Serie 2.ª Año I Zaragoza, Junio de 1899 Núm. 2

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOBRE LOS CÍRCULOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

por D. Juan J. Durán Loriga

Comandante de Artillería.

INTRODUCCIÓN El presente trabajo que tenemos el honor de presentar al congreso de Nantes, es una continuación de nuestra memoria de Saint-Etienne. La consideración de los *círculos asociados* nos ha permitido dar á conocer el papel importante del centro de gravedad en su relación con los diferentes círculos del triángulo. Además, la asimilación de los puntos á círculos de radio nulo permite obtener círculos y rectas nuevos cuya combinación hará, según esperamos, poner de relieve el lazo que une propiedades hasta ahora aisladas, en apariencia.

El tiempo nos falta para presentar otras propiedades que publicaremos en un trabajo próximo.

NOTACIONES α, β, γ . . coordenadas baricéntricas
$\rho a, \rho b, \rho c$ . . . . „ tripolares
(c) . . . . círculo de centro C
p_a . . . . potencia de A con relación á un círculo

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma \qquad a + b + c = 2_p$$

Para los puntos y círculos notables las notaciones usuales.

ABREVIACIONES

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2, \; a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 = n^2, \; a^4 + b^4 + c^4 = q^4$$

SOBRE LOS CÍRCULOS ASOCIADOS Y SEMI-ASOCIADOS.—1. Sean α, β, γ las coordenadas baricéntricas de un punto con relación á un triángulo de referencia A B C. Si p_a, p_b, p_c designan las potencias de los puntos A, B, C con respecto á un círculo ε, la ecuación de ε, en la forma dada por M. de Longchamps, es

$$\sigma(p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0 \qquad (1)$$

Consideramos los círculos ε' y ε'' cuyas potencias con respecto á los vértices A, B, C son respectivamente p_b, p_c, p_a y p_c, p_a, p_b; sus ecuaciones serán

$$\sigma(p_b\alpha+p_c\beta+p_a\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$
$$\sigma(p_c\alpha+p_a\beta+p_b\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

Diremos que ε' es el *primer círculo asociado* y ε'' el *segundo círculo asociado* de ε. Los ejes radicales del círculo circunscripto al triángulo A B C, combinados sucesivamente con ε, ε', ε'' son las rectas conjugadas isobáricas

$$p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma=0,\ p_b\alpha+p_c\beta+p_a\gamma=0,\ p_a\alpha+p_a\beta+p_b\gamma=0$$

Los ejes radicales de los círculos ε, ε', ε'', combinados dos á dos, son las tres rectas isobáricas

$$(p_a-p_b)\alpha+(p_b-p_c)\beta+(p_c-p_a)\gamma=0$$
$$(p_b-p_c)\alpha+(p_c-p_a)\beta+(p_a-p_b)\gamma=0$$
$$(p_c-p_a)\alpha+(p_a-p_b)\beta+(p_b-p_c)\gamma=0$$

De esto se concluye que el centro radical de los círculos ε, ε' ε'' es

$$\sigma\varepsilon\frac{b^2+c^2-(p_a+p_b+p_c)}{3}-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

y su radio tiene por expresión

$$\delta=\tfrac{1}{3}\sqrt{3(p_a+p_b+p_c)-m^2}$$

Observaciones De la expresión de δ se deduce que la distancia de un punto cualquiera al centro de gravedad está dada por la igualdad

$$\delta=\tfrac{1}{3}\sqrt{3(p_a^2+p_b^2+p_c^2)-m^2}$$

Se deduce también que, si se tiene para diversos círculos

$$p_a+p_b+p_c=\textit{constante}$$

todos los círculos asociados tienen el mismo círculo ortotómico.

(Se continuará.)

Relaciones formales entre dos objetos, su síntesis y los tres objetos recíprocos

Representemos por el signo $\bigcirc$ una operación formal que posea las propiedades uniforme, asociativa y conmutativa, y por el signo $\smile$ la operación analítica correspondiente. Supongamos, además, que al algoritmo comprensivo de ambas operaciones corresponde un módulo M.

Sean dos objetos, a y b, su síntesis $c = a \bigcirc b$, y los tres objetos recíprocos de los anteriores

$$a' = \mathrm{M} \smile a, \qquad b' = \mathrm{M} \smile b, \qquad c' = \mathrm{M} \smile c.$$

Tomemos una circunferencia dividida en seis partes iguales (el lector construirá facilmente la figura), y coloquemos en los puntos de división los seis objetos considerados, de modo que entre los dos primeros a y b se halle su síntesis c, y que cada dos objetos recíprocos se hallen en los extremos de un mismo diámetro.

Entre los seis objetos considerados existen varias relaciones formales que se resumen en las siguientes proposiciones:

1.ª *Cada objeto es recíproco del que le está diametralmenie opuesto.*

2.ª *La síntesis de dos objetos diametralmente opuestos es el módulo.*

3.ª *Cada objeto es la síntesis de los dos entre los que está inmediatamente comprendido en la circunferencia.*

4.ª *Cada objeto es el análisis de los dos que le siguen en la circunferencia por un mismo lado, y por el orden con que le siguen.*

Las dos primeras son evidentes en virtud de la construcción y comprenden las siguientes relaciones formales:

$$\begin{array}{lll} a' = \mathrm{M} \smile a, & b' = \mathrm{M} \smile b, & c' = \mathrm{M} \smile c, \\ a \bigcirc a' = \mathrm{M}, & b \bigcirc b' = \mathrm{M}, & c \bigcirc c' = \mathrm{M}, \\ a = \mathrm{M} \smile a', & b = \mathrm{M} \smile b', & c = \mathrm{M} \smile c'. \end{array}$$

La tercera es también evidente para el objeto c, en virtud de la hipótesis, $c = a \bigcirc b$.

De esta igualdad se deduce:

$$a = c \smile b = c \bigcirc (\mathrm{M} \smile b) = c \bigcirc b',$$
$$b = c \smile a = c \bigcirc (\mathrm{M} \smile a) = c \bigcirc a'.$$

Y de las tres igualdades, respectivamente:

$$\mathrm{M} \smile c = (\mathrm{M} \smile a) \bigcirc (\mathrm{M} \smile b),$$
$$\mathrm{M} \smile a = (\mathrm{M} \smile c) \bigcirc (\mathrm{M} \smile b'),$$
$$\mathrm{M} \smile b = (\mathrm{M} \smile c) \bigcirc (\mathrm{M} \smile a');$$

ó sea,

$$c' = a' \bigcirc b', \quad a' = c' \bigcirc b, \quad b' = c' \bigcirc a.$$

Demostrada así la tercera para los seis objetos, se deduce sin dificultad la cuarta proposición en todos los casos. Por ejemplo, para c' tomaremos las dos últimas igualdades, de las que resulta inmediatamente:

$$c' = a' \smile b = b' \smile a.$$

Las relaciones formales contenidas en las dos últimas proposiciones son las siguientes:

$$c = a \bigcirc b, \qquad a = c \bigcirc b', \qquad b = c \bigcirc a',$$
$$c' = a' \bigcirc b', \qquad a' = c' \bigcirc b, \qquad b' = c' \bigcirc a,$$

$$c = a \smile b' = b \smile a',$$
$$a = c \smile b = b' \smile c',$$
$$b = c \smile a = a' \smile c',$$
$$c' = a' \smile b = b' \smile a,$$
$$a' = b \smile c = c' \smile b',$$
$$b' = a \smile c = c' \smile a'.$$

Si la operación indicada por el signo $\bigcirc$ es la de sumar, el módulo será cero, y los objetos recíprocos serán magnitudes ó números igualmente opuestos; y siendo $c = a + b$, las relaciones halladas son las siguientes:

$$a' = -a, \qquad b' = -b, \qquad c' = -c,$$
$$a + a' = 0, \qquad b + b' = 0, \qquad c + c' = 0,$$
$$a = -a', \qquad b = -b', \qquad c = -c',$$

$$c = a + b, \qquad a = c + b', \qquad b = c' + a',$$
$$c' = a' + b', \qquad a' = c' + b, \qquad b' = c' + a,$$

$$c = a - b' = b - a', \qquad c' = a' - b = b' - a.$$
$$a = c - b = b' - c', \qquad a' = b - c = c' - b',$$
$$b = c - a = a' - c', \qquad b' = a - c = c' - a',$$

Si la operación $\circ$ es la de multiplicar, el módulo será la unidad, y los objetos recíprocos serán números recíprocos ó fracciones inversas; y siendo $c = a\,b$, las relaciones halladas son las siguientes:

$$a' = \frac{1}{a}, \qquad b' = \frac{1}{b}, \qquad c' = \frac{1}{c},$$
$$a\,a' = 1, \qquad b\,b' = 1, \qquad c\,c' = 1,$$
$$a = \frac{1}{a'}, \qquad b = \frac{1}{b'}, \qquad c = \frac{1}{c'},$$

$$c = a\,b, \qquad a = c\,b', \qquad b = c\,a',$$
$$c' = a'\,b', \qquad a' = c'\,b, \qquad b' = c'\,a,$$

$$c = \frac{a}{b'} = \frac{b}{a'}, \qquad c' = \frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}.$$
$$a = \frac{c}{b} = \frac{b'}{c'}, \qquad a' = \frac{b}{c} = \frac{c'}{b},$$
$$b = \frac{c}{a} = \frac{a'}{c'}, \qquad b' = \frac{a}{c} = \frac{c'}{a'},$$

Como casos particulares de verdadera importancia puede suponerse que los seis objetos considerados sean las funciones circulares de un mismo arco, ó las funciones hiperbólicas de un mismo argumento; pues, en ambos casos, el seno es el producto del coseno por la tangente, y la cosecante, la secante y la cotangente son respectivamente inversas de las anteriores. Podemos, pues, suponer en la figura, siendo $M = 1$, y en las relaciones últimamente halladas:

$$c = \text{sen}\, x, \qquad a = \cos x, \qquad b = \text{tg}\, x,$$
$$c' = \text{cosec}\, x, \qquad a' = \sec x, \qquad b' = \cot x,$$

ó bien,

$$c = \text{Sh}\, x, \qquad a = \text{Ch}\, x, \qquad b = \text{Th}\, x,$$
$$c' = \text{Csh}\, x, \qquad a' = \text{Sch}\, x, \qquad b' = \text{Cth}\, x.$$

Esta figura, ó círculo mnemónico, ha sido ya considerada por el Sr. Gascó en sus «Diagramas mnemónicos de Trigonometría», y mucho antes por el malogrado D. Simón Archilla en sus «Principios fundamentales del Cálculo diferencial». Pero el Sr. Gascó, cuya reciente pérdida lamentamos, sólo considera el caso de las funciones circulares, y el Sr. Archilla, aunque dándole menor desarrollo, la aplica únicamente al algoritmo de la producción, y en particular á las funciones circulares é hiperbólicas.

J. Rius y Casas,

Catedrático de la Universidad de Zaragoza.

LA MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

La Matemática es hoy una sola ciencia, no un agregado, como expresó durante mucho tiempo y aun expresa hoy comunmente la denominación de *Matemáticas*.

Aquellas ramas que con los nombres de Aritmética, Algebra Geometría, etc., parecían desarrollarse con cierta individualidad que tendía á romper la unidad de la ciencia, en un fraccionamiento que prevaleció durante algunos siglos, hoy se confunden en la ciencia íntegra y una, que aparece según los diversos puntos de vista predominantes, con uniformidad de procesos, comunidad de métodos, y unidad de objeto; y si aun hoy se siguen dichas denominaciones, esto obedece principalmente á que en la enseñanza, ó en la adquisición de los conocimientos incluídos en la Matemática, son convenientes estas disgregaciones que facilitan su asimilación á la inteligencia, donde se reunen como materiales aptos para formar la síntesis en un organismo, que puede ofrecerse constituído de diversas maneras, según las cuales se fueron agrupando, en igual forma que pudieran agruparse en un solo plano multitud de sistemas distintos del espacio, mediante proyecciones de éstos sobre aquél.

Una proyección se realiza análoga á la que vemos en la teoría de los conjuntos, de Cantor, que hace ver cómo se forma en nuestra inteligencia la noción de potencia ó de número cardinal de un conjunto, al abstraer de éste la naturaleza de los objetos y el orden en que se hallan colocados.

La inteligencia se apodera de un sistema abstracto, correspondiente á un sistema concreto; y nos hallamos en un primer caso de correspondencia, que juntamente con otros muchos que obtendremos, permite definir la Matemática, en su concepto abstracto, como ciencia de relaciones formales, que se expresan por sistemas de símbolos, constitutivos del lenguaje matemático, ya referido á objetos existentes, ya á relaciones que pueden carecer de objeto; pero que conservan una dependencia lógica, que establece una unidad donde la existencia y la no existencia se subordinan como accidentes de la relación formal, donde lo real, lo ideal, lo imaginario, lo intuitivo ó lo puramente racional existen, con igual validez, como objeto de nuestras investigaciones.

La noción de número entero, según el superior criterio de M. Poincaré, es la sola subsistente hoy, entre las antes admitidas con el caracter de primitivas. (1) Y esta noción se aplica ó puede hacerse corresponder á todo objeto que entra en el dominio matemático y que se halla constituído, en último análisis, por combinación de números enteros.

El número entero es, pues, el elemento irreducible de toda combinación matemática. Los conceptos de igualdad, desigualdad, subordinación, supraordinación, etc., resultan de relaciones entre números, ó mejor expresan, variadamente estas relaciones.

La Aritmética construye los números. Las formas que los contienen y que se estudian en la *Teoría de los números*, son lugares

(1) *L'Enseignement mathématique* núm. 3.

algorítmicos, que pueden á su vez representarse por lugares geométricos, cuando referimos cada unidad abstacta ó elemento intelectual á cada punto ó elemento del espacio; y á esta correspondencia se reducen todas las correspondencias, ya puramente geométricas, ya analítico-geométricas, que pueden concebirse en el dominio de la Matemática.

Estas correspondencias pueden establecerse de las más diversas maneras, y son objetos de cada una de las teorías matemáticas, que se hallan así enlazadas dentro de la unidad, que establece la correspondencia primitiva.

Dichas correspondencias además constituyen la materia, cuya forma es el acto intelectual, por el que unimos dos á dos los terminos del juicio, elemento lógico; y que expresamos en el lenguaje ordinario mediante proposiciones y en el lenguaje matemático mediante fórmulas, que son abreviaciones de aquél, ó mediante figuras geométricas, que son también sus representaciones más concretas.

La Matemática es, pues, una serie de correspondencias, de representaciones ó de relaciones; y en el riguroso mantenimiento de éstas estriba su unidad, que prescinde de la existencia efectiva del objeto, en muchos casos, conservando siempre la relación lógica, subordinada tan solo á que nunca se invalide el principio de contradicción. Lo real desaparece bajo el símbolo de lo imaginario, que representa una contradicción, es decir, un estado especial de varios juicios lógicos incompatibles, de igual manera que lo infinito expresa una negación que completa el sistema de las afirmaciones en el dominio de lo finito; y de esta manera la Matemática abarca, en un sistema, todo el dominio de la posibilidad.

La Matemática tiene parcialmente su realización en la Naturaleza; en ésta simultáneamente se realizan las leyes del número aplicadas á variedad de objetos; espacio, tiempo, fuerza; y esta complejidad expresa, desde luego, que sólo como artificio metódico puede adoptarse la antigua división de esta ciencia en ciencias distintas, que aparecían con ciertas conexiones, pero sin una fusión completa. Invirtiendo el orden natural, para pasar de lo abstracto á lo concreto, de lo simple á lo complejo, podremos ver además, cómo dichas divisiones son puramente convencionales, ya que nada fija sus límites propios, puesto que se compenetran, y tan solo se distinguen en el predominio de un objeto sobre otro, que son reductibles mútuamente, mediante la noción común de número que los envuelve.

La Aritmética tiene su elemento en el número primo, sus proposiciones llevan á expresar por éstos los compuestos.

Las fórmulas distribuyen los números en sistemas, y se estudian, ya cada uno en su modo de composición, ya en sus relaciones.

La adjunción de nuevos objetos, en cada sistema previamente formado, permite ir suprimiendo imposibilidades, y extender el campo de la realidad. La adjunción hace cada vez más densa la serie de los números, intercalando en la serie de los enteros las de los fraccionarios, inconmensurables y transcendentes; y las operaciones adquieren generalidad, quedando libres de excepciones.

Los sistemas de números tienen su representación por sistemas de puntos.

La representación de sistemas numéricos en una recta, puede ser simplemente cómoda en algunos casos, como esquema de otras operaciones abstractas; pero también puede tener por fin crear nuevos objetos de investigación matemática.

Un conjunto ó variedad puede estar formado de objetos en una disposición cualquiera, sin considerarse su aspecto geométrico; pero podemos atender especialmente á éste, y considerar, primero una variedad de puntos y en ésta los sistemas de los que se hallan en línea recta, y aun los que se hallan en un plano, dando origen á sistemas especiales, pues en el primer caso, dichos puntos poseerán una nueva propiedad, la de permutarse simplemente por el movimiento posible del sistema (resbalamiento), cuando se han fijado dos cualesquiera; en el segundo caso ocurrirá esto mismo, cuando sean tres los puntos fijos.

Estas definiciones introducen en la ciencia los elementos necesarios y suficientes para construir toda la Geometría. Y así como en la Aritmética la combinación de los algoritmos creó sistemas de números, la combinación de puntos, de rectas y de planos crea todos los lugares geométricos, ya tomando como elemento el punto, la recta, el plano ó cualquier otra figura, de manera que, entre el espacio puntual y el espacio tangencial, existe el espacio reglado en el que la recta es el elemento; y aun se ha llegado á la geometría del círculo en la cual el elemento es el sistema de dos puntos ó el punto doble, y que estudia las superficies circuladas, análogamente á como se estudiaron las superficies regladas, en el espacio reglado.

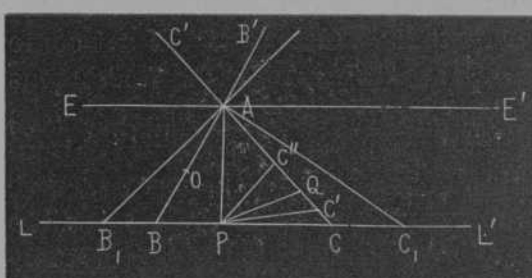
El número de elementos necesarios para determinar cada sistema ú objeto de éste es lo esencial, en la constitución de cada teoría ó rama de la Matemática, cuyo desarrollo luego se verifica por transformaciones, en las que se debe tener en cuenta la relación de equivalencia entre elementos que se sustituyen y que se enuncian en teoremas, distintos por la forma del enunciado; pero que son simples transformados los unos de los otros, de igual manera que en Geometria lo son unas formas de otras, proyectivas entre sí.

Un primer ejemplo de esta transformación de enunciados equivalentes nos ofrece la Geometría elemental, que se somete constantemente á la equivalencia de los dos términos de cada juicio lógico, de que es un mero enunciado cada proposición ó teorema.

Ya, en el tomo V de esta REVISTA, comenzó á publicarse una *Exposición sistemática de las nociones de Geometría*, basada en el giro de un plano al rededor de una de sus rectas, lo que permite demostrar, como primera proposición, la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, y el giro de una recta al rededor de un punto exterior á otra, lo que permite demostrar sistemáticamente multitud de teoremas, haciéndose patente la equivalencia de muchos enunciados mediante transformaciones, donde se hace notar la correspondencia unívoca. (1)

El teorema relativo á la suma angular constante á un lado de una recta, se transforma en el de la suma angular constante en el triángulo, de igual manera que en los concernientes á los ángulos formados por una secante con dos rectas paralelas.

Estas transformaciones y otras se efectúan mediante las construcciones auxiliares, que sirven para enlazar la hipótesis con la tésis en el razonamiento demostrativo.



Desde luego, en dicha exposición, se deduce inmediatamente (2) cada una de las rectas trazadas por A y terminadas en la recta L L', de otra que con el segmento de L L', que interceptan, forman un triángulo, mediante la relación que la trigonometría establece entre dos lados del mismo y que está formada por relaciones de segmentos. Y la abreviación introducida con el procedimiento expuesto, que

(1) Véase *Prog. mat.* tomo V págs. 38-39.

(2) *Prog. mat.* t. V págs. 85-86.

permite definir desde luego el coeficiente de transformación mediante relaciones de segmentos, hace ver cómo la trigonometría puede perder esa independencia que se le atribuye en los planes de estudios, reduciéndose á un capítulo de la Geometría, pues además la consideración de la altura común A P y los segmentos P C, P C_1, ... en correspondencia unívoca con los ángulos, establecen una correspondencia entre éstos y la relación de los catetos que en trigonometría se llama tangente; y observándose que para todas las fajas de igual anchura que la determinada por el punto A y la recta L, se repiten las mismas relaciones, y que al obtener series de triángulos homotéticos, se puede referir la determinación métrica de cualquier triángulo rectángulo á toda la variedad que ofrecen los formados sobre el cateto AP, y que de la relación en cada dos triángulos rectángulos se deduce la relación en un triángulo oblicuángulo, queda con esto establecida la relación métrica de las figuras. Resulta pues de estas consideraciones, que puede exponerse la Trigonometría como un capítulo de la Geometría, concerniente á las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Es cómodo y breve el deducir las relaciones entre las líneas trigonométricas con auxilio del cálculo, como se hace en la totalidad de los tratados conocidos; pero también debe observarse que conviene, preferir demostraciones puramente geométricas de dichas relaciones, según lo hizo el abate Gelín en sus *Elements de Trigonométrie*, (1) y puede citarse, como ejemplo de esta tentativa, el artículo *Demostrations geométriques de quelques formules de trigonométrie* publicado por M. Roubaudi en el *Bulletín scientífique* (1894).

Respecto á la geometría, ya se expuso en el número anterior de esta Revista, que la doble tentativa encaminada á fundir las geometrías plana y del espacio, y á hacer independiente, en lo posible, la Geometría de la noción de número, ha realizado importante progreso, siendo hoy objeto de preferente atención entre los geómetras.

Sin olvidar la obra, *Nouveaux èlèments de Géométrie*, que publicó M. Meray en 1874, abandonando la distinción entre las geometrías plana y en el espacio, debe notarse que en los *Elementi di Geometria* de los Sres. Lazzeri y Bassani se retrasa hasta el

(1) Véase *Prog. mat.* t. III pág. 254 y Galdeano, Geometría general parte 1.ª págs. 88-89.

libro IV el tratar de la *equivalencia* y de las *relaciones métricas*, habiendo conseguido construir los polígonos y los poliedros regulares independientemente de estas relaciones, lo que de análoga manera se expuso en un trabajo sobre la *sistematización de la Geometría* (1) tratando de los polígonos regulares.

La obra de los Sres. Lazzeri y Bassani establece pues, en lo posible hasta ahora, la línea divisoria entre la Geometría pura y la aplicación de la Aritmética, en la teoría de la medida, dejando para el libro V y último el tratar de las aplicaciones del Algebra á la Geometría. Y en esto último vemos cómo las ciencias parciales, que constituyen en su conjunto la Matemática, no han llegado á una independencia absoluta; que en algunas regiones debe existir cierta compenetración, sin que cada ciencia tenga su carácter propio; lo cual no debe olvidarse en la enseñanza, cuyos procesos exigen el desatender, en determinadas ocasiones, la rigurosa organización de la Matemática en bien del desarrollo intelectual, ó tener muy presente la adaptación de la ciencia á la naturaleza de nuestra inteligencia.

Es absurdo el anteponer el Algebra á la Geometría, porque ésta exija para la resolución de algunos de sus problemas el auxilio de aquélla.

El Algebra es la ciencia de los grupos discontinuos que forman las sustituciones de las letras componentes de las funciones especialmente los grupos de Galois y Abelianos: y la resolución de las ecuaciones, que es el problema del Algebra ordinaria, depende de dichos grupos. Esto es lo característico del Agebra, que también tiene diversos puntos de afinidad con otras ramas de la Matemática.

Así el Algebra tiene un carácter combinatorio que la constituye como ciencia simbólica, y entonces forma una rama superior, que incluye, como caso particular, al Algebra ordinaria, esto es el *Algebra universal* en la que se emplean símbolos, los *extraordinarios*, según la expresión de Cayley, cuyas leyes de combinación estan dadas constituyendo la especie de Algebra, y dando origen, por sus aplicaciones concretas, á una clasificación de Algebras Geométricas; y aun el Algebra ordinaria dando representación á las cantidades complejas, incluye en su dominio lo mismo lo abstracto de la teoría de los números que lo concreto de la cantidad geométrica.

Z. G. de G.

(1) *Prog. mat.* t. V pág. 87.

ESTUDIOS SUPERIORES EN EL ATENEO DE MADRID

LA MODERNA ORGANIZACION DE LA MATEMÁTICA

(Curso breve explicado por D. Zoel G. de Galdeano en Marzo de 1898)

EXTRACTO DE LA CONFERENCIA SEGUNDA

TEORÍA DE LOS NÚMEROS.—*Influencia de Gauss — Teorías de Kummer y Dedekind.—Concepto de los conjuntos de Cantor —Investigaciones de Bois-Reymond.—Moderna exposición de la Aritmética general y de la teoría de las magnitudes ó de las funciones de variables reales.*

SEÑORES: Voy á exponer someramente las fases por que ha pasado la teoría de los números, hasta llegar al estado de generalidad actual, y que una vez más harán ostensible la ley de graduación y de sucesivo perfeccionamiento que sigue la ciencia en sus progresos.

En todas las ramas de la Matemática, las teorías se elevan sobre la base de problemas, cuyas resoluciones han permitido obtener verdades en forma de teoremas.

Aparte de propiedades de los números descubiertos mediante el análisis directo sobre los mismos, que han permitido clasificarlos en naturales, triangulares, triángulo-triangulares, tetragonales, poligonales, piramidales, etc., los primos y compuestos, amigables, perfectos, etc., la resolución de ecuaciones condujo á resultados de interpretación difícil en épocas pasadas, que se declaran al principio como incomprensibles, pero que luego han ido extendiendo las clases de los números, hasta llegar al número complejo, á los números ideales, á las unidades fundamentales, á los extraordinarios etc.

En general, al pretenderse resolver las operaciones inversas del cálculo, han surjido resultados inexplicables por efecto de cierta incompatibilidad entre las condiciones del problema, impuestas *á priori*, y la naturaleza de los resultados que se pretendiera obtener. Así ha avanzado el Algebra en la discusión de los problemas, que han exigido generalizaciones sucesivas de los conceptos de número y de operaciones, como se ve en los libros destinados á la enseñanza y como finalmente expuso Duhamel en sus *méthodes dans les sciences de raisonnement*.

Otra idea de gran importancia desarrolla Poinsot en sus *Ré-*

flexions sur la théorie des nombres, al considerar, no solo un Algebra que tiene por objeto las magnitudes y su medida, sino la que trata del orden y la colocación de los objetos, aplicando este concepto de orden á la demostración de varias propiedades de los números con auxilio de los polígonos y poliedros estrellados, y Gergonne, al buscar una interpretacion de las cantidades imaginarias, coloca al lado de los números cardinales series de números ordinales.

Estos preliminares, que hacen ver cuán dificil es aislar en absoluto las ramas de la ciencia, pues la teoría de los números no deja de tener sus enlaces con el Algebra, ni de subordinarse á conceptos generales y comunes á ambas, nos permitirán entrar en la cuestión con toda la amplitud de miras que exige.

Los notables descubrimientos de Fermat con motivo de la Aritmética de Diofanto, expresado en la fórmula

$$x^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$$

y la de Euler

$$x^{\varphi(N)} \equiv 1 \ (\text{mod. N.})$$

que son la base de la teoría de la periodicidad de restos, y los resultados obtenidos por Euler, Lagrange y Legendre, constituyen el legado de las épocas pasadas á este siglo, en cuanto concierne á la teoría de los números que recoje Gauss, y lo eleva á una síntesis que casi domina todo este siglo, pues abarca, no solo los conceptos propios de esta teoría, sino otros conceptos que han servido de fundamento á nuevas ramas de la Matemática.

Al proponer el problema de la división de la circunferencia en partes iguales, obtiene la distribución en períodos de las raíces de la ecuación empleando la variable compleja

$$\cos\frac{2k\varphi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\varphi}{n},$$

y establece el fundamento de las ecuaciones abelianas, pues consiste su método en descomponer una función X en factores, de modo que sus coeficientes puedan determinarse por ecuaciones de grados inferiores, resolviéndose X en a factores del grado $p-1:a$; después cada uno de éstos en fractores del grado $p-1:ab$, etc., descomposiciones solo posibles *cuando dos raíces de una ecuación irreducible se hallan sometidas á ley de ser una de ellas función racional de la otra*, es decir, cuando la ecuación es abeliana.

En la teoría de las formas cuadráticas aparece el gérmen de la teoría de las invariantes, pues sometiendo la forma

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2$$

á la sustitución

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad y = \gamma x' + \delta y' \qquad (1)$$

se transforma en $a x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2$, siendo

$$a' = a \alpha^2 + 2 b \alpha \gamma + c \gamma^2, \quad b' = a \alpha \beta + \text{etc.}, \quad c' = a \beta^2 + \text{etc.},$$

al mismo tiempo que las determinantes

$$\mathrm{D} = b^2 - a c, \qquad \mathrm{D}' = b'^2 - a' c'$$

se hallan ligadas por la relación $\mathrm{D}' = (\alpha \delta - \beta \gamma)^2 \mathrm{D}$.

La idea culminante es la equivalencia de dos formas, ó sea la propiedad de representar ambas los mismos números.

Si para $x' = r'$, $y' = s'$ la forma $(a' b' c')$ representa un número m, en virtud de la sustitución (1), para $x = r$, $y = s$, la forma $(a b c)$ representará el mismo número, es decir, que la forma $(a b c)$ contendrá á la $(a' b' c')$; y para que además la $(a' b' c')$ contenga á la $(a b c)$, la determinante $\alpha \delta - \beta \gamma$ ha de ser igual á ± 1.

Análogamente á lo establecido en la teoría de los números, Gauss obtiene series de formas tales, que cada una contiene á su inmediata propia ó impropiamente, según que el valor de la determinante sea positivo ó negativo, y siendo dichas formas $f', f', f'', \ldots$, su conjunto F constituye una clase; y todas formas con igual derminante se distribuyen en sus diferentes clases, obteniéndose un *sistema completo de formas no equivalentes*, si se toma de cada clase una forma como representante de la misma.

Los dos problemas capitales de esta teoría son averiguar *si dos formas con igual determinante son ó no equivalentes, y obtener todas las sustituciones, por medio de las que una forma se transforma en otra equivalente ó en sí misma*, que resolvió Gauss introduciendo el concepto de formas *reducidas*, cuyos tipos son

$$\left(a, \frac{1}{2} a, c\right) \text{ y } \left(a, -\frac{1}{2} a, c\right) \qquad (a, b, a) \text{ y } (a - b, a)$$

y de formas *contiguas* (a, b, c) y $(a', b' c')$ tales, que $c' = a$ y $b + b'$ son múltiplos de a, siendo la primera contigua á la *derecha* de la segunda, y ésta contigua á la *izquierda* de aquélla.

Construyéndose pues, una reducida contigua á la derecha y otra á la izquierda de una reducida correspondiente á una determinante dada, se distribuyen todas las formas reducidas correspondientes á una determinante positiva dada en períodos, por ejemplo, el

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{2n-1}$$

de modo que φ_{2n-1} será la primera forma equivalente á la φ_2 en esta serie, y si no se han agotado todas las reducidas, aun pueden obtenerse otros períodos hasta agotarlas; y Gauss demostró que *la condición necesaria y suficiente para que dos formas reducidas, de igual determinante positiva, sean equivalentes es que pertenezcan al mismo período.*

Otro resultado importantísimo obtenido por Gauss en la teoría de los números fué el extender las leyes de la divisibilidad á los números complejos, mediante el concepto de *norma* $u^2 + v^2$ de los números conjugados $u + vi$, $u - vi$, obteniendo la expresión fundamental en la teoría de la divisibilad, $z = mq + r$, con las condiciones

$$\text{norma de } r < \text{norma de } m \qquad \text{y norma de } w - q \leqq \frac{1}{2}$$

Después de Gauss, tratan Kummer y Dedekind de reducir las leyes de divisibilidad de nuevos dominios numéricos á una conformidad con las de los números racionales, pues Kummer en sus investigaciones acerca de los números pertenecientes á la teoría de la división de la circunferencia que corresponden á la ecuación $t^m = 1$, notó que mientras en el dominio de los números enteros racionales y complejos, un número *solo puede descomponerse de una manera en factores primos, en estos dominios pueden admitir varias*, es decir, obtuvo que los números simples no poseen la *propiedad de los llamados números primos, de no dividir á un producto si no dividen, por lo menos, á alguno de sus factores.*

Así por ejemplo, para los número simples

$$a = 2,\ b = 3,\ d_1 = 1 + \theta,\ d_2 = 1 - \theta,\ b_1 = -2 + \theta,\ b_2 = -2 - \theta,$$

siendo θ raíz de la ecuación $\theta^2 + 5 = 0$, se obtiene

$$a\,b = d_1\,d_2 \quad ó \quad 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})\,(1 - \sqrt{-5})$$

$$b^2 = b_1\,b_2 \quad ó \quad 3^2 = (2 + \sqrt{-5})\,(2 - \sqrt{-5})$$

Pero estas consideraciones exigen que se antepongan algunos de los conceptos debidos á Dedekind en la teoría de los números. Para este matemático, la más elevada noción de número algébrico consiste en la propiedad de satisfacer á la ecuación

$$\theta^n + a_1\,\theta^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

siendo $a_2 \ldots a_n$ números racionales, y en el caso de ser éstos enteros, el número algébrico correspondiente será entero, resultando como primera consecuencia, que las sumas, diferencias, productos y cocientes de números enteros serán también números enteros.

Pero, entre todas las ecuaciones con coeficientes racionales de las que θ es raíz, existe una sola de grado inferior

$$\theta^n + a_1\,\theta^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

que se llama irreducible; y si $x_0 \ldots x_{n-1}$ son números racionales arbitrarios, todos los números de la forma

$$\varphi(\theta) = x_0 + x_1\,\theta + \ldots \, x_{n-1}\,\theta^{n-1},$$

cuyo complejo se designa por Ω, serán números algébricos que poseerán la propiedad de que sus sumas, diferencias, productos y cocientes pertenecen al complejo Ω, al que llama Dedekind *cuerpo finito de grado n;* y considerando el complejo $\mathfrak{o}$ de los números enteros comprendidos en Ω, procedió á establecer las leyes generales de divisibilidad que rigen á este dominio.

Kummer había conseguido esto auxiliado por la concepción de sus números ideales, que no aparecen por sí, aislados, sino combinados, y obtuvo por resultado que las leyes de divisibilidad de los números estudiados por él, coinciden con las que rigen á los números enteros racionales.

Los números ideales, que se cambian en existentes por la combinación con un mismo ideal, se llaman equivalentes. Los números ideales, equivalentes á un mismo ideal, forman una clase de números ideales.

Los números existentes son un caso particular de los ideales y forman la clase principal.

Si un número α posee cierta propiedad A, consistente en que α satisface á una ó varias congruencias, dice Kummer que α es divisible por un número ideal determinado, correspondiente á la propiedad A.

Dedekind, al concepto de *número ideal* de Kummer sustituye *un sistema de números realmente existentes* al que llama *un ideal*, ó sea el conjunto **a** de todos los α del dominio **o** que son divisibles por un número ideal determinado; de manera que á todo número ideal determinado corresponde un *ideal* determinado **a**.

Los números realmente existentes en **o**, que se presentan en primera línea como factores de números compuestos, son un caso particular de los números ideales, de manera que si μ es un número determinado de **o**, el sistema **a** de todos los números $\alpha = \mu\,\omega$ del dominio **o** divisibles por μ, tendrá el caracter esencial de un ideal, y se llamará un *ideal principal*,

Todo sistema **a** *de números enteros del cuerpo* Ω *se llama ideal de este cuerpo, posee las propiedades siguientes:*

1.ª *Las sumas y las diferencias de dos números cualesquiera del sistema* **a** *son siempre números de éste.*

2.ª *Todo producto de un número del sistema* **a** *por un número del sistema* **o** *es un número del sistema* **a**.

Este procedimiento consistente en establecer de una vez todas las propiedades A, B, C, ... que sirven para la introducción de números ideales en el dominio **o**, y en deducir de dos de estas propiedades A, B, á las que corresponden dos números ideales determinados, la propiedad C correspondiente al producto de estos dos números, es el mismo que empleó Dedekind para introducir los números irracionales, con auxilio del conjunto R de los números racionales, de manera que la definición ó creación del número irracional deba fundarse en fenómenos comprobados claramente en el dominio R, y que todos los números irracionales puedan engendrarse á la vez por una definición común, y no sucesivamente como raíces de las ecuaciones, como logaritmos, etc.

Esto se realiza por medio de las *secciones* ó divisiones del dominio R en dos categorías tales, que todos los números de la primera sean inferiores á todos los números de la segunda. Cada número racional a engendra una sección, de modo que un número racional cualquiera quedará clasificado en la primera ó segunda categoría, pudiendo él quedar colocado á voluntad en la una ó la otra; pero además existe una infinidad de secciones que no pueden *engendrarse* por números racionales; y para cada una de ellas se introduce un número *irracional*, correspondiente á esta sección.

Para dos números racionales ó irracionales α y β se podrán definir las relaciones $\alpha > \beta$ ó $\alpha < \beta$, según las secciones que engendran y también las cuatro secciones correspondientes á la suma, diferencia, producto y cociente de dichos números, llegando á formar los números racionales y los irracionales reunidos un dominio continuo.

Llegamos á un punto de la doctrina expuesta por el Sr. Dedekind, que constituye una especie de teoría proyectiva análoga por este caracter á la del Sr. Cantor.

Esta especie de proyectividad numérica la establece el Sr. Dedekind observando que, si en un sistema A de objetos ó elementos se sustituye a por a' según cierta ley $a' = \varphi\, a$, el sistema A se reduce á otro sistema A' que es su *imagen* ó *representación;* y si aplicando las operaciones racionales á números cualesquiera u, v, w, ... del cuerpo A se engendra un número t, se obtendrán por las mismas operaciones aplicadas á las imágenes u', v', w', . . . la imagen t' de t, subsistiendo las relaciones

$$(u+v)' = u' + v',\ (u-v)' = u' - v',\ (u\,v)' = u'\,v',\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$$

y en general, aplicando una sustitución φ á un cuerpo A se obtiene otro cuerpo A', que es su imagen.

(Se continuará.)

BIBLIOGRAFÍA

LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS par *E. Borel.*—París, Gauthier-Villlars, 1898.—En esta obra el autor se ha propuesto dar á conocer los conceptos fundamentales de una teoría que á pesar de su novedad se ha extendido, siendo ya objeto de diversas aplicaciones, como lo demuestran el *Cours d' Analyse* de M. Camile Jordan, la *Introduction á la théorie de fonctions d' une variable* de M. Tannery; y la *Teoria delle grandezze* del Sr. Bettazzi.

La teoría de los conjuntos del Sr. Cantor es el objeto principal de la obra escrita por el Sr. Borel, y su título sólo manifiesta que trata en ella preferentemente de las aplicaciones, dando á conocer, con este motivo algunos resultados importantes acerca de las teorías de las funciones, debidos á los Sres. Weierstrass, Poincaré y Mittag-Leffler.

Parte el Sr. Borel de la noción de potencia en que estriba la teoría de los conjuntos, que permite referir unos á otros, estableciendo una correspondencia unívoca entre sus elementos.

Entre las potencias de los conjuntos, considera como la más simple la de los números enteros positivos, y á este conjunto refiere los conjuntos enumerables, empleando consideraciones geométricas, en este procedimiento de *numerar* los puntos de un conjunto por medio de los enteros positivos. Esto permite la comparación de los conjuntos enumerables con otros conjuntos, y ocupándose exclusivamente de los conjuntos *infinitos*, expone el Sr. Borel, cómo pueden suprimirse de estos conjuntos infinidad de elementos que formen conjuntos enumerables, sin alterar la potencia.

Conocido un conjunto no enumerable, el de los números reales comprendidos entre 0 y 1 que tiene la potencia del *continuo*, y el de los números enteros positivos, ya se tiene la base para las aplicaciones, y el Sr. Borel trata enseguida de: el conjunto de los números algébricos que es enumerable; pero, existiendo en todo intervalo una infinidad no enumerable de números algébricos, indica las investigaciones de los Sres. Hermite, Lindemann y Liouville acerca de los números transcendentes.

Los conjuntos perfectos y los conjuntos mensurables conducen á las aplicaciones analíticas, que comienzan con la *prolongación analítica* de las funciones, siguiendo las investigaciones sobre las *series* de *funciones uniformes*, *convergencia de ciertas series reales* y la *de función de una variable compleja*, donde se trata de las: funciones y expresiones analíticas, de las representaciones analíticas, series de fracciones racionales, etc., concluyendo con algunas notas.

Elements d'Analyse mathématique á l'usage des ingenieurs et des physiciens, par M. Apell.—*Georges Carré et Naud*. París. 1898.—Como su título indica, esta obra, destinada á los ingenieros y arquitectos, está despojada de conceptos metafísicos y esencialmente abstractos propios del hombre teórico; pero en cambio resalta la sencillez y claridad en la exposición, debida á un tan ilustre maestro en la ciencia y en la enseñanza; tiene el caracter dominante de presentar como facil lo que de ordinario aparece como dificil. La exposición simultánea del cálculo diferencial é integral, predominando este segundo, abrevia el camino, y conduce directamente á las aplicaciones; las 224 figuras intercaladas en el texto hacen intuitivo el estudio, en el que resaltan las aplicaciones geométricas.

El orden de exposición es el siguiente: Infinitamente pequeños, diferenciales, integrales indefinidas y definidas, volúmenes, rectificaciones de curvas, áreas de superficies de revolución y de superficies cónicas, métodos de integración, desarrollos de funciones. Tangentes, máximos y mínimos, curvas alabeadas, plano osculador, envolventes, curvatura, líneas trazadas en superficies, terminando en la teoría de tangentes conjugadas. Integración á lo largo de una curva plana, aplicaciones de las integrales múltiples á las áreas y volúmenes y ecuaciones diferenciales, donde tienen gran importancia las interpretaciones geométricas.

Periodico di Matematica, per l'insegnamento secondario.— Director Dott. G. Lazzeri. Sumario: *Pirondini*, Proiezione stereografica e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche. - *Andreini*, Intorno ad una propieta singolare di alcuni numeri ed al criterio di divisibilitá ad essi relativo.—*Ducci*, sulla conversione di un radicale quadratico in frazione continua.—*Palatini*, sopra una serie di segni positivi e negativi.—*Fellini*, Sugli esagoni di Pascal e di Brianchon.—Questioni, bibliografie.

Rendiconti del circulo matematico di Palermo t. XIII fascicolo III e IV.

Indice delle materie.—*Alagna* Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un número primo, ovvero il doppio d'un número primo.—De Francis.--Riduzione dei sistemi lineari ∞^k di curve piane di genere 3, per $k > 1$.—Gerbaldi Sul gruppo semplice di

360 collineazioni piane.—DE FRANCHIS, Sulle reti sovrabondanti di curve piane di genere 2.—Bourlet, sur la determination de la surface d'un piste de vélodrome.—LOVETT, Note on the contact Transformation of developpable Surfaces.

CRÓNICA

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid

Programa de premios para el Concurso del año 1900

1.º—«*Estudio de la deformación de una placa elástica rec»tangular, sujeta á fuerzas diversamente distribuídas por su »superficie*».

Navier estableció las ecuaciones diferenciales del equilibrio de una placa rectangular en el *Bulletin de la Société Philomatique* de 1823, integrándolas solamente para los casos de tener fijos los cuatro lados ó los cuatro ángulos. La Academia desea que las ecuaciones se integren para mayor número de casos, sobre todo para aquellos de más inmediata aplicación á las construcciones, bien sea por no tener fijo todo el perímetro, ó porque las fuerzas se repartan de diversas maneras no uniformes, ó porque se dé la dirección del plano tangente el algunos puntos.

2.º—*Descripción de los experimentos fundamentales de* Herz »*sobre formación y propagación de las ondas electro-magnéticas*; »*teoría de los fenómenos descubiertos por dicho físico; y aplica»ciones de las mencionadas ondas á la transmisión de señales*».

3.º—*Descripción geológico-agronómica de una región vitícola »de nuestra Península*»

Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mención honorífica*.

El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiese merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la Colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

La Real Academia de Ciencias de Madrid, después de examinar las Memorias presentadas con opción á premio en el curso abierto hasta el 31 de Diciembre de 1897, ha acordado:

1.° Que las Memorias señaladas con los lemas: *Un géomètre ne doit pas être moins glorieux d'avoir donné son nom á une courbe que'un prince d'avoir donné le sien a une ville.—(Fontenelle)* y *l'Algèbre n'est que une géométrie écrite, la géométrie est une algèbre figurée (S. Germain)*, eran merecedoras de *premio*.

2.° Que la otra Memoria, señalada con el lema: *In tenui labor, at tenuis non gloria*, era merecedora de *accesit*.

Abiertos los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias, donde debían constar los nombres de sus autores, resultaron ser éstos respectivamente:

De las memorias agraciadas con *premio*, el profesor Gino Loria, de la Real Universidad de Génova, y el profesor F. Gomes Teixeira, de la Escuela Politécnica de Oporto.

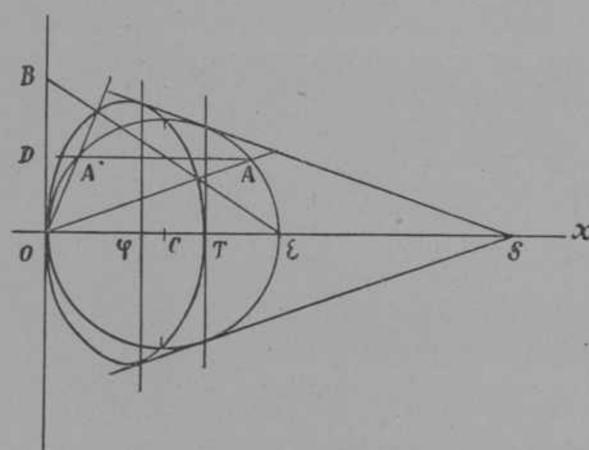
Y de la Memoria agraciada con *accesit*, D. Joaquín de Vargas y Aguirre, residente en Salamanca.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 256.

(Véase pág. 32).

Se da una circunferencia, un diámetro OCE y la tangente OB en O, se proyecta un punto A de la curva en D; sobre OB se toma $DB=OD$. Obtener el lugar (M) de la intersección de las rectas OA, BE. Determinar los puntos de intersección de las tangentes comunes al círculo y á la curva (M)



(*H. Brocard.*)

Solución por el Sr. V. RETALI.

Tomando por ejes coordenados OE y OB, la ecuación del círculo es $x^2 + y^2 - 2rx = 0$; si A' es la intersección del círculo con la recta [DA], la ecuación de las dos rectas [OA] y [OA'] es, haciendo

$$OD = \lambda, \qquad 2ryx - \lambda(x^2 + y^2) = 0,$$

y la de la recta [EB] es $\lambda x + ry = 2\lambda r$; eliminando λ tenemos, para ecuación del lugar de M, $3x^2 + y^2 - 4rx = 0$, una elipse tangente al círculo en O, que pasa por los extremos del diámetro perpendicular á OE, cuyo eje menor es $\frac{4r}{3} = OT$. Las tangentes trazadas al círculo por el punto S, simétrico de O, respecto al E, tocan á la elipse sobre la recta $x = \frac{4r}{5}$.

Otra solución:

Si la ecuación del círculo es	$y^2 + x^2 - 2rx = 0$
La ecuación (M) será	$y^2 + 3x^2 - 4rx = 0$

que es una elipse que pasa por los puntos máximo y mínimo del círculo. Las tangentes comunes forman un triángulo cuya base es doble de la cuerda al cuadrante del círculo, y su altura el doble al diámetro.

Anónimo.

NOTA. Análoga solución nos há remitido desde Barcelona D. Ricardo Caro.

CUESTIÓN 162

(Véase tomo IV página 64)

Se dan dos círculos en magnitud y posición, lugar de los puntos tales, que las tangentes á aquéllos estén en una razón constante. Determinar las condiciones necesarias y suficientes para que dicho lugar sea una línea real.

(*G. Pirondini.*)

Solución por el Sr. RETALI (V).

Tomando el eje radical de los dos círculos por eje de la y, por eje de la x la recta que une los centros, las ecuaciones de los dos círculos dados son

$$x^2+y^2-2kx\pm\delta^2=0, \qquad x^2+y^2-2k'x\pm\delta^2=0$$

en las cuales debe tomarse δ^2 con el signo + ó − según que los dos puntos á distancia finita, comunes á los dos círculos, sean imaginarios ó reales.

El cuadrado de las tangentes trazadas desde un punto á uno de los círculos dados, se obtiene sustituyendo en su ecuación las coordenadas del punto, por lo cual, expresando por ρ la razón constante, la ecuación del lugar hallado es

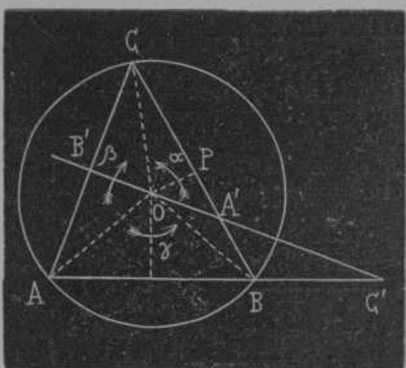
$$x^2+y^2-2\left(\frac{k-\rho^2 k'}{1-\rho^2}\right)x\pm\delta^2=0$$

esto es, un círculo que pasa por los puntos comunes á los dos círculos dados. Este círculo será real si

$$\left(\frac{k-\rho^2 k'}{1-\rho^2}\right)\mp\delta^2>0.$$

CUESTIÓN NÚMERO 240 BIS

Si por el centro O *del círculo circunscripto á un triángulo* ABC *se traza una transversal que encuentre á los lados* BC, CA, AB *en* A', B', C', *se tiene en magnitud y signo.*



$$\frac{\mathrm{O\,A'}}{\mathrm{C'A'}}\cdot\frac{\mathrm{C'B}}{\mathrm{A\,B}}=\frac{\cos A}{2\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C}$$

$$\frac{\mathrm{O\,B'}}{\mathrm{A'B'}}\cdot\frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{A\,B}}=\frac{\cos B}{2\,\mathrm{sen}\,C\,\mathrm{sen}\,A}$$

$$\frac{\mathrm{O\,C'}}{\mathrm{B'C'}}\cdot\frac{\mathrm{B'A}}{\mathrm{C\,A}}=\frac{\cos C}{2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B}$$

(*H. Van Aubel.*)

Solución por D. JUAN V. ALONSO

El fundamento de este teorema es la propiedad, fácil de demostrar, de que los ángulos que forman entre sí los radios correspondientes á los tres vértices son iguales, respectivamente, al doble de los ángulos opuestos del triángulo. En efecto, llamando α, β, γ dichos ángulos centrales, podremos escribir, en vista del cuadrilátero birectángulo OPBQ.

$$180^0 - B = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(360^0 - \beta)$$

de donde $\beta = 2\,B$, y del mismo modo $\alpha = 2\,A$, $\gamma = 2\,C$.

Disponiendo ya de esta lema, para completar la demostración únicamente tenemos que aplicar el principio de la proporcionalidad de lados de un triángulo con los senos de los ángulos opuestos.

Obtengamos por ejemplo la primera de las relaciones propuestas. El triángulo OQB nos da

$$\frac{O\,B}{O\,B} = \frac{1}{\text{sen C}}, \text{ ó bien, } \frac{O\,B}{A\,B} = \frac{1}{2\,\text{sen C}}$$

El triángulo, OBA', teniendo en cuenta el lema da,

$$\frac{O\,A'}{O\,B} = \frac{\text{sen } O\,B\,P}{\text{sen } O\,A'B} = \frac{\cos A}{\text{sen } A'}$$

Por último, en el triángulo A'BC, se tiene

$$\frac{C'\,B}{C'\,A'} = \frac{\text{seno } A'}{\text{seno } B}$$

Multiplicando las tres igualdades obtenidas, resulta:

$$\frac{O\,A'.\,C'\,B}{A\,B.\,C'\,A} = \frac{\cos A}{2\,\text{sen B sen C}}$$

que es lo que queríamos demostar.

CUESTIÓN 231.

(Véase tomo IV pág. 343).

Resolver el sistema de ecuaciones.

$$x(a - x) = y(b - y) = z(c - z) \qquad (1)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2 \qquad (2)$$

(*E. Lemoine*).

Solución por el Sr. Sollertinsky.

Restando del número 3 los dos miembros de la ecuación (2), se obtiene

$$\frac{a-x}{a} \pm \frac{b-y}{b} + \frac{c-z}{c} = 1$$

de donde $$\frac{x(x-a)}{a x} + \frac{y(b-y)}{b y} + \frac{z(c-z)}{c z} = 1$$

luego, suponiendo que los productos iguales que forman los numeradores no sean nulos, se tendrá

$$\frac{1}{a x} + \frac{1}{b y} + \frac{1}{c z} = \frac{1}{z(c-z)}$$

de donde $$\frac{a x + b y}{a x \cdot b y} = \frac{1}{z(c-z)} - \frac{1}{c z} = \frac{1}{c(c-z)}$$

y por consiguiente $$(a x + b y)\, c^2 = \frac{a x \cdot b y \cdot c z}{z(c-z)}$$

De esto resulta que

$$(a x + b y)\, c^2 = (b y + c r)\, a^2 = (c z + a x)\, b^2$$

y dividiendo por $2\, a^2\, b^2\, c^2$,

$$\frac{a x + b y}{2\, a^2 b^2} = \frac{b y + c z}{2\, b^2 c^2} = \frac{c z + a b}{2\, c^2 a^2}$$

luego $$\frac{a x}{a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2} = \frac{b y}{2\, b^2 c^2} = \frac{c z}{c^2 a^2 + c^2 b^2 - a^2 b^2} = k$$

La ecuación (2) dará el valor de K, y se tendrá así un sistema de las soluciones de las ecuaciones dadas.

Los otros tres sistemas son evidentemente

$$a,\ b,\ o;\ a,\ o,\ c;\ o,\ b,\ c.$$

Observación. Suponiendo que a, b, c son las alturas de un triángulo, el primer sistema de soluciones expresa las distancias de los vértices del triángulo á su ortocentro. Se podría pues hallar estas expresiones por consideraciones geométricas.

CUESTIÓN 213.

(Véase tomo IV pág. 279).

Si un lado de un triángulo es igual á la semisuma de los otros dos, la recta que une el centro de gravedad al centro del círculo inscripto es paralela á este lado é igual á $\frac{1}{6}$ de la diferencia de los otros dos.

(*H. Van Aubel*).

Solución por el Sr. H. BROCARD.

Las distancias al lado BC del baricentro G y del centro I del círculo inscripto, tienen por expresiones

$$\delta_G = \frac{2\Delta}{3a}, \qquad \delta_I = \frac{2\Delta}{a+b+c}$$

designando Δ el área del triángulo ABC.

Para que estas distancias sean iguales, es necesario que

$$a = \frac{b+c}{2}$$

Queda por calcular la longitud GI, que es paralela á BC, y encuentra á AC en el punto F. Además BI, bisectriz del ángulo B, encuentra á AC en el punto D.

Se tiene entonces

$$GI = IF - \frac{a}{3}, \quad FD = CD - \frac{b}{3}, \quad IF = \frac{a}{CD},$$

$$\frac{CD}{a} = \frac{b - CD}{c}, \quad CD = \frac{ab}{a+c}$$

$$FD = \frac{(2a-c)b}{3(a+c)}, \quad IF = \frac{2a-c}{3}, \quad GI = \frac{2a-c}{3} - \frac{a}{3} =$$

$$= \frac{a-c}{3} = \frac{\frac{b+c}{2} - c}{3} = \frac{b-c}{6}$$

CUESTIÓN 176.

(Véase tomo IV pág. 157).

Integrar las ecuaciones.

$$x = e^p + e^{-p}, \qquad y = e^p - e^{-p}$$

donde, según costumbre, $p = \dfrac{\delta y}{\delta x}$

(*G. Gillet*).

Solución por D. Ricardo Caro.

1.º Sea la primera ecuación que podemos poner en esta forma. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{e^p + e^{-p}}{2}$ ó sea, $\dfrac{x}{2} = \cosh p$. Pasando á la función inversa, tendremos

$$p = \text{Arg. cos. h}\frac{x}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = l\left(\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)$$

de donde,
$$dy = l\left(\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right) dx$$

é integrando,
$$y = \int l\left(\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right) dx$$

Podemos integrar el segundo miembro empleando la fórmula de Bernouilli, así

$$y = x \cdot l\left(\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = x \cdot l\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) - \sqrt{x^2 - 4} + C$$

2.º La segunda ecuación podemos ponerla bajo la forma $x =$ sen hp, y mediante igual procedimiento, se llega á

$$y = x \cdot l\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right) - \sqrt{x^2 + 4} + C$$

CUESTIONES PROPUESTAS

257 Demostrar que la pedal relativa al polo, de una espiral logarítmica, es una espiral logarítmica igual.

(V. Retali).

258 Si una parábola variable se halla circunscripta á un triángulo A B C, el punto de Frégier de un vértice cualquiera del triángulo, describe una cónica. Se recuerda que el punto de Frégier del punto M, con relación á una cónica, es el punto fijo por el que pasan las hipotenusas P Q de los triángulos P M Q inscriptos en la cónica.

(*E. Lemoine*).

259 Lugar de los centros de las hipérbolas equiláteras que tienen una cuerda normal común M N.

(*J. Neuberg*).

260 Construir una parábola, conociendo una cuerda normal M N y la dirección de los diámetros.

(*J. Neuberg*).

261 V O es una cuerda de una cónica C^2, normal en O, las tangentes en V y en O son *o* y *t*, P' un punto de la curva. Construir C^2 por puntos y por tangentes.

(*V. Retali*).

262 Un triángulo O V P tiene dos vértices fijos y el tercero P móvil sobre un círculo que pasa por O y es tangente á la perpendicular *o*, trazada á la [O V] en V: Si P' es la intersección del radio [OP] con la perpendicular en V á [V P], demostrar que el lugar de P' es una cisoide oblícua tangente á *o* en V, y con la cúspide en O. Construir la asíntota la tangente cuspidal y las tangentes en P'.

(*V. Retali*).

263 Un triángulo O V P tiene dos vértices fijos y el tercero P describe un círculo cuyo centro es V y que pasa por O. Si la perpendicular á [V P] sobre el punto V corta á [O P] en P'; el lugar de estos puntos es una estrofoide recta con un nodo en O y el vértice en V. Deducir de la generación indicada las propiedades de la curva. Intersecciones con una recta y con una cónica que pasa por los dos puntos O, V.

(*V. Retali*).

264 Se dan, en un plano vertical, un punto A, una curva (C) y un hilo á plomo de longitud l, atado al punto A. Se propone obtener el lugar de las posiciones M de un estilo móvil que arrastra el hilo á plomo, de manera que el extremo B del hilo describa la curva (C). Aplicaciones diversas.

(*H. Brocard*).

265 Si sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC se toman los tres puntos A', B', C' tales, que $\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\frac{1}{3}$ y los tres puntos A'', B'', C'' tales, que $\frac{BA''}{BC}=\frac{CB''}{CA}=\frac{AC''}{AB}=\frac{5}{6}$; el triángulo comprendido entre las rectas A'C'', B'A'', C'B'', prolongadas, valdrá los $\frac{4}{3}$ del triángulo ABC.

(*H. Van Aubel*).

266 Demostrar que los ángulos A, B, C y los lados a, b, c de un triángulo esférico cualquiera verifican las relaciones siguientes:

$$\delta \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} = \Delta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$\delta \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} = \Delta \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$\delta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} = \Delta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\delta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{c}{2}} = \Delta \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{C}{2}}$$

en las que, según costumbre, se supone:

$$a + b + c = 2p\,,\ \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - \pi = 2\,\varepsilon$$

$$\delta^2 = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} (p - a) \operatorname{sen} (p - b) \operatorname{sen} (p - c)$$

$$\Delta^2 = \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (\mathrm{A} - \varepsilon) \operatorname{sen} (\mathrm{B} - \varepsilon) \operatorname{sen} (\mathrm{C} - \varepsilon)$$

(*J. Gillet*).

267 Las rectas que unen los vértices de un triángulo A B C á un punto O de su plano, encuentran á los lados opuestos en los puntos A′, B′, C′.

El área del triángulo A′ B′ O′ queda invariable, si se hace coincidir el punto O, sucesivamente con el punto de Lemoine, con cada uno de los puntos de Brocard, con cada uno de los vértices del primer triángulo de Brocard, ó con el conjugado isotómico de cada uno de los seis puntos.

(*H. Van Aubel*).

268 Extensión del teorema de Stewart.

Siendo A, B, C, D, E cinco puntos en línea recta, y O un punto exterior cualquiera, se tiene:

$$\begin{aligned} &\mathrm{OA}^2.\ \mathrm{CD} + \mathrm{OB}^2.\ \mathrm{DE} + \mathrm{OC}^2.\ \mathrm{EA} + \mathrm{OD}^2.\ \mathrm{AB} + \mathrm{OE}^2.\ \mathrm{BC} \\ &= \mathrm{AB}^2.\ \mathrm{DE} + \mathrm{AC}^2.\ \mathrm{EA} + \mathrm{BD}^2.\ \mathrm{AB} + \mathrm{BE}^2.\ \mathrm{BC} \\ &= \mathrm{CA}^2.\ \mathrm{CD} + \mathrm{CB}^2.\ \mathrm{DE} + \mathrm{CD}^2.\ \mathrm{AB} + \mathrm{DE}^2.\ \mathrm{BC} \\ &= \mathrm{EA}^2.\ \mathrm{CD} + \mathrm{EB}^2.\ \mathrm{DE} + \mathrm{EC}^2.\ \mathrm{EA} + \mathrm{ED}^2.\ \mathrm{AB} \end{aligned}$$

considerando los segmentos en magnitud y en signo.

(C. *A. Laisant*).

269 Un triángulo OVP tiene dos vértices fijos y el tercero P describe una circunferencia cuyo centro es V y que pasa por O: si la perpendicular á [V P] en el punto V corta á [O P] en P′, el lugar de estos puntos es una estrofoide recta con nodo en O y el vértice en V. Deducir de la generación indicada las principales propiedades de la curva. —Intersección con una recta y con una cónica que pasa por los dos puntos O y V.

(*V. Retali.*)

Zaragoza: Imprenta de la Sra. Viuda de Ariño, Coso, 100