d'où par intégration:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta=c\,e^{\int\frac{\cot\varepsilon}{r}ds} \tag{9}$$

c étant une constante arbitraire.

On voit d'ici que *quand on donne arbitrairement le cylindre* K, *on peut décrire, sur la surface, une infinité de lignes* Λ *jouissant de la propriété que leurs plans osculateurs coupent la surface sous un angle* ε *constant ou fontion donnée de* s.

La construction de ces lignes Λ peut être effectuée à l'aide de la relation (9) donnant l'inclinaison de la ligne à construire sur les génératrices du cylindre.

Dans ce cas on peut trouver sans peine la ligne Λ_1 transformée de Λ. En effet, on a (à cause de l'égalité (2)):

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{d \cos \theta}{d s};$$

et puisque le rayon de courbure ρ_1 de Λ_1 est égal à ρ_g, on a que *la relation entre* ρ_1 *et* σ *définissant la courbe* Λ_1 *s'obtient en éliminant* s *entre les équations:*

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1} = = \dfrac{d \cos \theta}{d s} \\[2ex] \sigma = \displaystyle\int \frac{d s}{\sin \theta} + \text{const}^{\circ} \end{cases}$$

(θ *étant donnée par l'égalité* (9)).

En supposant que angle ε soit une fontion connue de l'arc σ de la ligne Λ qu'on veut tracer sur le cylindre donné K, l'angle θ est défini par la condition:

$$\frac{d \theta}{\sin \theta} = \frac{\cot \varepsilon \, . \, d \sigma}{r [\int \sin \theta \, . \, d \sigma]},$$

conduisant à une équation différentielle du deuxième ordre en θ.

Le problème est ramené aux quadratures, quand r est une constante.

En remarquant que

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\rho}{\rho_g} = \cos \varepsilon,$$

on a: *Les équations* (10) *dans lesquelles on suppose* ε *constante, définissent la ligne plane* Λ_1 *dont le rayon de courbure est proportionel au rayon de courbure de la ligne gauche* Λ *à laquelle se reduit* Λ_1 *en pliant son plan sur la surface d'un cylindre* K *donné d'avance.*

Nous terminons ce paragraphe en énonçant la propiété suivante, qu'on démontre en appliquant les formules du §. 1 et l'équation:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d \varepsilon}{d \sigma} + \frac{\sin \varepsilon}{\rho} \cot \theta,$$

donnant le rayon de torsion τ d'une ligne Λ tracée sur le cylindre K (ou, avec plus de généralité, sur une surface développable quelconque):

(Concluirá.)

TEORÍA FORMAL DE LAS PROGRESIONES

POR D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO

Catedrático de la Universidad de Madrid

Nos proponemos en este artículo exponer la teoría de las progresiones según su aspecto puramente formal, presentando bajo una forma general y uniforme las propiedades de este algoritmo tan poderoso y admirable del Análisis numérico.

1.—*Algoritmo empleado.*—Designemos por el símbolo $\frown$, que leeremos *combinado con*, el signo de una operación aritmética directa, que goce de las propiedades de ser asociativa y conmutativa, es decir, que si a, b y c son tres números cualesquiera, se verifiquen las propiedades que expresan las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} a \frown b = b \frown a \\ (a \frown b) \frown c = (a \frown c) \frown b = a \frown (b \frown c) = a \frown b\, c \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

La operación inversa de la expresada por el símbolo $\frown$, la designaremos con el $\smile$, que leeremos *inversamente combinado con*, de manera que se tendrà, por ser conmutativa la operación $\frown$, de

$$a \frown b = c \left\{\begin{array}{c} c \smile a = b \\ c \smile b = a \end{array}\right\}.$$

Designemos, de modo análogo, por el símbolo $\frown\!\!\!\!\frown$, que leeremos *doblemente combinado con*, el signo de una nueva operación aritmética directa, de categoría inmediatamente superior á la designada por el símbolo $\frown$, operación que podrá ser, ó no ser, asociativa y conmutativa, pero que supondremos es distributiva respecto à la operación $\frown$, al menos cuando el elemento compuesto ocupa el primer lugar, es decir, que si a, b y c son tres números cualesquiera, la nueva operación gozará de las propiedades expresadas en las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a \frown a \frown a \ldots . \frown a^{(b} = a \mathrel{\overset{\frown}{\frown}} b \\ (a \frown b) \mathrel{\overset{\frown}{\frown}} c = (a \mathrel{\overset{\frown}{\frown}} c) \frown (b \mathrel{\overset{\frown}{\frown}} c) \end{array}\right\}, \qquad (2)$$

pudiendo gozar, ó no gozar, de las expresadas por las igualdades (1).

Como la operación $\mathrel{\overset{\frown}{\frown}}$ puede no ser conmutativa podrán corresponderle dos operaciones inversas diferentes; estas dos operaciones las designaremos por los símbolos $\mathrel{\overset{\smile}{\smile}}$ y $\mathrel{\overset{|}{\overset{\smile}{\smile}}}$, que leeremos *inversa y doblemente combinado con;* de manera que se tendrà, de

$$a \mathrel{\overset{\frown}{\frown}} b = c \left\{\begin{array}{l} c \mathrel{\overset{\smile}{\smile}} b = a \\ c \mathrel{\overset{|}{\overset{\smile}{\smile}}} a = b \end{array}\right\}.$$

Es evidente que si la operación $\mathrel{\overset{\frown}{\frown}}$ fuese conmutativa, las dos operaciones $\mathrel{\overset{\smile}{\smile}}$ y $\mathrel{\overset{|}{\overset{\smile}{\smile}}}$ serían idénticas.

Recordados estos símbolos, notaciones y propiedades pasemos á exponer la teoría de las progresiones.

2.—*Definiciones.—Se llama progresión una sucesión de números tales, que cada uno se deduce del que le precede operando sobre éste por la operación* $\smile$ *con un número constante, que recibe el nombre de* RAZÓN *de la progresión.*

Los diversos números que constituyen una progresión se llaman sus *términos*, y pueden ser en número limitado ó ilimitado. Señalados ó fijados dos términos de una progresión, los comprendidos entre ellos reciben el nombre de *medios*.

De la definición dada se deduce inmediatamente que cada término de una progresión es también igual al resultado de operar sobre el término que le sigue, por la operación inversa $\smile$, con el número constante que hemos llamado razón. Aunque podría tomarse esta propiedad como definición de las progresiones, es más lógico aceptar la primera por apoyarse en las operaciones aritméticas directas.

Las progresiones se dividen en *crecientes* y *decrecientes*, según que la razón sea mayor ó menor que el módulo (1) de la operación $\smile$. La causa de estas denominaciones es la siguiente; designemos por a un término de la progresión, por r la razón y por m el módulo de la operación $\frown$, y tendremos, si

$$r > m, \qquad a \frown r > a,$$

los términos de la progresión irán aumentando y la progresión se llamará *creciente*, pero si por el contrario

$$r < m, \qquad a \frown r < a,$$

los términos de la progresión irán decreciendo, y la progresión se denominará *decreciente*.

3.—*Fórmulas generales.*—Sea la progresión

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots\ a_{n+p},\ \ldots\ a_{m-p},\ \ldots\ a_m,\ \ldots,$$

cuya razón designaremos por r; y tratemos de hallar el valor de un término cualquiera en función de otro que le $\left\{\begin{matrix}\text{preceda}\\ \text{siga}\end{matrix}\right\}$ en un cierto número de lugares, la razón de la progresión y el número de términos intermedios.

De la definición de progresión, de la propiedad enunciada en el párrafo anterior y de las conocidas propiedades de las operaciones $\frown$ y $\overset{\frown}{=}$ y de sus inversas, se deducen las dos series de igualdades

$$\begin{array}{ll}
a_{n+1} = a_n \frown r, & a_{m-1} = a_m \smile r, \\[2ex]
a_{n+2} = a_{n+1} \frown r = a_n \frown r \frown r & a_{m-2} = a_{m-1} \smile r = a_m \smile r \smile r \\
\qquad = a_n \frown (r \overset{\frown}{=} 2), & \qquad = a_m \smile (r \overset{\smile}{=} 2), \\[2ex]
a_{n+3} = a_{n+2} \frown r & a_{m-3} = a_{m-2} \smile r \\
= a_n \frown (r \overset{\frown}{=} 2) \frown r = a_n \frown (r \overset{\frown}{=} 3), & = a_m \smile (r \overset{\frown}{=} 2) \frown r = a_m \smile (r \overset{\smile}{=} 3), \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
a_{n+p} = a_{n+p-1} \frown r & a_{m-p} = a_{m-p+1} \smile r \\
= a_n \frown (r \overset{\frown}{=} \overline{p-1}) \frown r = a_n \frown (r \overset{\frown}{=} p); & = a_m \smile (r \overset{\smile}{=} \overline{p-1}) \smile r = a_m \smile (r \overset{\frown}{=} p);
\end{array}$$

---

(1). Recordemos que se llama *módulo de una operación* $\frown$; al número m que combinado por la operación $\frown$ con un número cualquiera a, reproduce el número a, es decir, al número que tiene la propiedad que expresa la siguiente igualdad

$$a \frown m = a$$

de donde se derivan las dos fórmulas

$$a_{n+p} = a_n \frown (r \eqsim p), \quad (3) \qquad a_{m\ p} = a_m \smile (r \eqsim p), \quad (4)$$

que deseábamos hallar; estas fórmulas traducidas al lenguage vulgar nos dicen que:

Un término cualquiera de una progresión es igual á otro que le $\left\{\begin{matrix}\textit{precede}\\ \textit{sigue}\end{matrix}\right\}$ *en* p *lugares, combinado por la operación* $\left\{\begin{matrix}\textit{directa}\\ \textit{inversa}\end{matrix}\right\}$ *de categoría inferior, con el resultado de combinar la razón* r *con el número* p *por la operación directa de categoría superior.*

La fórmula (4) puede fácilmente deducirse de la (3), del modo que ahora indicaremos, pero es preferible obtenerla directamente cual nosotros lo hemos hecho. Operando sobre los dos miembros de la igualdad (3) con el número $r \eqsim p$ por la operación inversa $\smile$, tendremos

$$a_{n+p} \smile (r \eqsim p) = a_n \frown (r \eqsim p) \smile (r \eqsim p) = a_n,$$

y haciendo

$$n + p = m, \qquad \text{de donde} \qquad n = m - p,$$

se obtiene la fórmula (4); de un modo análogo se podría derivar la fórmula (3) de la (4).

4.—Combinando por medio de la operación $\frown$ las dos igualdades (3) y (4), se obtiene

$$a_{+n\,p} \frown a_{m-p} = a_n \frown a_m, \qquad (5)$$

igualdad que expresa una propiedad muy importante de las progresiones, que posteriormente utilizaremos, y que traducida al lenguaje vulgar nos dice que:

La combinación por medio de la operación $\frown$ *de dos términos de una progresión equidistantes de dos fijos, y situados entre ambos, ó uno á la izquierda del primero y otro á la derecha del segundo, es constantemente igual al resultado de combinar por la misma operación los términos fijos.*

5.—De la fórmula (3), ó de la (4), pueden deducirse los valores de la razón de la progresión, r, y del lugar, p, que en la misma ocupa el término $a_{n \dotplus p}$ con relación al a_n, elementos que son de suma utilidad. En la fórmula

$$a_{n \dotplus p} = a_n \frown (r \stackrel{\frown}{\frown} p)$$

podemos operar sobre los dos miembros con el número a_n por la operación inversa $\smile$, y recordando que el signo $\frown$ expresa una operación conmutativa y asociativa, se tiene,

$$a_{n \dotplus p} \smile a_n = [\, a_n \frown (r \stackrel{\frown}{\frown} p)\,] \smile a_n = (r \stackrel{\frown}{\frown} p) \frown a_n \smile a_n = r \stackrel{\frown}{\frown} p,$$

y de esta fórmula, teniendo en cuenta lo anteriormente dicho (n.º 1) respecto á la operación $\stackrel{\frown}{\frown}$, se deducen inmediatamente las dos siguientes:

$$r = (a_{n \dotplus p} \smile a_n) \stackrel{\smile}{\smile} p, \qquad (6)$$

$$p = (a_{n \dotplus p} \smile a_n) \underset{\smile}{\stackrel{|}{\smile}} r; \qquad (7)$$

fórmulas muy importantes que resuelven los problemas enunciados, y cuya traducción al lenguaje vulgar no presenta dificultad alguna.

6.—*Interpolación.—Se llama* interpolar p — 1 *medios entre dos números dados*, a *y* b, *á determinar* p — 1 *números comprendidos entre* a *y* b, *y que formen una progresión de la cual los números dados sean los extremos.*

El problema de la interpolación de medios entre dos números dados queda reducido al de la investigación de la razón de la progresión, pues es evidente que, conocida esta razón, operando sucesivamente con ella sobre el número a por medio de la operación $\frown$ formaremos todos los términos de la progresión buscada. Aunque la aplicación de la fórmula (6) del número anterior resuelve el problema propuesto, vamos à exponer el medio sencillo de obtener directamente su solución.

Sean a y b los dos números dados, $p - 1$ el número de medios que se quieren interpolar, y r la razón desconocida que deseamos hallar; por definición, el nùmero b ocupará el lugar $p + 1$, á contar del término a, en una progresión cuya razón es r; luego razonando cual anteriormente lo hemos hecho, tendremos:

$$b = a \frown (r \eqsim p)$$

de donde

$$r = (b \smile a) \simeq p, \qquad (8)$$

fórmula que resuelve, y que fácilmente podría traducirse al lenguaje vulgar.

7.—*Conjunto.—Entenderemos por* conjunto *de* p *términos de una progresión, el resultado de enlazar* p *términos consecutivos de la misma por medio de la operación* $\frown$.

Sea la progresión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots a_{n+p-1}, \ldots,$$

y tratemos de hallar una fórmula que nos exprese el valor del conjunto de los p términos consecutivos

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+p-2}, a_{n+p-1}.$$

Designando este conjunto por C, tendremos, por definición

$$C = a_n \frown a_{n+1} \frown a_{n+2} \frown \ldots \frown a_{n+p-3} \frown a_{n+p-2} \frown a_{n+p-1};$$

y como según hemos dicho (núm. 1), la operación $\frown$ es conmutativa, se tiene también,

$$C = a_{n+p-1} \frown a_{n+p-2} \frown a_{n+p-3} \frown \ldots \frown a_{n+2} \frown a_{n+1} \frown a_n;$$

enlazando estos dos valores de C por la operación $\frown$, y recordando la propiedad asociativa de esta operación, se tiene,

$$\begin{aligned} C \eqsim 2 = (a_n \frown a_{n+p-1}) \frown (a_{n+1} \frown a_{n+p-2} \frown \ldots \\ \frown (a_{n+p-2} \frown a_{n+1}) \frown (a_{n+p-1} \frown a_n), \end{aligned}$$

ó lo que es igual, teniendo en cuenta la propiedad demostrada anteriormente (núm. 4),

$$C \underset{\frown}{\frown} 2 = (a_n \frown a_{n+p-1}) \underset{\frown}{\frown} p,$$

de donde se deduce,

$$C = [(a_n \frown a_{n+p-1}) \underset{\frown}{\frown} p] \underset{\frown}{\frown} 2, \qquad (9)$$

fórmula que resuelve el problema; y que traducida al lenguaje vulgar, dice:

Que el conjunto de un número limitado de términos de una progresión, es igual al resultado que se obtiene operando con el número de términos tomados por la operación directa de segunda categoría, $\underset{\frown}{\frown}$, *sobre el resultado de operar con la de primera sobre el primero y el último término; y operando sobre el resultado complejo obtenido con el número 2, por la operación inversa de segunda categoría relativa al primer elemento* ($\underset{\frown}{\frown}$).

8.—*Aplicaciones.*—La Aritmética nos da á conocer tres operaciones directas: la adición ó suma, la multiplicación y la elevación á potencias, y sus operaciones inversas correspondientes, sustracción ó resta, división, extracción de raíces y logaritmación: de las tres operaciones directas, las dos primeras, adición y multiplicación, gozan de las propiedades que hemos supuesto tenía la operación $\frown$, ó sea, son asociativas y conmutativas, y las directas de categoría superior correspondientes, multiplicación y elevación respectivamente, poseen también las propiedades que hemos asignado á la operación $\underset{\frown}{\frown}$, ó lo que es igual, gozan de las propiedades expresadas por las igualdades (2) del párrafo 1.º—Dedúcese de esto que, si en la definición general que hemos dado de las progresiones, en las fórmulas y leyes generales, que en los párrafos anteriores hemos obtenido, hacemos explícita la significación de los signos que hemos empleado, obtendremos á la vez y sin dificultad de ningún género las definiciones, fórmulas y leyes de las progresiones por diferencia y por cociente conocidas por los matemáticos desde los primeros siglos de nuestra era. Los cuadros que á continuación ponemos manifiestan las definiciones, fórmulas y leyes de unas y otras progresiones, y hacen ver al propio tiempo, las relaciones que ligan á las fórmulas de las progresiones por diferencia con las relativas á las por cociente y las ventajas que se obtienen exponiendo la teoría en la forma que acabamos de hacerlo.

PROGRESIONES

SIMBÓLICAS

Se llama *progresión* una sucesión de números tales que cada uno se deduce del que le precede operando sobre éste por la operación $\frown$ con un número constante, que recibe el nombre de *razón* de la progresión.

ARITMÉTICAS

Se llama progresión por *diferencia* ó *aritmética* (1), una sucesión de números tales que cada uno se deduce del que le precede sumando á éste un número constante que recibe el nombre de *razón* de la progresión.

GEOMÉTRICAS

Se llama progresión por *cociente* ó *geométrica* (1), una sucesión de números tales que cada uno se deduce del que le precede multiplicando éste por un número constante que recibe el nombre de *razón* de la progresión.

SIGNOS DE OPERACIONES

$a \frown b = c,$	$a + b = c,$	$a \times b = c,$
$c \smile b = a,$	$c - b = a,$	$c : b = a,$
$c \smile a = b,$	$c - a = b,$	$c : a = b,$
$a \overset{\frown}{\frown} b = c,$	$a \times b = c,$	$a^b = c,$
$c \underset{\smile}{\smile} b = a,$	$c : b = a,$	$\sqrt[b]{c} = a,$
$c \overset{\mid}{\underset{\smile}{\smile}} a = b,$	$c : a = b,$	$lg_a . c = b,$
$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}, \dots a_{n+p}, \dots$	$\div a_n . a_{n+1} . a_{n+2} \dots a_{n+p} \dots$	$\div\div a_n : a_{n+1} : a_{n+2} : \dots : a_{n+p} : \dots$

FÓRMULAS Y LEYES GENERALES

$a_{n+p} = a_n \frown (r \underset{\smile}{=} p)$	$a_{n+p} = a_n + r \times p$	$a_{n+p} = a_n \times r^p$
$a_{m-p} = a_m \smile (r \overset{\frown}{=} p)$	$a_{m-p} = a_n - r \times p$	$a_{m-p} = a_n : r^p$
$a_{n+p} \frown a_{m-p} = a_n \frown a_m$	$a_{n+p} + a_{m-p} = a_n + a_m$	$a_{n+p} \times a_{m-p} = a_n \times a_m$
$r = (a_{n+p} \smile a_n) \underset{\smile}{=} p$	$r = (a_{n+p} - a_n) : p$	$r = \sqrt[p]{a_{n+p} : a_n}$
$p = (a_{n+p} \smile a_n) \overset{\perp}{\underset{\smile}{=}} r$	$p = (a_{n+p} - a_n) : r$	• $p = lg._r (a_{n+p} : a_n)$
$r = (b \smile a) \underset{\smile}{=} p$	$r = (b - a) : p$	$r = \sqrt[p]{b : a}$
$\mathrm{C} = [(a_n \frown a_{n+p-1}) \overset{\frown}{=} p\,] \overset{\frown}{=} 2$	$\mathrm{S(suma)} = [\,(a_n + a_{n+p-1}) \times p\,] : 2$	$\mathrm{P(producto)} = \sqrt{(a_n \times a_{n+p-1})^p}$

(1) Estas progresiones debieran denominarse en realidad *progresiones por adición* y *por multiplicación*, pero como los nombres de *por diferencia* y *por cociente* han prevalecido, los conservamos para conformarnos con la nomenclatura establecida por el uso.

9.—Aunque del cuadro anterior hemos excluído las progresiones que pudiéramos llamar potenciales, en las cuales cada término se deduce elevando el precedente á una potencia constante (razón de la progresión), no quiere esto decir que género tal de progresiones no pueda ser formado, sino que sus leyes y propiedades no podrían deducirse de las fórmulas generales antes obtenidas, tanto por no ser la elevación á potencias una operación que goce de las propiedades asociativa ni conmutativa, cuanto por no existir operación aritmética directa de categoría superior á la de elevación á potencias.

10.—Para completar el estudio de las progresiones, debiéramos exponer las fórmulas relativas al producto de un número limitado de términos de una progresión aritmética, y al de la suma de un número limitado, ó no limitado, de términos de una progresión geométrica; mas como estas propiedades son ya peculiares á un género especial de progresiones, tanto ellas como cualesquiera otras de la misma índole, se encuentran expuestas con todo detalle en los tratados más vulgares y corrientes de Aritmética, y por esta causa las excluímos de este estudio.

ESTUDIOS SUPERIORES EN EL ATENEO DE MADRID

LA MODERNA ORGANIZACION DE LA MATEMÁTICA

(Curso breve explicado por D. Zoel G. de Galdeano en Marzo de 1898)

CONFERENCIA SEGUNDA

(*Conclusión, véase págs. 110 á 115*)

Como consecuencia inmediata resulta que siendo

$$S(X, S(A, B, C, \ldots . L) = S(A, B, C, \ldots . X, \ldots . L) \quad \text{y} \quad K_1 \gtrless K$$

se obtendrá que $S(K_1, S(A, B, C, \ldots L) \lesseqgtr S(K, S(A, B, C \ldots L)$

y $S(A, B, C, \ldots . K_1, \ldots . L) \lesseqgtr S(A, B, C, \ldots . K, \ldots . L)$

es decir, que el resultado de la operación cambia, con solo cambiar una de sus entidades, propiedad llamada por Noth *dependencia*.

Siendo S(A, B, C....) = M, M será la resultante. Cuando M = S(A, A, A,....), será M múltiplo de A.

Supuesto que el resultado de una operación S(A, B) sea de un solo valor, ó una sola magnitud, tal que S(A B) = C, la operación inversa se representará con el símbolo D; y se tendrá D(C, A) = B, y por definición D(S(A, B), A) = B ó S(A, D(C, A) = C, llamándose el resultado de D(C, A) *divergencia* entre C y A

El resultado de aplicar la operación D á dos magnitudes iguales se representa por cero, D(A, A) = 0.

Para otra magnitud de la misma clase, será D(B, B) = X ó S(B, X) = B.

Pero se tiene que

$$S(B, D(A, A) = D(S(B, A), A) = B$$

y $$S(B, D(B, B) = S(B, X) = B = S((B, D, (A, A))$$

resultando, por la dependencia que supone S,

$$D(B, B) = D(A, A) = 0.$$

La magnitud O se llama módulo, y si en una categoría de magnitudes existe otra A′ tal que S(A, A′) = 0 ó A = D(O, A), A′ es *opuesta* de A.

Respecto á las clases y sub-clases de las magnitudes, bastará citar las clases de uno ó dos sentidos, las limitadas é ilimitadas.

Si además del módulo O existe una magnitud menor que todas, será *limitada*.

Las clases serán propias é impropias, en este caso la operación D(A, B) no es posible.

Por generalidad puede introducirse la *magnitud infinita*, Ω, la mayor de todas las magnitudes de la clase, con la condición S(Ω, A) = S(A, Ω) = Ω, cualquiera que sea A, y por consiguiente D(Ω, A) = Ω

Las clases *aisladas* son aquéllas en las que no existe magnitud menor que las demás, á excepción del módulo O, ni superiores á todas las demás, á excepción de la magnitud infinita Ω.

Una clase podrá descomponerse de infinitas maneras en dos grupos P_1 y P_2, de modo que cualquier magnitud de misma sólo pertenece á uno de los grupos, y que toda magnitud del primer grupo sea menor que toda magnitud del segundo, y se tendrán las cuatro agrupaciones posibles:

1.ª Que P_1 admita un máximo y P_2 un mínimo
2.ª Que P_1 admita un máximo y P_2 no admita un mínimo
3.ª Que P_1 no admita un máximo y P_2 admita un mínimo
4.ª Que P_1 no admita máximo ni P_2 mínimo;

todo lo que dará lugar á una *sucesión*, en el 1.er caso, á un *enlace* en el 2.° y 3.° y á una *división* el 4.° que será una *sección* cuando la divergencia entre P_1 y P_2 pueda hacerse menor que cualquier magnitud dada, ó un *salto*, cuando esta divergencia se conserva mayor que alguna magnitud de la clase. Estas propiedades sirven de fundamento al estudio de las clases de magnitudes que lleva el Sr. Betazzi hasta las de varias dimensiones.

Establecido el concepto de magnitud en la primera parte de su obra, el Sr. Bettazzi refiere el de número al de aquélla por medio de sus correspondencias, relacionando á cada magnitud su número.

Al terminar el Sr. Bettazzi su notable trabajo con la *teoría analítica del número* funda las extensiones sucesivas de las propiedades de las operaciones para los números negativos, fraccionarios y complejos, respectivamente en las relaciones

$$a + x = b, \qquad x \,.\, b = a, \qquad x^2 = -1$$

que conducen á la admisión de nuevas entes, haciendo ver cómo las definiciones de los conceptos de igual, menor y mayor y los de las diversas operaciones satisfacen siempre á las mismas condiciones formales, sin necesidad de darles un significado efectivo, según el *principio de las leyes formales* de Hankel.

Terminaremos esta reseña indicando que el Sr. Bettazzi completó su lavor con otros interesantes trabajos (1) y que el Sr. Peano en su *Rivista di Matematica* desenvuelve y reune estos modernos puntos de vista de la teoría de los números bajo el algoritmo del Algebra de la lógica.

---

(1) Fondamenti peruna teoria generale dei gruppi.
Sulla catena di un ente in un gruppo.
Gruppi infiniti di enti.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 226. (Véase pág. 91)

Solución por D. JUAN V. ALONSO

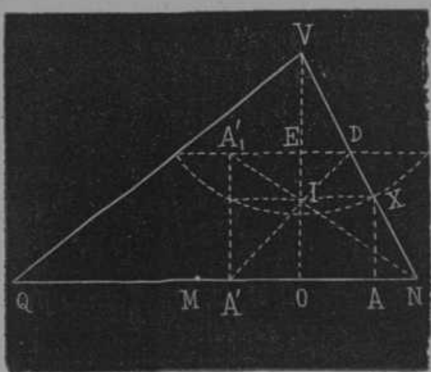
(Conclusión)

Pero el lugar de los puntos cuyas distancias á D y N guardan la relación $\frac{a}{c}$ es una circunferencia cuyo centro estará sobre la recta ND, y debiendo ser simétricos respecto al eje OE, los dos puntos de intersección con la recta $A_1 A'_1$ que han de resolver el problema, el centro de la circunferencia auxiliar será la intersección de ND con OE.

Nos basta así conocer un punto para trazar la circunferencia, y el punto que hallemos será el situado sobre ND entre dichos puntos N y D. Este punto está determinodo ya por la recta OX paralela á A'D, ya por la IX paralela al eje transverso, ya por la AX normal al mismo. Trazando la circunferencia con radio VX, obtendremos los puntos P y P'.

La consideración de las cuatro líneas que se cortan en X nos permite simplificar algo el procedimiento. Podemos, en efecto, prescindir de la previa determinación del punto D, puesto que X viene dado por las líneas AX, IX, y uniendo X con N encontramos ya el centro de la circunferencia auxiliar.

OBSERVACIÓN. La construcción llevada á cabo para obtener un punto de una hipérbola, dada su ordenada, nos hace ver otras particularidades notables.



La circunferencia auxiliar que hemos utilizado es tangente á la hipérbola en P y en P'. Para demostrarlo, nos basta trazar el radio VP', prolongándolo hasta encontrar á MN. Tendremos

$$\frac{OQ}{EP'} = \frac{ED}{ON} = \frac{a^2}{c}$$

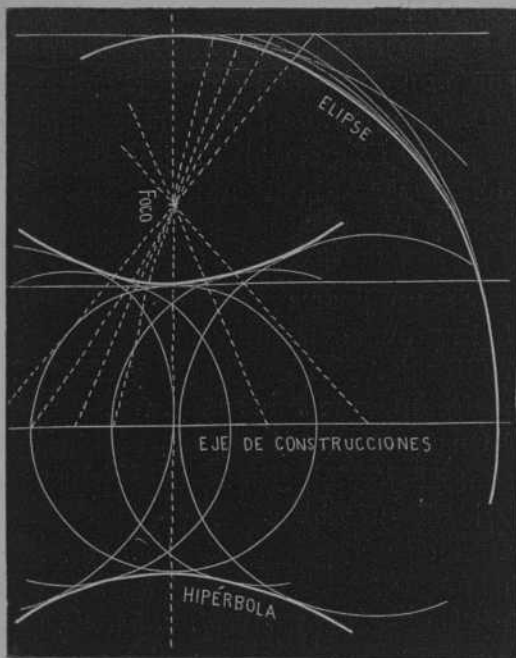
y $\frac{a^2}{c}$ es efectivamente la relación que debe existir entre la abscisa en el origen de una normal á la hipérbola y la del punto correspondiente de la hipérbola. El radio

VP es, pues, normal á dicha cónica; y por tanto, ésta y la circunferencia son tangentes entre sí.

De aquí que podamos considerar la hipérbola como la envolvente de las circunferencias tales como la de referencia, y utilizar esta propiedad para la construcción de la curva.

Esta construcción de la hipérbola por involutas se convierte en otra semejante para la elipse con una ligera variación, la de trasladar la recta AX á la parte de afuera de MN.

Traduciendo la construcción al lenguaje hablado, podemos decir que un sistema de circunferencias, cuyo centro se mueve sobre una recta, y cuyos radios son proporcionales á la distancia del centro á un punto exterior á la recta, tiene por envolvente una hipérbola ó una elipse, según dicha relación sea menor ó mayor que la unidad.



La teoría analítica de envolventes da facilmente la demostración directa de este principio, que constituye una propiedad general de las cónicas, pues también se verifica para la parábola, en su doble consideración de elipse ó hipérbola con el eje en el infinito. Las circunferencias se convierten entonces en rectas, y la propiedad en la conocida de que la tangente en el vértice es la podar de la parábola respecto al foco.

CUESTIÓN 268.

(Véase pág. 64).

Extensión del teorema de Stewart.

Siendo A, B, C, D, E *cinco puntos en linea recta, y* O *un punto exterior cualquiera, se tiene:*

$$OA^2 . CD + OB^2 . DE + OC^2 . EA + OD^2 . AB + OE^2 . BC =$$
$$= AB^2 . DE + AC^2 . EA + AD^2 . AB + AE^2 . BC$$

$$= CA^2 . CD + CB^2 . DE + CD^2 . AB + CE^2 . CB$$
$$= EA^2 . CD + EB^2 . DE + EC^2 . EA + ED^2 . AB$$

considerando los segmentos en magnitud y en signo.

(*C. A. Laisant.*)

Solución por el Sr. Retali (V.)

Si ω es la proyección ortogonal de O sobre la recta, por ser

$$\overline{OA}^2 = \overline{O\omega}^2 + \overline{\omega A}^2 \quad \text{y} \quad CD + DE + \ldots + BC = 0, \qquad \text{tenemos}$$
$$\overline{OA}^2 . CD + \ldots = \omega A^2 . CD + \ldots$$

Refiriendo ahora los segmentos al origen ω, y haciendo $\omega A = a$, $\omega B = b$, la primera relación puede escribirse

$$a^2(d-c) + b^2(e-d) + c^2(a-e) + d^2(b-a) + e^2(c-b) =$$
$$(a^2 + b^2 - 2ab)(c-d) + \ldots,$$

y ésta se verifica, observando que el valor del segundo miembro es

$$a^2(c-d) + b^2(e-d) + \ldots + e^2(c-b) -$$
$$2a[b(e-d) + c(a-e) + d(b-a) + e(c-b)]$$

y la expresión comprendida en el paréntesis cuadrado es igual á $a(c-d)$. Análogamente se verifican las otras dos.

CUESTIONES PROPUESTAS

280 Siendo a, b, c los tres lados de un triángulo ABC, r, r_a, r_b, r_c los radios de los círculos tritangentes, S el área, R el radio del círculo circunscripto y p el semi-perímetro, demostrar las fórmulas siguientes:

1.° $$a(b+c) = (r + r_a)(r_b + r_c)$$

2.° $$a(b-c) = (r_a - r)(r_b - r_c)$$

3.° $$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$$

4.° $$\frac{ap + r_a^2}{r_a} = 4R + r$$

5.° $\frac{b^2+c^2}{bc}\cos A + \frac{c^2+a^2}{ca}\cos B + \frac{a^2+b^2}{ab}\cos C = 3$

6.° $b^3 \cos C + c^3 \cos B - a^3 = 4RS(\cos A - \cos B \cos C) = \frac{S}{2R}(r^2{}_b + r^2{}_c - r^2{}_a - r^2$

(*E. Lemoine*).

281 Sea un triángulo A B C.

La anti-paralela á BC trazada por M corta á AC en B_a, AB en C_a
„ „ CA „ „ BA en C_b, BC en A_b
„ „ AB „ „ CB en A_c, CA en B_c

Hallar el punto M del plano para el que

$$\overline{B_a C_a}^2 + \overline{C_b A_b}^2 + \overline{A_c B_c}^2$$

es mínimum, y determinar este mínimun.

(*E. Lemoine*).

282 Sean A′, B′, C′ los pies de las alturas del triángulo ABC; H su punto de intersección, A_1, B_1, C_1 los medios de los lados.

Demostrar que las circunferencias A_1 B C′, A_1 C B′, H B C se cortan en la mediana A A_1.

(*J. Neuberg*).

283 Envolvente de las parábolas que tienen un foco fijo y cuyo vértice recorre una recta dada.

(*J. Neuberg*).

284 Sea un triángulo ABC. Desde el punto C se trazan las normales á todas las cónicas tangentes á CA en A y á CB en B. Hallar el lugar de los pies de las normales.

(*E. Lemoine.*)

285 Consideremos un tablero de n^2 casillas negras y blancas en *tresbolillo*. Si n es par, se puede siempre, partiendo de una casilla blanca (ó negra) dada cualquiera, y moviéndose paralelamente á los bordes, llegar á otra casilla negra (ó blanca) cualquiera, después de haber pasado una sola vez por todas las casillas.

Sea n impar y supongamos que la casilla central es negra; se podrá siempre efectuar un trayecto análogo, pero partiendo de una casilla negra, llegando á una casilla blanca.

(*A. Aubry*).

Zaragoza: Imprenta de la Sra. Viuda de Ariño, Coso, 100