Año V Segundo semestre de 1895

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOBRE ALGUNOS CÍRCULOS ASOCIADOS Á UN TRIÁNGULO

POR MR. J. S. MACKAY

Profesor de matemáticas en la Academia de Edimburgo.

NOTACIONES

I, I_1, I_2, I_3 son los centros del círculo inscripto y de los círculos ex-inscriptos al triángulo fundamental ABC.

Los puntos de contacto de estos círculos con los lados

BC, CA, AB

se designan con las letras

$$D\ E\ F;\ D_1\ E_1\ F_1;\ D_2\ E_2\ F_2;\ D_3\ E_3\ F_3$$

$r\ r_1\ r_2\ r_3$ son los radios de los cuatro círculos.

$A'\ B'\ C'$, son los puntos medios de BC, CA, AB.

$x\ y\ z$ los pies de las perpendiculares bajadas desde A, B, C sobre BC, CA, AB.

H es el ortocentro de ABC.

O el centro del círculo circunscripto á ABC.

R el radio » » » »

(1) Si por A′ se levanta una perpendicular á BC; AD AD_1 AD_2 AD_3 cortarán á esta perpendicular en los puntos R_1 R R_3 R_2 tales que

$$A'R=r\quad A'R_1=r_1\quad A'R_2=r_2\quad A'R_3=r_3$$

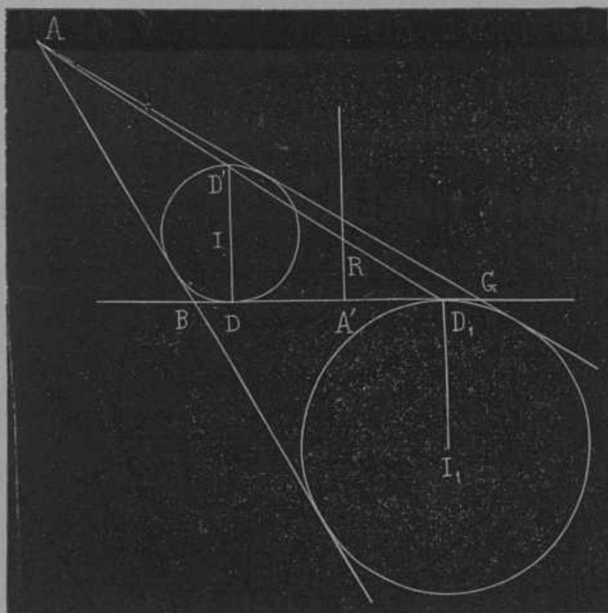
Sea D′ el punto de intersección de DI con AD_1.

Se sabe que la recta que une los extremos de dos rayos paralelos y del mismo sentido pasa por el centro de homotecia directo de los dos círculos. Pero A es el centro de homotecia directa de los dos círculos I_1 é I; por consiguiente, ID′ es un radio del círculo inscripto I, y $DD'=2r$.

Pero $A'D = A'D_1$ y $A'R$ es paralela á DD'; por consiguiente

$$A'R = \frac{1}{2} DD' = r.$$

Lo mismo para las otras igualdades.



(2) Si por B' se levanta una perpendicular á CA; BE BE_1 BE_2 BE_3 cortarán á ésta en los puntos S_2 S_3 S S_1 tales que

$$B'S = r \quad B'S_1 = r_1 \quad B'S_2 = r_2 \quad B'S_3 = r_3$$

Si por C' se levanta una perpendicular á AB; CF CF_1 CF_2 CF_3 cortarán á ésta en los puntos T_3 T_2 T_1 T tales que

$$C'T = r \quad C'T_1 = r_1 \quad C'T_2 = r_2 \quad C'T_3 = r_3$$

(3) Los cuatro triángulos RST $R_1S_1T_1$ $R_2S_2T_2$ $R_3S_3T_3$ son **inversamente** semejantes á ABC. Tienen O, centro del círculo circunscripto á ABC, por centro de homología, y á OI OI_1 OI_2 OI_3 por diámetros de sus círculos circunscriptos.

Porque $A'R_1 = r_1 = I_1D_1$ el $\angle\, I_1R_1A'$ es recto.

Igualmente los $\angle^s\, I_1S_1B'$ y I_1T_1C' son rectos.

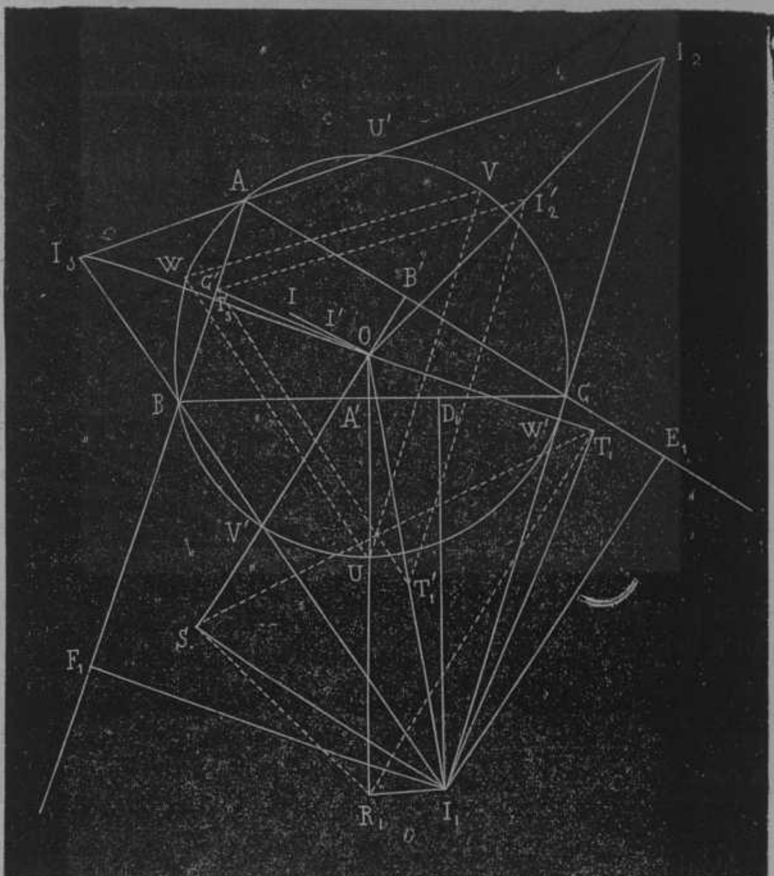
Por consiguiente, el círculo cuyo diámetro es OI_1 pasa por los puntos R_1 S_1 T_1.

Puesto que los puntos R_1 S_1 O T_1 son concíclicos, se tiene que

$$\angle S_1R_1T_1 = 180^0 - \angle S_1OT_1 = 180^0 - \angle B'OC' = A$$

Pero $\angle R_1S_1T_1 = \angle R_1OT_1 = B$, siendo T_1O R_1O respectivamente perpendiculares á AB y BC; luego el triángulo $R_1S_1T_1$ es semejante al ABC.

(4) Si se designan los puntos medios de OI OI_1 OI_2 OI_3 por



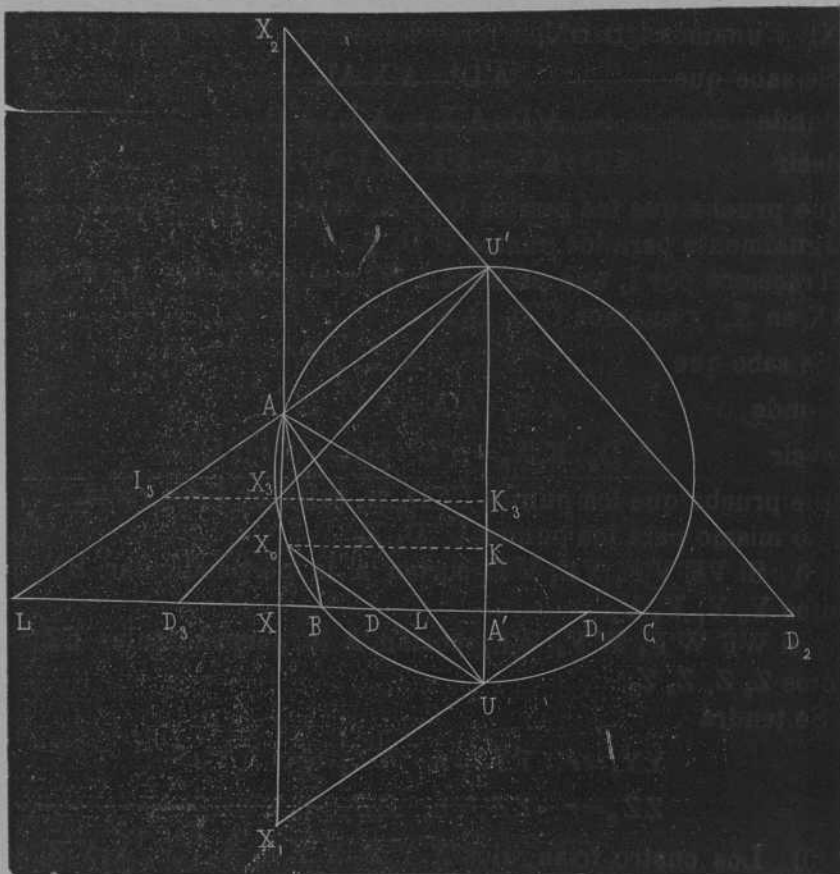
I' I'_1 I'_2 I'_3, resulta que $I'_1I'_2I'_3I'$ es un cuadrángulo órtico semejante y semejantemente situado al cuadrángulo $I_1I_2I_3I$, y el radio del círculo circunscripto á cada uno de sus cuatro triángnlos es R.

En efecto, el radio del círculo circunscripto á cada uno de los cuatro triángulos del cuadrángulo órtico $I_1I_2I_3I$ es 2R.

(5) Sean U V W los puntos de intersección de AI BI CI con el círculo circunscripto á ABC, y sean U' V' W' los puntos diametralmente opuestos á U V W.

I es el ortocentro del triángulo UVW y O es el centro del círculo circunscripto á UVW.

Por consiguiente, I′ es el centro del círculo de los nueve puntos de los cuatro triángulos que forman el cuadrángulo órtico UVWI.



Igualmente, siendo I el ortocentro del triángulo UV′W′ y O el centro del círculo circunscripto á UV′W′, I'_1 es el centro del círculo de los nueve puntos de los cuatro triángulos que forman el cuadrángulo órtico $UV'W'I_1$; y así sucesivamente.

(6) La suma de los círculos circunscriptos á los cuatro triángulos RST es tres veces el círculo circunscripto á ABC.

Del teorema que los círculos están en la razón de los cuadrados de sus diámetros, se deduce que el círculo circunscripto á ABC es á la suma de los cuatro círculos RST, como $4R^2$ á $OI^2+OI^2_1+OI^2_2+OI^2_3$.

Por otra parte

$$\Sigma(OI^2)=4R^2+2R(r_1+r_2+r_3+r_4)=4R^2+2R.4R=12R^2$$

(7) Si UD UD_1 UD_2 UD_3 cortan á la perpendicular AX en los puntos X_0 X_1 X_2 X_3

$$XX_0 = r \quad XX_1 = r_1 \quad XX_2 = r_2 \quad XX_3 = r_3$$

Tracemos por I una paralela que encuentre á UU' en K_0 y á AX en X_0; y unamos UD DX_0.

Se sabe que $\qquad A'D^2 = A'X.AL$

de donde $\qquad A'D : A'X = A'L : A'D$

es decir $\qquad A'D : KX_0 = A'L : K_0L = UA' : UK_0$

lo que prueba que los puntos U D X_0 están en línea recta.

Igualmente para los puntos U D_1 X_1.

Tracemos por I_3 una paralela á BC que encuentra á UU' en K_3 y á AX en X_3; y unamos $U'D_3$ D_3X_3.

Se sabe que $\qquad A'D^2_3 = A'X \,.\, A'L'$

de donde $\qquad A'D_3 : A'X = A'L' : A'D_3$

es decir $\qquad A'D_3 : K_3X_3 = A'L' : K_3I_3 = U'A' : U'K_3$

lo que prueba que los puntos U' D_3 X_3 están en línea recta.

Lo mismo para los puntos U' D_2 X_2.

(8) Si VE $V'E_1$ VE_2 $V'E_3$ cortan á la perpendicular BY en los puntos Y_0 Y_1 Y_2 Y_3,

y si WF $W'F_1$ $W'F_2$ WF_3 cortan á la perpendicular CZ en los puntos Z_0 Z_1 Z_2 Z_3;

Se tendrá

$$YY_0 = r \quad YY_1 = r_1 \quad YY_2 = r_2 \quad YY_3 = r_3$$

$$ZZ_0 = r \quad ZZ_1 = r_1 \quad ZZ_2 = r_2 \quad ZZ_3 = r_3$$

(9) Los cuatro triángulos $X_0Y_0Z_0$ $X_1Y_1Z_1$ $X_2Y_2Z_2$ $X_3Y_3Z_3$ son inversamente semejantes á ABC; tienen por centro de homología al ortocentro H del triángulo ABC y á HI HI_1 HI_2 HI_3 por diámetros de sus círculos circunscriptos.

Puesto que $XX_1 = r_1 = I_1D_1$, el ángulo I_1X_1X es recto.

Igualmente los ángulos I_1Y_1Y é I_1Z_1Z son rectos.

Por consiguiente, el círculo cuyo diámetro es HI pasa por los puntos X_1 Y_1 Z_1.

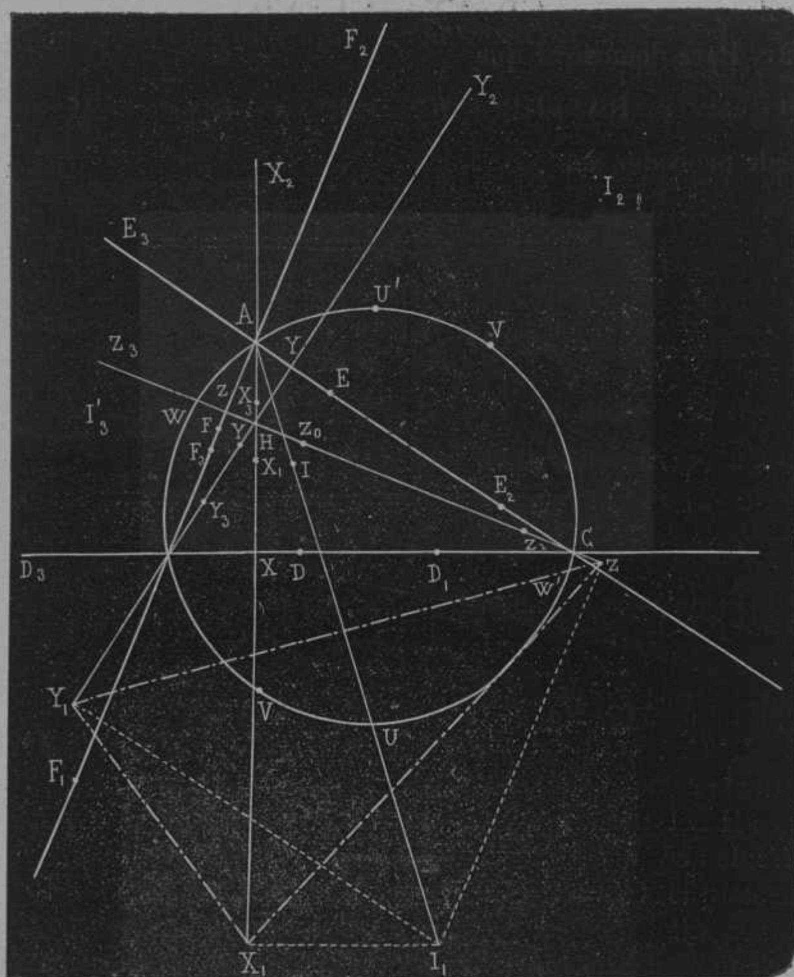
Puesto que los puntos X_1 Y_1 H Z_1 son concíclicos,

se tiene $\qquad \angle Y_1X_1Z_1 = 180^0 - \angle Y_1HZ_1 = A$

Pero $\qquad \angle X_1Y_1Z_1 = \angle X_1HZ_1 = B$

por ser H_1Z y X_1H respectivamente perpendiculares á AB y BC; luego el triángulo $X_1Y_1Z_1$ es semejante á ABC.

(10) Los puntos medios de HI HI_1 HI_2 HI_3 forman un cuadrángulo órtico semejante y semejantemente situado respecto al cuadrángulo $I_1I_2I_3I_4$, y el radio del círculo circunscripto á cada uno de sus cuatro triángulos es R.



(11) La suma de los círculos circunscriptos á los cuatro triángulos $X_0Y_0Z_0$..... es igual á cuatro veces la suma de los círculos circunscriptos á los tres triángulos AYZ, XBZ, XYC.

En efecto

$$HI^2 = 4(R^2 - 2Rr) + bc + ca + ab - (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$HI^2_1 = 4(R^2 + 2Rr_1) + bc - ca - ab - (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$HI^2_2 = 4(R^2 + 2Rr_2) - bc + ca - ab - (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$HI^2_1 = 4(R^2 + 2Rr_3) - bc - ca + ab - (a^2 + b^2 + c^2)$$

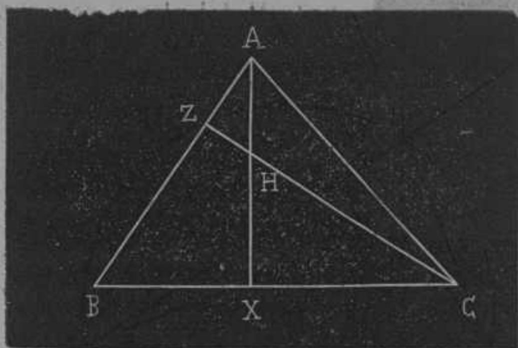
Por consiguiente

$$\Sigma(HI^2) = 4(12R^2 - a^2 - b^2 - c^2) = 4(HA^2 + HB^2 + HC^2)$$

(12) Para demostrar que

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

se puede proceder así:



De la semejanza de los triángulos CBZ y AHZ se deduce

$$BC^2 : HA^2 = CZ^2 : AZ^2$$

de donde $BC^2 + HA^2 : BC^2 = CZ^2 + AZ^2 : CZ^2 = CA^2 : CZ^2$

de lo que resulta $BC^2 + HA^2 = \dfrac{BC^2 \,.\, CA^2}{CZ^2} = 4R^2$

por un teorema de Brahmegupta. Se vería igualmente que

$$CA^2 + HB^2 = AB^2 + HC^2 = 4R^2$$

SOBRE LOS CÍRCULOS RADICALES

POR D. JUAN J. DURÁN LORIGA, COMANDANTE DE ARTILLERÍA

Se sabe que el lugar geométrico de los puntos tales, que sus potencias con relación á dos circunferencias fijas guardan la relación $\frac{m}{n}$ es una circunferencia; y si suponemos $m=-n$, esta línea también será el lugar de los puntos que tienen respecto á otras dos de esta clase, potencias iguales y de signos contrarios y que la analogía nos conduce á llamarla *circunferencia radical* (*) de las propuestas. Es muy fácil determinar su centro y radio.

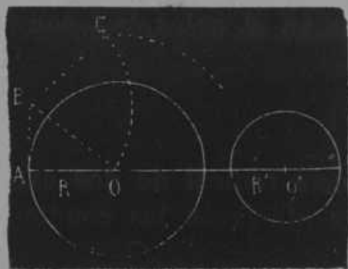


Fig. 1.ª

Llamemos P_0 y $P_{0'}$ las potencias de un punto P del plano respecto á las circunferencias o y o' (fig. 1.ª). Se tendrá $P_0=-P_{0'}$, ó lo que es lo mismo, llamando l y l' las distancias de P á los centros y d la distancia oo'

$$l^2-R^2=R'_2-l'^2 \quad \text{es decir} \quad l^2+l'^2=A^2+R'^2$$

El centro de la circunferencia que buscamos será, por consiguiente, el medio de oo' y su radio será

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R'^2)-d^2}$$

Para que la circunferencia radical exista, es preciso que se tenga

$$d<\sqrt{2(R^2+R'^2)}$$

esta condición se cumple siempre, cuando las circunferencias son tangentes (ya exteriores ó interiores), secantes ó interiores, pero si son exteriores podrá existir ó no la circunferencia radical.

Cuando las circunferencias son secantes, teniendo evidentemente que pasar la circunferencia radical por los dos puntos de corte (de potencia cero), podrá describirse inmediatamente.

Cuando son tangentes exteriores, la circunferencia radical será tangente interior á la de mayor radio y en el punto de tangencia de las dadas (puesto que este punto tiene potencia cero respecto á am-

(*) Algunos autores, en particular los ingleses, llaman «círculo radical» (radical circle) al que corta ortogonalmente á otros tres, pero nos parece muy preferible la denominación muy usada de «círculo ortotómico» y llamar círculo radical al que es objeto de este estudio.

bas), y como su centro es en todos los casos el medio de la línea de centros, es también su trazado inmediato. Si se quiere numéricamente determinar su radio sin recurrir al hecho visto *a priori*, se hará $d=R+R'$ en el valor de ρ, y resulta, como es consiguiente,

$$\rho = \frac{1}{2}(R-R')$$

Si son tangentes interiores, también resultará la circunferencia radical tangente á las dadas, y su radio será

$$\rho = \frac{1}{2}(R+R')$$

Si las circunferencias son concéntricas, también lo será con ellas la radical y su radio se obtendrá haciendo $d=o$ en el valor de ρ, con lo que resulta

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R'^2)}$$

Para el trazado gráfico de la circunferencia radical de dos exteriores (cuando existe) ó de dos interiores, se utilizarán las condiciones que vamos á exponer.

Consideremos tres circunferencias o, o' y o'', llamemos $\pi_{oo'}$ la circunferencia radical de o y o' y $\pi_{oo''}$ la de o y o''; si estas circunferencias se cortan, se tendrá en los puntos de intersección

$$\left\{\begin{array}{l} P_o=-P_{o'} \\ P_o=-P_{o''} \end{array}\right., \text{ por consiguiente } P_{o'} = P_{o''}$$

es decir, que el eje radical de o' y o'' lo es también de $\pi_{oo'}$ y $\pi_{oo''}$.

Cuando las circunferencias radicales no se cortan, también es fácil dar una demostración geométrica, y aun más sencillo, demostrarlo analíticamente, como haremos más adelante.

Esta observación sugiere el medio de encontrar la circunferencia radical de dos exteriores (si existe) ó de dos interiores o y o'. Córtense por una tercera o'', determínese la circunferencia radical de o y o' y el eje radical de o' y o'' y se tendrá uno ó dos puntos de la circunferencia que se quiere determinar y de la que el centro es conocido.

La circunferencia o'' debe elegirse de un modo conveniente para que se corten el eje y circunferencia radical en el caso de ser las dadas exteriores (único caso en que puede haber imposibilidad) por la siguiente construcción. Levántese en el extremo del radio oA (fig. 1.ª) la perpendicular AB igual al radio R' de la otra circunferencia, únase o con B, trácese la perpendicular BC$=o$B, y si la circunferencia descrita con el radio oC envuelve el centro o', la circunferencia radical existe.

La sencillez de esta construcción evita otras explicaciones.

Cuando dos circunferencias son ortogonales, se ve claramente que la radical pasa por los centros de ellas, como se deduce también del valor de ρ, pues siendo $R^2+R'^2=\overline{oo'}^2$, resulta $\rho=\frac{1}{2}\,oo'$. La recíproca es también cierta como se ve fácilmente.

La consideración de circunferencias radicales permite resolver inmediatamente el siguiente problema:

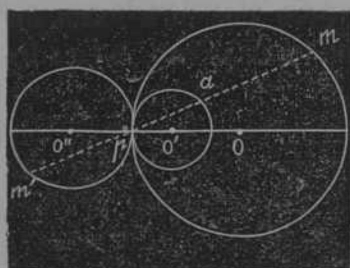


Fig. 2.ª

Se tienen dos circunferencias tangentes, por ejemplo interiores, o y o' (fig. 2.ª) de radios respectivos R y R'; por el punto de tangencia p se trazan secantes, tales como $p\ a\ m$, y se toma en sentido contrario una longitud $am'=am$. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto m'?

Tracemos la circunferencia o'' que tenga por circunferencia radical, respecto á la o, la o' y se tendrá en valor absoluto $ap.am=ap.am'$, y por lo tanto $am'=am$; el lugar buscado es, por consiguiente, la circunferencia o''; para determinar su radio x, notemos que se tiene $R'=\frac{1}{2}(R-x)$, de donde se deduce $x=R-2R'$. La circunferencia encontrada es tangente exterior ó interior á la o, según sea $R-2R' \gtrless o$. Si la circunferencia o' pasa por el punto o, el lugar geométrico se reduce al punto p, lo cual es evidente.

Hemos dicho anteriormente que si se tienen tres circunferencias o, o y o' y se determinan las radicales de dos grupos oo' y oo'', por ejemplo, el eje radical de estas circunferencias radicales es el mismo que el de las del tercer grupo. Esto permite demostrar con gran sencillez que las circunferencias descritas sobre las medianas de un triángulo como diámetros, tienen de dos en dos por eje radical las alturas de dicho triángulo. Observemos, en efecto, que si sobre los lados de un triángulo como diámetros, se describen circunferencias, las radicales de éstas son las trazadas sobre las medianas (así, por ejemplo, la correspondiente á las descritas sobre b y c es la que tiene por diámetro la mediana relativa al lado a), resulta, pues, en virtud de nuestra observación, que los ejes radicales de las últimas serán los mismos que los correspondientes á las primeras, es decir, las alturas del triángulo. Tenemos, pues, seis circunferencias que tienen por centro radical común el ortocentro del triángulo dado.

Si consideramos ahora las circunferencias descritas desde los medios de los lados como centros con un radio igual á las medianas correspondientes, y á las que hemos llamado por ciertas razones que en otra ocasión expusimos, circunferencias potenciales (véase nuestra Nota del PROGRESO MATEMÁTICO, tomo V, página 70), es evidente que dichas circunferencias son las descritas tomando como diámetros las medianas del triángulo anticomplementario, pero por otra parte, en virtud de lo anteriormente dicho, estas circunferencias son las radicales de las descritas sobre los lados de este último triángulo; podemos en consecuencia decir que las circunferencias descritas desde los vértices de un triángulo como centros con radios iguales á los lados opuestos, tienen por circunferencias radicales las potenciales de dicho triángulo, y que por lo tanto su centro radical es el ortocentro del triángulo anticomplementario del propuesto.

Tenemos, pues, un segundo grupo de seis circunferencias que tienen el mismo centro radical.

Hemos dicho que cuando dos circunferencias son ortogonales, la circunferencia radical tiene por diámetro la línea de centros, y como el círculo de Longchamps es ortotómico de los descritos desde los vértices como centros con radios iguales á los lados opuestos, resulta que las circunferencias que tienen por diámetros las rectas que unen el ortocentro de un triángulo con el de su complementario, son las radicales del círculo de Longchamps y de los otros tres de que hemos hecho mérito.

El mismo criterio puede servir para encontrar las circunferencias radicales de algunas otras del triángulo, pero en todos los casos puede recurrirse á la geometría analítica; es en efecto evidente que si $C=o$ y $C'=o$ son las ecuaciones de dos circunferencias, la de la radical será $C+C'=o$, ya se trate de coordenadas cartesianas ó trilineales; así la circunferencia radical de las representadas por las ecuaciones

$$x^2+y^2+2A\,x+2B\,y+C=o$$
$$x^2+y^2+2A'x+2B'y+C'=o$$

es la siguiente:

$$x^2+y^2+(A+A')x+(B+B')y+\frac{1}{2}(C+C')=o$$

y si en particular se toma por el eje de las X la línea de centros y una de ellas tiene el suyo en el origen (suponemos rectangular el sistema) la circunferencia radical será:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2=\frac{2(R^2+R'^2)-\alpha^2}{4}$$

resultado que comprueba lo que anteriormente hemos dicho, que para que la circunferencia radical exista, tiene que ser la distancia de centros menor que $\sqrt{2(R^2+R'^2)}$. Si esta distancia es $\sqrt{2(R^2+R'^2)}$, la circunferencia se reduce á un punto situado en la línea de centros, interiormente á la circunferencia de mayor radio y á una distancia de su centro igual á la anterior cantidad radical dividida por dos.

Si se trata de coordenadas baricéntricas y las circunferencias dadas son

$$\sum \alpha\times\sum u\alpha-\sum a^2\rho\gamma=0$$

$$\sum \alpha\times\sum u\alpha'-\sum a^2\rho\gamma=0$$

la circunferencia radical es

$$\sum \alpha.\sum(u+u)'\alpha-2\sum a^2\rho\gamma=0$$

Es muy fácil probar analíticamente un hecho que anteriormente hemos consignado, y es que si tenemos tres circunferencias o, o', o'' y las agrupamos de dos en dos, el eje radical de las circunferencias radicales de dos grupos, lo es del tercer grupo. Tenemos, en efecto, llamando

$$C=o,\quad C'=o,\quad C''=o$$

las ecuaciones de las tres circunferencias dadas.

La circunferencia radical de $\left\{\begin{matrix}C=0\\ C'=0\end{matrix}\right.$ es $C+C'=0$ Eje radical de $\left\{\begin{matrix}C+C'=0\\ C+C''=0\end{matrix}\right.$ es $C'-C''=0$

La " " de $\left\{\begin{matrix}C=0\\ C''=0\end{matrix}\right.$ es $C+C''=0$ Eje " de $\left\{\begin{matrix}C'=0\\ C''=0\end{matrix}\right.$ es $C'-C''=0$

Si después de encontrar las circunferencias radicales de tres dadas operamos lo mismo (cuando es posible) con las que sucesivamente vamos obteniendo, podrán resultar series triples de círculos sometidos á ciertos ligazones cuyo estudio puede ser curioso.

La consideración de circunferencias radicales en la geometría del triángulo relacionando las relativas á círculos notables de éste, con otros círculos, rectas y puntos ligados al mismo, podrá quizás dar lugar á resultados interesantes, pero faltos hoy de tiempo para hacer un estudio detenido, sólo hemos apuntado ideas que nos proponemos desarrollar en otra ocasión.

Algunas propiedades referentes á los sistemas de círculos, demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado Euclídeo.

POR

D. VENTURA REYES PRÓSPER

CATEDRÁTICO DEL INSTITUTO DE CUENCA

Las ventajas de simultanear el estudio de la Geometría del espacio con el de la Geometría plana, no considerándolas como dos cosas ajenas entre sí, ha sido sentida desde hace algún tiempo por los más eminentes geómetras. Frecuentemente se cita entre estos últimos á Poncelet y Monge.

Yo añadiré que la nueva Geometría de posición, libre de relaciones métricas, y aun del postulado Euclídeo referente á las paralelas, está precisamente basada en la introducción de elementos tomados fuera del plano para demostrar propiedades referentes al plano.

En el presente trabajito me propongo hacer patente, cómo siguiendo los métodos de Monge y Hankel se puede llegar á establecer con todo rigor proposiciones vulgares referentes al círculo, con independencia de medidas y de paralelas.

Voy ante todo á demostrar el siguiente

LEMA: *Suponiendo dos rectas* ao ao' *que se cortan en el punto común* a, *si levantamos á dichas dos rectas en el plano que las contiene á ambas y en los puntos* o *y* o' *respectivamente, las perpendiculares correspondientes, digo que será siempre posible hallar un ángulo* oao' *tal, que conservando* ao *y* ao' *sus longitudes, se corten las dos perpendiculares en un punto* ω.

Claro que sólo colocándonos bajo el punto de vista No-Euclídeo, necesitamos demostrar esta proposición.

Sea *oa* la mayor de las dos rectas, tracemos alrededor de *a* con el radio *ao'* una circunferencia. Levantemos en *o* la perpendicular á *oa;* tomemos en la parte de *oa* que cae hacia la izquierda un punto *x:* desde *x* tracemos una de las dos tangentes á la circunferencia; resultará que esta tangente corta necesariamente á la perpendicular en un punto ω, pues para tocar al círculo debe pasar á la región derecha del plano.

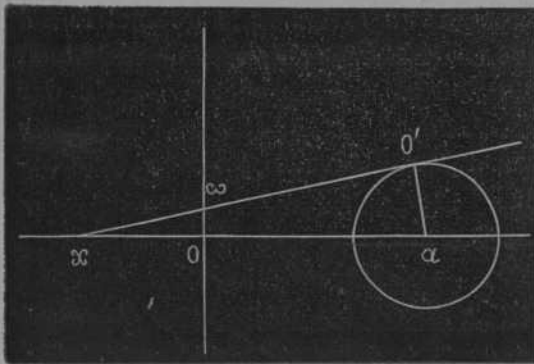


Fig. 1.ª

Uniendo entonces *a* con el punto *o'* de contacto tendremos el ángulo *oao'* deseado.

Este lema nos basta para probar la siguiente proposición, conocida desde hace mucho tiempo, pero demostrada siempre dentro de la Geometría Euclídea y de las relaciones métricas. *Dados dos círculos en un plano, existe sobre la recta que une sus centros un punto tal que levantando en él una perpendicular á la línea de los centros, goza dicha perpendicular de la propiedad de que trazando desde cualquiera de sus puntos las dos tangentes á los dos círculos, estas tangentes son iguales para cada punto.* Esta recta perpendicular es la que se ha llamado recta de *potençia igual* (según Jacob Steiner) ó *eje radical* (según Gaulthier de Tours).

Sólo tenemos que servirnos del lema establecido antes y de una proposición tan simple como ésta: *Todas las tangentes que desde un punto se pueden trazar á la esfera son iguales.*

En la demostración distinguiremos dos casos, según que los dos círculos dados se corten ó no.

1.er caso. *Los dos círculos se cortan en los puntos* d *y* d', oao' *siendo la línea de los centros.*

Hagamos girar las dos mitades de plano alrededor de la recta *add'*, de modo tal que el ángulo *oao'* sea á propósito (fig. 2.ª) para que se corten en un punto ω las dos perpendiculares levantadas en *o* y *o'* á las dos mitades de plano P y Q. Ya sabemos que estas dos perpendiculares están contenidas en el plano de *oao'* y que son respectivamente perpendiculares á *oa* y *oa'*, como puede verse demostrado pangeométricamente en algunos tratados (Frischauf, por ejemplo). Ahora bien, este punto ω dista igualmente de todos los puntos de la circunferencia o, y de todos los puntos de la circunferencia o', y estas distancias son iguales á $\omega d = \omega d'$. Esto quiere decir que ω es el centro

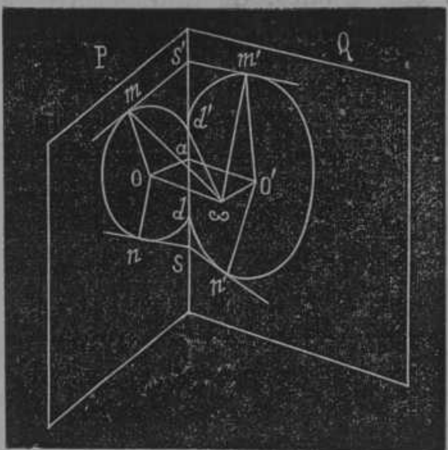


Fig. 2.ª

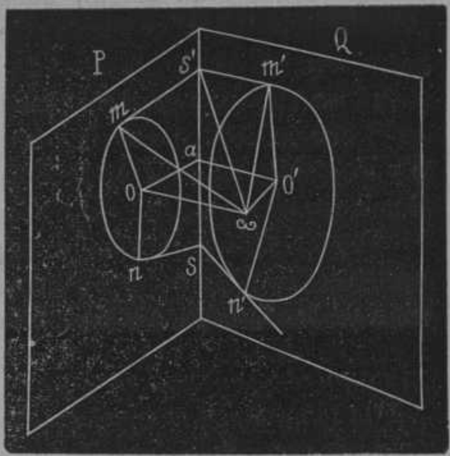


Fig. 3.ª

de una esfera que contiene á las dos circunferencias o y o'. Si, pues, desde cualquier punto de la recta dd' se trazan tangentes á las dos circunferencias, estas tangentes serán iguales por ser tangentes á una misma esfera.

El caso en que las dos circunferencias fuesen tangentes, lo trataríamos como el caso que acabamos de estudiar.

2.º caso. *Las dos circunferencias no se cortan*, oao' *es la línea de los centros.*

Tracemos esta línea; tomemos sobre el plano un punto s y su simétrico s', con respecto á oo', tales que las tangentes trazadas á las dos circunferencias sean iguales entre sí (*).

La recta ss' cortará entonces á la línea de los centros en a y le será perpendicular.

Hagamos girar las dos mitades del plano alrededor de la línea ss' de modo que ocupen las posiciones P y Q, elegidas de modo que el ángulo oao' sea tal que las perpendiculares levantadas en o y o' á P y

(*) Esto es muy fácil, sabiendo que el lugar de los puntos desde los cuales las tangentes trazadas á una circunferencia tienen una longitud dada λ, es otra circunferencia concéntrica. Elegiremos la magnitud λ de tal modo, que las dos circunferencias correlativas á las dos propuestas, se corten en los puntos ss', lo cual es posible, y entonces $sm = sm' = \lambda$.

Q (perpendiculares respectivamente en consecuencia á oa y $o'a$) se corten en un punto ω.

Unamos ω con m, m' y s'. Los triángulos $\omega ms'$ $\omega m's'$ son rectángulos por el teorema de las tres perpendiculares, y como tienen iguales la hipotenusa y un cateto, deberán ser iguales, de donde $\omega m = \omega m'$. Ahora bien, todos los puntos de la circunferencia o distan de ω la longitud ωm y todos los puntos de la circunferencia o' distan de ω la longitud $\omega m'$; luego por ser como hemos dicho $\omega m = \omega m'$, resultará que ω es el centro de una esfera sobre la cual caen las dos circunferencias o y o', siendo en consecuencia iguales las tangentes trazadas á ambas desde un punto arbitrario de la recta ss'.

Establecido que existe siempre un eje radical para dos circunferencias situadas en un plano, deduciremos sencillamente, por rotación de las figuras alrededor de la línea oo' que dos esferas tienen siempre un plano radical, de donde se deduce á su vez que tres esferas podrán tener (tendrán en la Geometría Euclídea) una recta radical, si se cortan sus planos radicales (*) y también las otras proposiciones que traen los autores, por ejemplo, *Reye, Geometrie der Kugel und Kugel systeme.*

(Continuará)

NOTA SOBRE LA CUESTIÓN 164

POR M. E. LEMOINE

La solución elegantísima que el Sr. Sollertinsky ha dado en la página 183 al problema propuesto, mediante el empleo del teorema de Stewart, me ha decidido á indicar ahora que la transformación continua (aplicada al tetraedro, método cuya teoria he desarrollado en mi Memoria del Congreso de Besançon, 1893, *Asociation française pour l'avancement des sciences* y en una Nota publicada por la Sociedad Matemática de Edimburgo, en el tomo XIII, 1894-95) conduce, *sin ningún cálculo*, á fórmulas análogas á la que constituye la cuestión 164, y cuya obtención directa sería demasiado prolija.

Basta saber que en la transformación continua en D, en A, en B, en C, los ángulos diedros a, b, c, a', b', c' se transforman respectivamente:

(*) Esto se saca de que *si los tres ejes radicales de tres círculos se cortan, lo hacen en un solo punto* (demostración usual).

En la transformación continua en D : en $\pi-a,\ \pi-b,\ \pi-c,\ a',\ b',\ c'$

» » » » » A : » $\pi-a,\ b,\ c,\ a',\ \pi-b',\ \pi-c'$

» » » » » B : » $a,\ \pi-b,\ c,\ \pi-a',\ b',\ \pi-c'$

» » » » » C : » $a,\ b,\ \pi-c,\ \pi-a',\ \pi-b',\ c'$

y que las caras F_a, F_b, F_c, F_d se reducen respectivamente por las mismas transformaciones á

$$-F_a\ -F_b\ -F_c\ F_d;\ F_a\ -F_b\ -F_c\ -F_d$$
$$-F_a\ F_b\ -F_c\ -F_d;\ -F_a\ -F_b\ F_c\ -F_d$$

Las aristas no cambian, puesto que, en la fórmula de la cuestión 164, sólo entran en la segunda potencia.

Esto sentado, si se llama A'_r el punto en que el plano bisector del suplemento del ángulo diedro a corta á DA, y A_r el punto en que el plano bisector del suplemento del ángulo diedro a' corta á BC, la transformación en D de la fórmula 164, da *inmediatamente:*

$$\overline{A'_2A_1}^2 = \frac{\begin{array}{r}(F_b+F_c)(F_a-F_d)[F_a(c^2F_b+b^2F_c)-F_d(c'^2F_b+b'^2F_c]\\ -a^2F_bF_c(F_d-F_a)^2+a'^2F_aF_d(F_b+F_c)^2\end{array}}{(F_d-F_a)^2(F_b+F_c)^2} \quad (1)$$

La transformación en A da el mismo resultado que la transformación en D.

La transformación, sea en B, sea en C, da

$$\overline{A'_1A_2}^2 = \frac{\begin{array}{r}(F_b-F_c)(F_a+F_d)[F_a(c^2F_b-b^2F_c)+F_d(c'^2F_b-b'^2F_c)]\\ -a^2F_bF_c(F_d+F_a)^2-a'^2F_aF_d(F_b+F_c)^2\end{array}}{(F_d+F_a)^2F_b-F_c)^2} \quad (2)$$

Si ahora transformo, sea en B sea en C, la fórmula (1), se tendrá

$$\overline{A'_1A_2}^2 = \frac{\begin{array}{r}(F_b-F_c)(F_d-F_a)[-F_a(c^2F_b-b^2F_c)+F_d(c'^2F_b-b'^2F_c)]\\ +a^2F_bF_c(F_d-F_a)^2+a'^2F_aF_d(F_b-F_c)^2\end{array}}{(F_d-F_a)^2(E_b-F_c)^2} \quad (3)$$

NOTA CON MOTIVO DE LA CUESTIÓN 69

(V. t. II, págs. 215 y 306)

POR M. H. BROCARD

Si se obtienen los primeros valores de u_n, se obtiene

$$u_0=0,\ u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=5,\ u_4=10,\ u_5=21$$
$$u_6=42,\ u_7=85,\ u_8=170,\ u_9=341,\ u_{10}=682,\ \text{etc.}$$

Estos números pueden repartirse en grupos de dos en dos, en los cuales el segundo es el doble del primero:

$$\begin{array}{ll} u_1=1 & u_2=2 \\ u_3=5 & u_4=10 \\ u_5=21 & u_6=42 \\ u_7=85 & u_8=170 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Se tienen además las relaciones

$$u_5=2u_4+1 \qquad u_7=2u_6+1 \qquad u_9=2u_8+1$$

y $$u_3-u_1=4 \qquad u_5-u_3=16 \qquad u_7-u_5=64\dots$$

se obtienen, pues, en definitiva, las expresiones

$$u_{2n+2}=\frac{2^{2n+3}-2}{3}$$

$$u_{2n+3}=\frac{2^{2n+4}-1}{3}$$

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 41

(Véase tomo II, página 296).

Sean O *un círculo tangente en* A *y* C *á dos rectas rectangulares* AF, CF; AODE, COBH *los dos diámetros correspondientes*, AB *una secante*, BD *la perpendicular á* AB.

Se pide el lugar geométrico del punto M *de intersección de* AB *con*

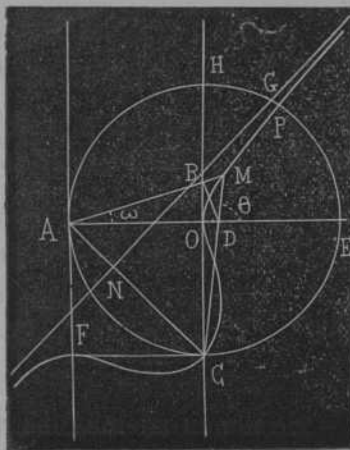
CD. *Deducir también, ya el cuadrado, ya la raíz cuadrada de la tangente de otro ángulo.*

(H. BROCARD).

Solución por el SR. BROCARD.

Sean A el origen, AO el eje de las x; MAO$=\omega$, MDE$=\theta$.

El punto M resulta de la intersección de las rectas ABM, CDM que tienen por ecuaciones



$$y=mx=x \operatorname{tg} \omega, \quad y+a=(x-a) \operatorname{tg} \theta$$

con $$\operatorname{tg} \theta=\cot^2 \omega.$$

De esto se deduce

$$y+a=\frac{x^2}{y^2}(x-a)$$

ó $$\rho=\frac{a}{\cos^3\omega-\operatorname{sen}^3\omega} \qquad (2)$$

pudiendo hallarse representadas las coordenadas x, y por funciones racionales del parámetro m,

$$x=a\,\frac{1+m^2}{1-m^3}, \qquad y=am\,\frac{1+m^2}{1-m^3},$$

la curva representada por las ecuaciones anteriores es una cúbica unicursal.

La eliminación de a entre la ecuación (1) y su derivada conduce á una relación independiente de a y que, por consiguiente, expresa una propiedad común á todas las cúbicas de esta familia. La ecuación característica de estas curvas es, pues,

$$\frac{x^2+y^2}{2(x+py)}=\frac{x^3-y^3}{3(x^2-py^2)} \quad \text{ó} \quad p=\frac{1+3m^2+2m^3}{m^4+3m^2+2m}$$

La curva (M) es simétrica con respecto á la recta AC; tiene por vértice el punto C y es tangente á CO y á CF en los puntos O, F.

De la ecuación (2) se deduce

$$\rho'=\frac{3a \operatorname{sen} \omega \cos \omega (\operatorname{sen} \omega+\cos \omega)}{(\cos^3\omega-\operatorname{sen}^3\omega)^2}$$

lo que muestra que ρ es máximum para $\omega=-45^\circ$ y mínimum para $\omega=0$ y $\omega=90^\circ$.

La curva tiene una sola asíntota NG inclinada á 45°. La distancia del origen á esta recta tiene por expresión

$$\delta = \frac{a \operatorname{sen}(45-\omega)}{\cos^3\omega - \operatorname{sen}^3\omega} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \, \frac{(\cos\omega - \operatorname{sen}\omega)}{(\cos^3\omega - \operatorname{sen}^3\omega)} = \frac{a\sqrt{2}}{2(1+\operatorname{sen}\omega\cos\omega)}$$

ó

$$\delta = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

es decir, que encuentra á AC en el punto N tal, que $AN = \frac{AC}{3}$

La cúbica (M) encuentra á la circunferencia O en dos puntos C, P.

Eliminando y entre las dos ecuaciones (1) y $x^2+y^2=2ax$, se obtiene

$$x^4-3ax^3+4a^2x^2-4a^4x+2a^4=0,$$

que admite por raíz $x=a$, de modo que la ecuación que debe dar la abscisa del punto P es

$$x^3-2ax^2+2a^2x-2a^3=0$$

Esta ecuación admite una sola raíz real entre $x=a$ y $x=2a$.

Su valor aproximado es $a \times 1,\ 535...$

Por otra parte, según lo que precede, se ve que esta raíz debe ser un poco superior al mayor de los valores de x correspondientes á la tersección de la circunferencia OA con la recta NG que tiene por ecuación $y=x-\frac{2a}{3}$.

Se deduce de esto $\quad 9x^2-15ax+2a^2=0$

de donde $\quad x=a\times 0,\ 146..\ $ y $\ x=a\times 1,\ 5205..$

Quedando así determinados los elementos necesarios para el estudio de la curva, falta indicar que la relación $\operatorname{tg}\theta=\cot^2\omega$ muestra que de los ángulos θ y $90-\omega$ ú ω y $90-\theta$, uno de ellos tiene por tangente el cuadrado ó la raíz cuadrada de la tangente del otro. La curva (M) podría, pues, servir para la determinación gráfica de uno de los ángulos, dado el otro.

CUESTIÓN 11

(Véase tomo I, página 239).

Integrar la ecuación

$$xydy^2-2(ax^2+by^2)dxdy+xydx^2=0$$

(E. CATALÁN).

Solución por el Sr. Brocard (H.)

De la ecuación dada se deduce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(ax^2+by^2)\pm\sqrt{(ax^2+by^2)-x^2y^2}}{xy}$$

Haciendo $y^2=tx^2$, se obtiene

$$2t+t'x=-2(a+bt)\pm2\sqrt{(a+bt)^2-t}$$

Las variables están separadas y el problema se reduce á las cuadraturas.

Según una indicación dada por el ilustre autor de la cuestión, se podrá continuar la deducción y escribir

$$(a+bt)^2-t=(a+bt-z)^2$$

De esta nueva ecuación se obtendrá para expresión de t.

$$t=\frac{z^2-2az}{2bz-1} \qquad dt=2\,\frac{bz^2-z+a}{(2bz-1)^2}\,dz$$

Se podría escribir también la ecuación propuesta como sigue:

$$x^2y^2dy^2+2(ax^2+by^2)xydxdy+x^2y^2dx^2=0$$

y por la sustitución $y^2=tx^2$, se reduciría á

$$4\left(\frac{dx}{x}\right)^2[(2b+1)t+2a+1]+4\left(\frac{dx}{x}\right)[a+(b+1)t]dt+dt^2=0$$

se sustituirían t y dt por los valores en función de z, y se separarían las variables.

La serie de las transformaciones es demasiado complicada para exponerse aquí, y no parece deba conducir á una integral algebraica.

CUESTIÓN 22

(Véase tomo I, página 263).

Desde un punto A *tomado sobre un diámetro de una circunferencia se trazan diversas rectas* AB. *Se proyecta el punto* B *de la curva en* C, *sobre el diámetro* OA, *después desde el punto* B *como centro, con* BC *por radio, se describe un arco de círculo Hallar el lugar de los puntos* D *de intersección de este arco con* AB.

(H. Brocard).

Solución por el Sr. Brocard (H).

Tomemos A por polo y AC por eje polar. Sean O el centro del círculo, a su radio, $AO=b$ y u el ángulo COB. Se tiene

$$\rho=AD=AB\pm BC=r\pm a \text{ sen } u$$

$$BC=a \text{ sen } u=\rho \text{ sen } \omega$$

y
$$r^2-2br \cos \omega+b^2-a^2=0$$

De esto resulta que

$$\rho(1\mp\text{sen } \omega)=b \cos \omega\pm\sqrt{a^2-b^2 \text{ sen}^2 \omega}$$

Si el punto A es exterior al círculo O, la curva (D) se halla inscripta en el ángulo de las dos tangentes trazadas desde A al círculo O.

La curva tiene dos puntos dobles en los extremos del diámetro del círculo que coincide con el eje polar.

Las diversas formas particulares de la curva son fáciles de obtenerse. Recomendamos esta discusión á la curiosidad del lector.

CUESTIÓN 23

(Véase tomo I, página 263).

Una parábola MN *variable en magnitud y en posición toca en su vértice* P *á una parábola* ABC *dada. La directriz de la parábola móvil* MN *es, constantemente, la recta* DE *perpendicular en el extremo de la cuerda normal* PQ. *¿Cuál es el lugar del foco* F?

(E. Catalán).

Solución por el Sr. Brocard (H.)

Siendo la cuerda PQ normal en el punto P, el foco F de la parábola móvil MN es, sobre PQ, el simétrico del punto Q con relación al punto P.

La cuestión se reduce, pues, á la siguiente:

En cada punto P de una parábola fija ABC se traza la normal PQ que encuentra á la curva en el punto Q. Desde P como centro, con PQ como radio, se describe una circunferencia que encuentra á PQ en los puntos Q y F. Hallar el lugar de los puntos F.

Siendo la ecuación de la parábola fija ABC

$$y^2=2px$$

y designando por b la ordenada del punto P, el punto Q tiene por coordenadas
$$\alpha=\frac{(2p^2+b^2)}{2pb^2}, \quad \beta=-\frac{2p^2+b^2}{b}$$

Pero la proyección P′Q′ de PQ sobre el eje OX tiene por valor

$$\frac{2\rho(p^2+b^2)}{b^2}.$$

Luego el punto F se determina por las dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$y-b=-\frac{b}{p}\left(x-\frac{b^2}{2p}\right) \qquad x=\frac{b^2}{2p}-\frac{2p(p^2+b^2)}{b^2}$$

La última ecuación dará b^2, después b, y faltará luego sustituir en la primera; pero se puede obtener igualmente

$$x=\frac{b^2}{2p}-\frac{2p(p^2+b^2)}{b^2}, \qquad y=3b+\frac{3p^2}{b},$$

ó bien eliminar b^2 entre las dos ecuaciones bicuadradas.

$$b^4-2p(2p+x)b^2-4p^4=0$$
$$9b^4+(p^2-y^2)b^2+4p^4=0$$

La eliminación es ahora muy fácil, y se obtiene inmediatamente:

$$400p^4+(y^2+2px-8p^2)(y^2-18px-24p^2)=0$$

CUESTIÓN 70

(véase tomo II, página 216).

Se da un círculo O *de radio* a *y una recta fija* FP *á una distancia* b *del centro* O. *Se traza una tangente* AB *que corta á* FP *en* B. *Se proyecta el punto de contacto* A *en* F *sobre* FP, *y desde el punto* A *como centro, con* AP *como radio, se describe un arco de círculo que encuentra á* AB M *y* M′. *Obtener el lugar de los puntos* M *y* M′. *Indicar las singularidades de la curva y los puntos particulares que resultan inmediatamente de los datos de la cuestión.*

(H. Brocard).

Solución por el Sr. Brocard (H.)

Tomemos por origen el centro O del círculo, por eje de las x la perpendicular OF á FP. Sean u, θ, ω los ángulos AOF, AOM, MOF.

Se tienen las relaciones

$$\rho \cos\theta=a, \quad AM=AP=b-a\cos(\omega+\theta)=a \operatorname{tg}\theta$$

de las que resulta

$$a\cos u=a\cos\omega\cos\theta-a\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\operatorname{sen}\theta,$$
$$-a\cos u=a\operatorname{tg}\theta-b,$$

y por consiguiente

$$0 = \frac{a^2}{\rho}\cos\omega - \frac{a}{\rho}\operatorname{sen}\omega\sqrt{\rho^2-a^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}-b$$

y en coordenadas rectilíneas

$$(a^2+y^2-a^2)(x^2+y^2-ay)^2=(bx^2+by^2-a^2x)^2,$$

ecuación de una curva de sexto grado.

Se reconocerá fácilmente que esta ecuación queda verificada por los sistemas de valores particulares

$$x=+a,\ y=\pm(b-a;\ x=-a,\ y=\pm(b+a);$$

$$x=-b,\ y=\pm a;\ x=+b,\ y=\pm a \text{ (raíz doble)}.$$

Suponiendo $b>a$, la cuerda se compone de dos bucles cerrados simétricos con respecto á Ox, á la que encuentran en dos puntos dobles. La circunferencia dada queda en su interior y el origen es un punto aislado.

CUESTIÓN 219

(Véase tomo IV, página 280).

Si á las rectas iA, iB, iC *que unen el centro del círculo inscripto en un triángulo con los vértices se levantan las perpendiculares* $i\alpha$, $i\beta$, $i\gamma$ *y se unen los puntos* α, β, γ *en que encuentran á una tangente cualquiera con los vértices correspondientes, las rectas* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *concurren en un punto.*

(JUAN J. DURÁN LORIGA).

Solución por el SR. SOLLERTINSKY (B.)

Sean A', B', C' los puntos de contacto del círculo i con los lados de ABC, M el punto de contacto de la tangente $\alpha\beta\gamma$.

La polar del punto α es la perpendicular bajada desde M á $i\alpha$, y la polar de A es B'C'. La intersección de estas rectas, es decir, la proyección de M sobre B'C' es, pues, el polo de $A\alpha$.

Ahora, se sabe que las proyecciones de M sobre los lados de A'B'C' están en una recta (de Simson). Luego sus polares $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concurren en un mismo punto.

Observación. El lugar de los puntos de intersección es una cúbica de cuarta clase.

CUESTIÓN 216

(Véase tomo IV, página 280).

Dados en un mismo plano un círculo de centro O *y una cónica que no pasa de* O; *un radio variable trazado por* O *corta al círculo en dos puntos* A_1, A_2 *y á la cónica en dos puntos variables* P_1, P_2. *Estudiar el lugar de los puntos dobles de las involuciones cuadráticas* $\{A_1, A_2; O, P_1\}$, $\{A_1, A_2; O, P_2\}$ (*).

(V. Retali).

Solución por el Sr. Retali (V.)

Sean K^2 el círculo, M un punto de su plano, M_1 y M_2 dos puntos recíprocos respecto á K^2 y conjugados armónicos respecto á O y M; cuando M describe una recta g que no pasa por O ni es tangente á K^2 (**), el lugar del par M_1, M_2 es el círculo G^2 que corta ortogonalmente á K^2 sobre la recta g. El centro G' de G^2 es el polo de g respecto á K^2: si g envuelve una cónica C^2 que no pasa por O, y M es el punto variable de contacto, el lugar de los dos puntos M_1, M_2 es también la envolvente del círculo G^2 y M_1 M_2 son los dos puntos de contacto de G^2 con la envolvente. El lugar hallado es, pues, la envolvente de un círculo variable que corta ortogonalmente al círculo fijo K^2, mientras que su centro recorre la cónica C_1^2, polar recíproca de C^2 respecto á K^2. Si C^2 y K^2 no tienen entre sí relaciones especiales de posición, el lugar hallado es una curva bicircular de cuarto orden (***), que es tangente en los cuatro puntos comunes á C^2 y K^2, á las rectas que proyectan estos puntos desde el punto O. El círculo K^2 es uno de los cuatro círculos focales, el deferente C_1^2 es una de las cuatro Jacobianas pertenecientes á la cuártica. Los otros tres círculos focales son los círculos que cortan ortogonalmente á K^2 sobre los tres lados del triángulo conjugado común, respecto á C^2 y K^2.

CUESTIÓN 215

(Véase tomo IV, página 280).

Dados en un mismo plano un círculo de centro O *y una cónica que pasa por* O, *un rayo variable trazado por* O *corta al círculo en dos pun-*

(*) Indicamos con el símbolo $\{A_1, A_2; O, P\}$ la involución cuadrática definida por los dos pares de puntos conjugados A_1, A_2 y O, P.

(**) A una recta que pasa por O corresponde la cónica degenerada formada por la misma recta y la recta en el infinito. A una tangente de K^2 corresponde el punto de contacto considerado como un círculo infinitesimal.

(***) Véase Salmon-Fiedler, *Höhere Curven*, Art. 274, pág. 319 de la segunda edición.

A_1 *y* A_2 *y á la cónica en un punto variable* P. ***Estudiar*** *el lugar de los puntos dobles de la involución cuadrática* $\{A_1, A_2; O, P\}$.

(VIRGINIO RETALI).

Solución por el Sr. Retali (V.)

Si M coincide con O, también uno de los dos puntos M_1, M_2 coincide con O y el otro va al infinito (véase la solucion á la cuestión 216). Al punto O corresponde, pues, la recta del infinito, y por esto, si C^2 pasa por O, del lugar hallado en la cuestión precedente se separa la recta del infinito. El lugar hallado es, pues, ahora una curva $C_6{}^3$ circular de tercer orden que pasa por O y toca en cuatro puntos (K^2C^2) las rectas que lo proyectan desde O. De otro modo, para la cúbica $C_6{}^3$ los cuatro puntos comunes á C^2 y K^2 tienen el tangencial común O, y con esto la cúbica queda determinada de modo unívoco (*). Esto puede reconocerse fácilmente también como sigue: Sobre la tangente t á C^2 en el punto O, dos puntos del lugar están unidos en O y el *tercero* (ya que hacemos abstracción del punto del infinito t, considerado como perteneciente á la recta en el infinito, que se separa de la cuártica) es el punto en el infinito de t; la cúbica $C_6{}^3$ toca, pues, á C^2 en O, y el tangencial de O es el punto real en el infinito de la curva. Es, pues, evidente que sobre el rayo O1, que proyecta desde O uno de los cuatro puntos 1, 2, 3, 4 comunes á C^2 y K^2, dos puntos del lugar están reunidos en el punto 1. La C^2 es la primera polar de O respecto á $C_6{}^3$; $C_6{}^3$ es también la envolvente (v. solución de la cuestión 216) de un círculo variable ortogonal á K^2, cuyo centro describe la parábola $C_1{}^2$, polar recíproca de C^2 respecto á K^2. El círculo dado K^2 es uno de los cuatro círculos focales de $C_6{}^3$ y $C_1{}^2$ la correspondiente Jacobiana: Los otros tres círculos focales cortan ortogonalmente á K^2 sobre los lados del triángulo diagonal del cuadrángulo 1, 2, 3, 4.

CUESTIÓN 171

(Véase tomo IV, página 156).

Si dos cúbicas circulares tienen un círculo focal común, se cortan en seis puntos (además de los dos puntos cíclicos y el centro del círculo focal) que forman tres pares de puntos recíprocos respecto al círculo focal.

(V. RETALI).

(*) Véase, por ejemplo, DUREGE *Die ebenen Curven dritter Ordnung* (Leipzig, Teubner, 1871), párrafo 404.

Solución por el Sr. Retali (V.)

Al círculo focal común K^2 de las dos cúbicas $C_6{}^3$ y $D_6{}^3$ corresponden ordenadamente las Jacobianas $C_1{}^2$ y $D_1{}^2$, que son parábolas. Las polares recíprocas de estas parábolas, respecto á K^2, se cortan en el centro O de K^2 y en otros puntos que designaremos con P, Q, R. Esto sentado, las dos cúbicas se cortan en los puntos cíclicos, además en O y en los tres pares de puntos P_1P_2, Q_1Q_2. R_1R_2 que corresponden ordenadamente á P, Q, R en la transformación (analagmática) indicada en la solución de la cuestión 216. Los dos puntos de todo par son evidentemente recíprocos respecto al círculo K^2.

Observación. De una manera análoga se ve que si dos cuárticas bicirculares tienen un círculo focal común, se cortan, en general, en los ocho puntos absorbidos en los puntos dobles comunes, y en otros ocho puntos que forman cuatro pares de puntos recíprocos respecto al círculo focal. Algunos de estos cuatro pares, ó también todos, pueden tener sus dos elementos coincidentes en puntos del círculo focal. Por ejemplo, si las dos cuárticas son de octava clase, y además del círculo focal, tienen comunes las cuatro tangentes simples (*) que parten de O; y por esto también los puntos de contacto de estas tangentes, los cuatro pares redúcense á estos puntos de contacto (situados en el círculo focal común) contado cada uno dos veces.

Es fácil ver cómo debe modificarse el teorema cuando una ó ambas cuárticas tienen, además de los dos puntos dobles comunes en los puntos cíclicos, otro punto doble ordinario ó cuspidal; y cuando se tenga un tercer punto doble común, por ejemplo; si las dos cuárticas tienen también una cúspide común, los pares de puntos recíprocos en los que se cortan, redúcese á uno solo, que puede reducirse á un punto del círculo focal.

CUESTIÓN 202

(Véase tomo IV, página 208).

Sean 1, 2, 3, 4 *los puntos de contacto de las tangentes trazadas á una cúbica general* C^3 *desde uno de sus puntos arbitrario* P; *sea* K^2 *una cónica cualquiera que pasa por* 1, 2, 3, 4 *y* P^2 *la cónica polar; sean finalmente* A, B, C *los puntos de intersección, además de* P, *de la* P^2 *con la cónica trazada por* P, *homotética y concéntrica de* K^2.

Demostrar que los puntos en el infinito de los tres rayos OA, OB, OC

(*) De O parten también dos tangentes dobles por cada una de las dos cuárticas.

pertenecerán C^3. Deducir de lo anterior el teorema conocido: Si por el punto real del infinito de una cúbica circular se trazan las cuatro tangentes á la curva, los puntos de contacto son los centros de los cuatro círculos focales.

V: RETALI.

Solución por el SR. RETALI (V.)

Dadas en el mismo plano dos cónicas K^2 y P^2 que no tienen entre sí relaciones especiales de posición, y que se cortan en los puntos 1, 2, 3, 4, tracemos por un punto P de P^2 un rayo m que corte ulteriormente á P^2 en el punto X, y sean X_1, X_2 los dos puntos que separan armónicamente á los dos puntos P, X y la cónica K^2. Cuando m varía en el haz P, el lugar de los dos puntos X_1, X_2 es una curva de cuarto orden que se separa en la recta p polar de P respecto á K^2 y en una cúbica general C^3. Esta cúbica pasa por dos puntos (K^2p) y los cinco puntos P, 1, 2, 3, 4; P es el tangencial común de 1, 2, 3, 4; y por esto P^2 es la cónica polar de P respecto á C^3. Haciendo abstracción de la recta p, que permanece invariable mientras P y K^2 no cambian, podemos decir que á la cónica P^2 corresponde la cúbica para la que P es el tangencial común de los cuatro puntos (K^2P^2). De esto se sigue que, sustituyendo á K^2 cualquier otra cónica del haz (K^2P^2) excepto P^2, la cúbica correspondiente á P^2 es siempre una misma C^3.

Para tener los puntos comunes á C^3 y á una recta arbitraria s, que no pasa por P, podemos proceder así: la cónica S^2 bitangente á K^2 sobre s y que pasa por P, corta á P^2 en otros tres puntos A, B, C que proyectados desde P sobre s dan los buscados (*) tomando por s la recta del infinito, S^2 se reduce á la cónica que pasa por P, homotética y concéntrica á K^2; y queda demostrada la primera parte del enunciado.

Si P es el centro de K^2, la S se separa en las dos asíntotas de K^2; de los tres puntos en el infinito de la cúbica, uno es el punto en el infinito de la tangente á P^2 en P, y los otros dos son los puntos en el infinito de K^2. Particularmente, si K^2 es un círculo de centro P, la cúbica tiene K^2 por uno de sus círculos focales (véase la solución de la cuestión 215) y de esto se concluye el conocido teorema: *Si desde el punto real en el infinito de una cúbica circular de sexta clase, se trazan*

(*) Véase RETALI, *Sopra due particolari transformazioni*, párrafo 15 (Memorie de la Real Accademia di Bologna, t. X).

las tangentes á la curva, los puntos de contacto son los centros de los cuatro círculos focales de la cúbica (*).

CUESTIÓN 203

(Véase tomo IV, página 208).

Si 1, 2, 3, 4 *son los puntos de contacto de las tangentes trazadas á una cúbica general* C^3 *desde uno de sus puntos* P *arbitrario, las cónicas trazadas por* P *y bitangentes en una recta fija á las cónicas del haz* 1234, *cortan á la cónica* (P1234) *en otros tres puntos fijos.*

(V. RETALI).

Solución por el SR. RETALI (V.)

Hemos visto en la solución de la cuestión 202 que, tomando por cónica fundamental de la transformación una cualquiera entre las cónicas del haz (1, 2, 3, 4), excepto la P^2, la cúbica correspondiente á P^2 permanece invariable. Designemos por s la recta fija; y sean ABC las proyecciones hechas desde P sobre P^2 de los puntos comunes á s y C^3. Las cónicas que pasan por P y son bitangentes en la recta s á las cónicas del haz (1, 2, 3, 4) cortarán ulteriormente á P^2 en los tres puntos A, B, C.

Observación. En el enunciado de esta cuestión hemos hecho referencia á la cúbica, sólo para mostrar la conexión con la precedente.

Al teorema puede evidentemente darse el siguiente enunciado: *Las cónicas que pasan por un punto y son bitangentes sobre una recta dada á las cónicas de un haz forman otro haz, y los ocho puntos-bases de los dos haces están en una cónica,* el cual es casi evidente analíticamente.

Sea

$$f+\lambda\varphi=0 \qquad (1)$$

donde $\varphi=0$ y $f=0$ son las ecuaciones de dos cónicas, y λ un parámetro variable, la ecuación del haz (1, 2, 3, 4) y sea $\psi=0$ la ecuación de la recta. Si designamos con f_1, φ_1, ψ_1 en lo que se convierten f, φ, ψ después de sustituirse las coordenadas del punto fijo P, las cónicas que pasan por P y son bitangentes sobre ψ á las cónicas del haz (1) están representadas por

$$(f\psi_1^2-f_1\psi^2)+\lambda(\varphi\psi_1^2-\varphi_1\psi^2)=0 \qquad (2)$$

y forman un haz, al que pertenece la cónica (P, 1, 2, 3, 4) porque la

(*) Véase SALMON-FIEDLER, *Hoöre Curven*, art 279, pág. 329 de la segunda edición.

ecuación $f\varphi_1 - f_1\varphi = 0$ de esta cónica se puede obtener atribuyendo en la (2) al parámetro λ el valor $-(f_1 : \varphi_1)$.

CUESTIÓN 168

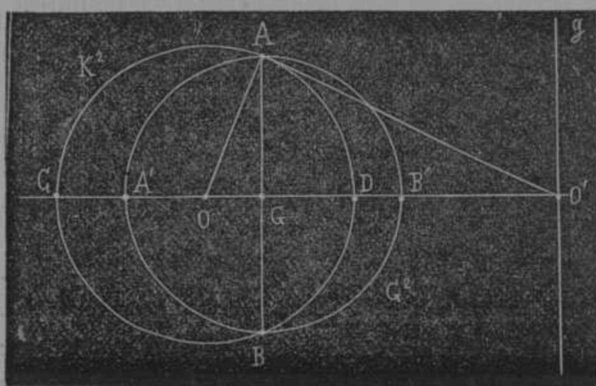
(Véase tomo IV, página 156).

Dados en un mismo plano real un círculo real ó imaginario de primera especie y una recta real; construir el círculo que corta ortogonalmente al círculo dado sobre la recta dada.

(V. Retali).

Solución por el Sr. Retali (V.)

Dos círculos concéntricos de radio m y $m\sqrt{-1}$ son mutuamente conjugados respecto á su centro común, si cada uno de ellos es polar recíproco de sí mismo respecto al otro, y tienen el centro común por polo de contacto y la recta en el infinito de su plano por cuerda de contacto.



Es muy conveniente representar un círculo imaginario de primera especie mediante el círculo real que le es conjugado (respecto al centro) y, en general, representar cónicas imaginarias (sistemas planos polares elípticos) mediante cónicas reales que les son conjugadas respecto á puntos internos á sus representaciones. Si P es un punto interno á la cónica real K^2 designaremos por K^2_ρ la cónica imaginaria conjugada de K^2, respecto á P.

Esto sentado, sea real el círculo dado K^2, no cortándolo la recta dada g en dos puntos reales. Desde el polo G de g respecto á K^2 tracemos la cuerda AB de K^2 paralela á g, y el círculo G^2 descrito sobre AB como diámetro es el círculo conjugado del buscado. En efecto, si C y D son los extremos del diámetro de K^2 perpendicular á g, los dos puntos imaginarios conjugados señalados en la recta |CD| del punto-círculo A son conjugados armónicos respecto á C y D, luego, etc.

De otro modo. El círculo descrito sobre AB como diámetro corta á la recta |CD| en dos puntos reales A′ y B′. Tendremos

$$AB+(A'B'\sqrt{-1})^2=0 \text{ (*)}$$

y los dos círculos K^2 y G^2_g, por un teorema de Moebius, son ortogonales.

Si el círculo dado es imaginario, sean G^2_g su representación real, g la recta dada y G′ el pie de la perpendicular bajada sobre g desde el centro G de G^2. Describamos ahora el diámetro AB de G^2 paralelo á g y que la perpendicular en A á la recta |G′A| corte á |GG′| en O; el círculo de centro O y radio OA es el buscado.

Observación 1.ª O es el polo de g respecto al círculo imaginario G^2_g (**).

2.ª El círculo G^2_g es la transformada de la recta g en la transformación considerada en la cuestión 216.

CUESTIÓN 169

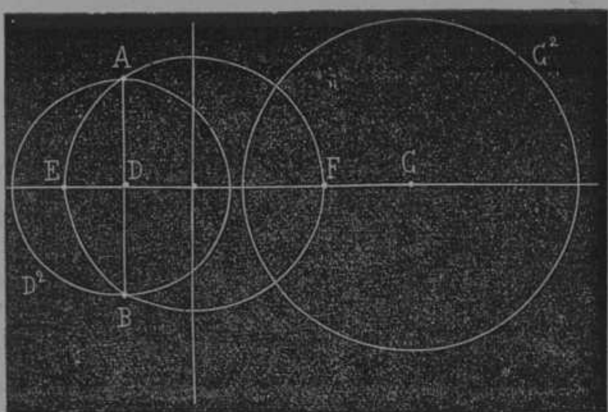
(Véase tomo IV, página 156).

Dados en un mismo plano real dos círculos, uno al menos de los cuales es imaginario de primera especie, construir el eje radical.

(V. RETALI.)

Solución por el SR. RETALI.

a) Uno de los dos círculos C^2 es real y del otro, imaginario de primera especie, se conoce el círculo conjugado D^2.

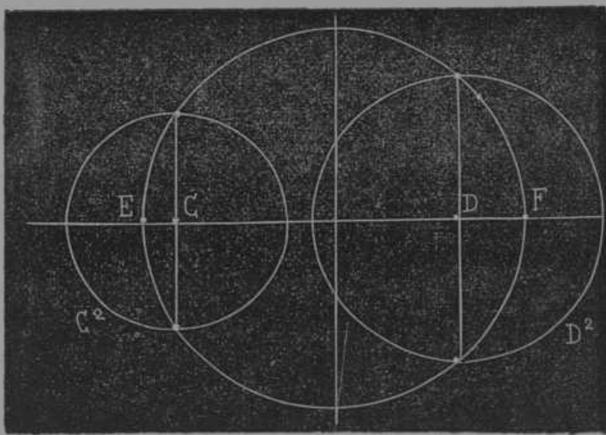


Sea AB el diámetro de D^2 perpendicular á la recta de los centros |CD|, y describamos el círculo que pasa por los dos puntos A, B y ortogonal á C^2, que cortará

(*) A F. MÖBIUS *Ueber imaginäre Kreise*, párr. 5 (g).

(**) Véase CH. WIENER *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*, Zweiten Band. Art. 121 pág. 119.

á la recta |CD| en dos puntos reales E y F. El eje del segmento (*) EF es el eje radical buscado. En efecto, los dos puntos E y F están separados armónicamente de C^2 y del círculo imaginario $D^2{}_d$.



b) Los dos círculos son imaginarios y C^2 y D^2 son sus representaciones.

El círculo que pasa por los extremos de los diámetros de C^2 y D^2 perpendiculares á CD cortan á esta recta en E y F. El eje del segmento EF es el eje radical buscado. En efecto, los dos puntos E y F son recíprocos respecto á los dos círculos imaginarios dados.

CUESTIÓN 170

(Véase tomo IV, página 156).

Construir el círculo que divide armónicamente dos segmentos dados y que corta ortogonalmente á un círculo dado (real ó imaginario de primera especie) (**).

(V. Retali).

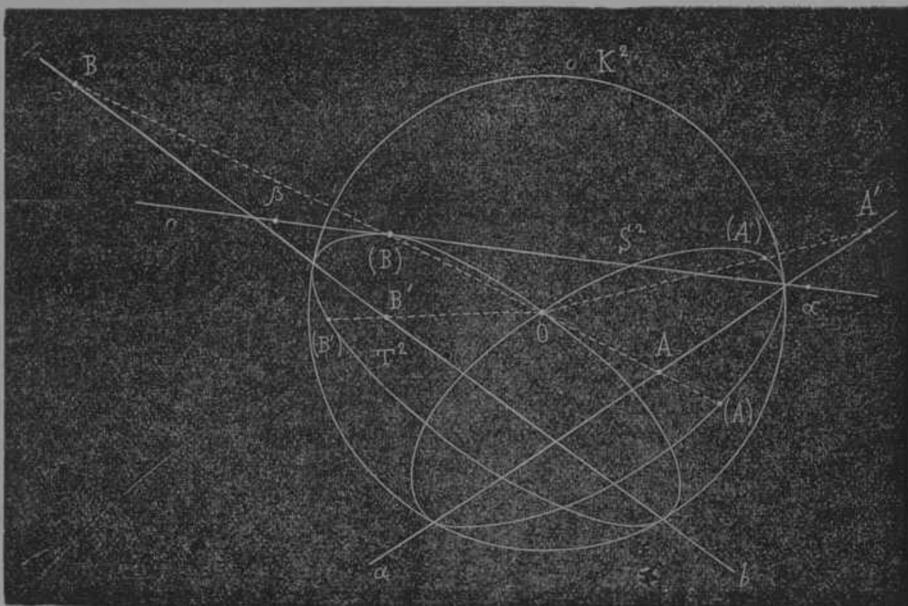
Solución por el Sr. Retali (V.)

Se demuestra fácilmente que los círculos ortogonales á un círculo dado K^2 y separados armónicamente de los puntos dados A y A′ forman un haz. Describamos la cónica S^2 que pasa por el centro O de K^2 y es bitangente á K^2 sobre la recta $|AA'| \equiv a$, y sea α el polo de la involución cuadrática en S^2 que tiene por puntos dobles las proyecciones (A) y (A′) de AA′ desde O sobre S^2. Todo círculo secante ortogonalmente á K^2 sobre un rayo trazado por α, queda armónicamente separado de A y A′. En efecto, un rayo r que pasa por α corta á S^2 en

(*) Llamamos eje de un segmento á la recta perpendicular al mismo en su punto medio.

(**) En las tres cuestiones precedentes se entiende que los círculos imaginarios están dados ó construídos sus círculos conjugados. En la cuestión 168, si el círculo dado es real, se supone que la recta lo corta en puntos imaginarios.—(V. Retali).

dos puntos R y R′ separados armónicamente por (A) y (A′), y las proyecciones de R y R′ hechas desde O sobre a, ó sea las intersecciones de a con el círculo R^2 (*) (que corta ortogonalmente á K^2 sobre la r), son conjugadas armónicas respecto á A y A′. Los círculos ortogonales á K^2 y separados armónicamente por A y A′ forman, pues, un haz cuyos dos puntos-bases en el infinito son recíprocos respecto á K^2 y conjugados armónicos respecto á O y α.



De esto resulta la construcción siguiente: Se trazan las cónicas S^2 y T^2 que pasan por el centro de K^2 y respectivamente bitangentes á K^2 sobre las rectas $|AA'|\equiv a$ y $|BB'|\equiv b$, y se toman los polos α y β de las involuciones (cuadráticas) que sobre S^2 y T^2 tienen respectivamente por puntos dobles las proyecciones de AA′ y BB′ hechas desde O; el círculo que corta ortogonalmente á K^2 sobre la recta $|\alpha\beta|$ es el buscado.

Observación.—Si los dos puntos A y A′ están alineados con O, es claro que el haz de los círculos ortogonales á K^2 y separados armónicamente de A y A′ tiene por puntos-bases los dos puntos recíprocos respecto á K^2 y conjugados armónicos respecto de A y A′.

(*) Véase la resolución de la cuestión 216 la de la 202 y la Memoria citada en esta última.

CUESTIÓN 239

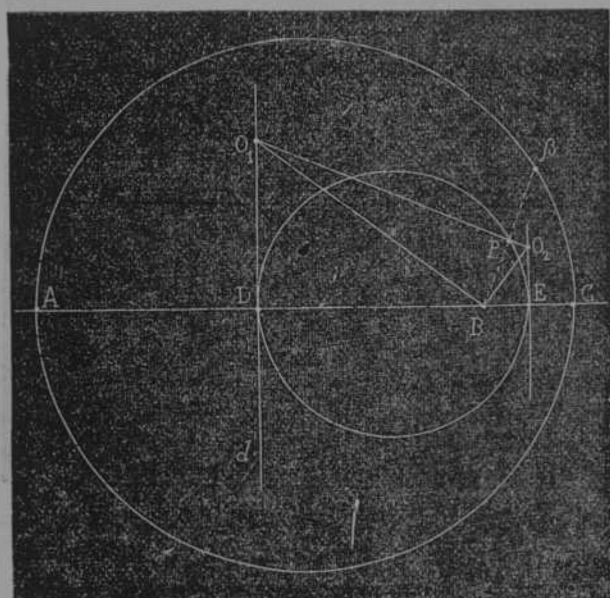
(Véase tomo V, página 55).

Sean A, B, C *tres puntos en línea recta. Por* A *y* B *se describe una circunferencia* O_1, *por* B *y* C *una circunferencia* O_2. *Cuando estas circunferencias varían de manera que sus radios conserven una razón dada, su segundo punto de intersección describe una circunferencia,* y *su línea de los centros envuelve una cónica.*

(J. NEUBERG).

Solución por el SR. RETALI (V.)

Sean *d*, *e* las perpendiculares trazadas á la recta AC en los puntos medios de los segmentos AB, BC. El triángulo O_1BO_2 rectángulo en B, conservando el vértice B fijo, recorre con dos vértices O_1 y O_2 las rectas *d*, *e;* la envolvente de la recta O_1Q_2 es, pues, la elipse que tiene el segmento DE por eje mayor y uno de sus focos en el punto B. El lugar del pie P de la perpendicular trazada por B sobre la recta O_1O_2 es el círculo descrito sobre DE como diámetro; y el punto β, simétrico de B respecto á la recta O_1O_2 describe la circunferencia que tiene por diámetro AC.



CUESTIÓN 244

(Véase tomo V, página 103).

En un plano se dan una recta g *y cuatro puntos* A, B, C, D. *Hallar un punto* S *tal, que la proyección central de los cuatro puntos desde* S *sobre* g *forme una serie de distancias iguales.*

(F. MEYER).

Solución por el SR. RETALI (V.)

Supongamos que sobre *g* las proyecciones de A, B, C, D se presenten en el orden A', B', C', D'. Sea I el punto en el infinito de la recta g, y construyamos la cónica D^2 circunscripta al cuadrángulo ABCI, sobre la que los dos puntos A y C son conjugados armónicos respecto de BI. (Con este objeto, trazadas por A, B, C las rectas a, b, c paralelas á g, se obtiene el rayo b' conjugado armónico de b respecto de a y c. La D^2 está circunscripta al triángulo ABC y tiene b' por asíntota). Construyamos después la cónica A^2 circunscripta al cuadrángulo BCDI y sobre la que los dos puntos B y D son conjugados armónicos respecto de C é I. Estas dos cónicas D^2 y A^2 se cortan en los tres puntos B, C, I y además en un cuarto punto S que resuelve la cuestión. En efecto, el haz S (ABCI) armónico se halla cortado por g en cuatro puntos armónicos $A'B'C'I$; luego $A'B'=B'C'$. El haz armónico S(BCDI) corta á g en cuatro puntos armónicos $B'C'D'I$ y $B'C'=C'D'$.

CUESTIÓN 245

(Véase tomo V, página 103).

Se dan seis puntos del espacio por los que se debe trazar un cilindro de segundo orden, de modo que no se hallen dos de los puntos en un lado.

(J. Meyer).

Solución por el Sr. Retali (V.)

Sean 1, 2, 3, 4, 5, 6 los puntos dados, cuatro cualesquiera de los cuales supondremos que no se hallan en un mismo plano. Estos seis puntos determinan una (sola) curva alabeada de tercer orden Γ^3, y los tres cilindros de segundo grado, reales ó imaginarios, que proyectan Γ^3 desde sus tres puntos en el infinito resuelven la cuestión.

Sea A^2 el cono cuádrico que tiene por vértice el punto 1, y definido por las cinco generatrices 12, 13, 14, 15, 16; y sea B^2 el cono cuádrico que tiene el mismo vértice 1 y está definido por las cinco rectas trazadas por 1 paralelamente á las cinco rectas 21, 23, 24, 25, 26. Teniendo estos dos conos la generatriz común 12, se cortan, en general, según otras tres generatrices cuyos puntos en el infinito son los hallados.

Según que la Γ^3 es *a*) una *hipérbola alabeada*, *b*) una *elipse alabeada*, *c*) una *hipérbola parabólica*, *d*) una *parábola alabeada*, se tiene *a*) *tres* cilindros hiperbólicos *b*) *un* solo cilindro elíptico *c*) dos cilindros, uno de los cuales es parabólico y el otro hiperbólico, *d*) un solo cilindro parabólico.

CUESTIÓN 252

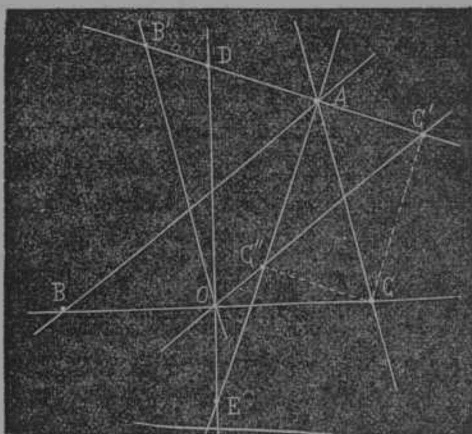
(Véase tomo V, página 168).

Se consideran las parábolas P_a, P_b, P_c *que tienen por foco un vértice del triángulo* ABC *y por directriz el lado opuesto (construir las tangentes comunes á dos de estas parábolas).*

(J. Neuberg).

Solución por el Sr. Retali (V.)

Tracemos la perpendicular á BC en el punto medio O y las bisectrices AE y AD, interna y externa, del ángulo BAC. Las proyecciones C′ y C″ del punto C sobre las bisectrices AD y AE están en línea recta con O. [En efecto, los dos segmentos C′C″ y AC se bisecan mutuamente; pero el haz A(C′CC″B) es armónico; luego C′C″ es paralela á AB]. La parábola P_b es la pedal negativa, respecto al polo, de la paralela trazada por O á AC, y P_c es la pedal negativa respecto á C de la OC′. De esto se sigue que las tangentes comunes á P_b y P_c son, además de la recta en el infinito del plano, *la mediatriz* DE *del lado* BC, *y las bisectrices interna y externa del ángulo* BAC.



CUESTIÓN 251

(Véase tomo V, página 168).

Sean A′, B′, C′ *los puntos medios de los tres lados del triángulo* ABC. *Se describe una hipérbola* H_c *cuyas asíntotas son* A′B′, A′C′ *y que pasa por* B *y* C.

Sean H_b, H_c *las hipérbolas análogas con relación á* B *ó* C.

Las potencias de estas hipérbolas son respectivamente iguales á

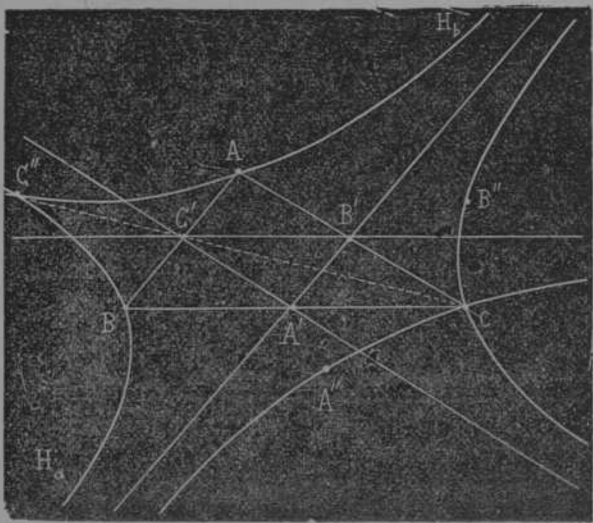
$$\frac{1}{4}\,bc,\ \frac{1}{4}\,ca,\ \frac{1}{4}\,ab$$

Calcular las longitudes de los ejes.

(J. Neuberg).

Solución por el Sr. Retali (V.)

Prolonguemos CC′ en una longitud $D'C'' = \frac{1}{2}$ CC′. Las dos hipérbolas H_a y H_b, además de tocarse en el punto del infinito de su asíntota común A′B′, se cortan evidentemente en los dos puntos C y C″.



Los puntos B y C son los extremos de un diámetro de la H_a. Las rectas BA y CA, paralelas á las asíntotas, se cortan en A, y por consiguiente AA′ es el semidiámetro conjugado á BC. Hagamos $AA'=a'$, y designemos con α y β los semiejes de H_a. Tendremos

(1) $$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a'^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

La potencia de H_a es $BC'.C'A' = \frac{bc}{4} = K^2$

y siendo $4K^2 = \alpha^2 + \beta^2$ tendremos $\alpha^2 + \beta^2 = bc$.

De las (1) y (2), teniendo presente la relación

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4a'^2$$

resulta $$4\alpha^2 = a^2 - (b-c)^2 \quad 4\beta^2 = (b+c)^2 - a^2$$

Solución por el Sr. Klompers, ***profesor en el Ateneo de Amberes.***

Por los vértices del triángulo ABC tracemos paralelas á los lados opuestos, de modo que se forme el triángulo complementario A″B″C″.

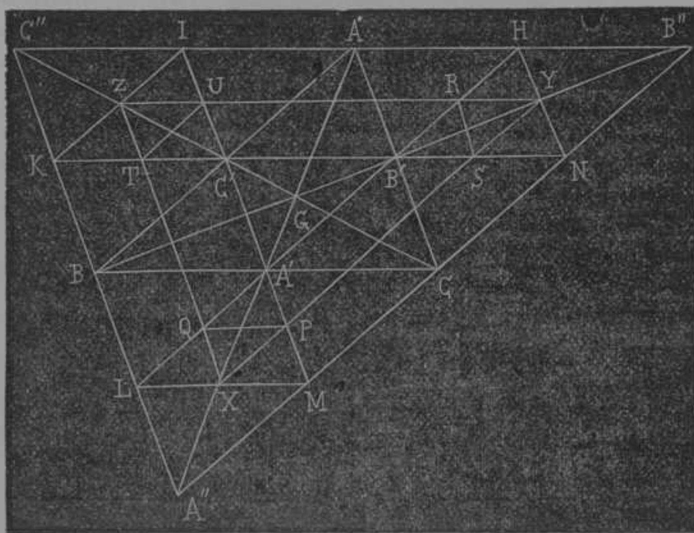
Sean X, Y, Z los medios de las distancias A′A″, B′B″, C′C″. El triángulo XYZ es homotético con cada uno de los triángulos A′B′C′, A″B″C″. El centro de homotecia es el centro de gravedad G del triángulo dado.

Prolonguemos los lados del triángulo A′B′C′ hasta su intersección con los de los triángulos XYZ, A″B″C″. Determinaremos así dos grupos de tres paralelogramos A′PXQ, B′RYS, C′TZU y A′MA″L, B′HB″N, C′KC″I.

Las diagonales, no dirigidas según las medianas del triángulo ABC son paralelas á los lados de éste y tienen por valores

$$PQ=\frac{1}{4}a,\ RS=\frac{1}{4}b\ \ TU=\frac{1}{4}c,\ ML=\frac{1}{2}a,\ HN=\frac{1}{2}b\ \ KI=\frac{1}{2}c.$$

Vamos á demostrar que las tres hipérbolas H , H_b , H_c , que tienen dos á dos una asíntota común, tienen un contacto de segundo



orden sobre ésta asíntota y que sus puntos comunes situados á distancia finita son además de A, B, C los vértices del triángulo XYZ.

En efecto, dos diámetros conjugados cualesquiera de una hipérbola dividen armónicamente el ángulo de las asíntotas; y el área del paralelogramo formado por éstas y las paralelas á las mismas trazadas por un punto cualquiera de la curva es constante.

La hipérbola H_a admite, pues, por diámetro conjugado á BC, la recta AA′A″. Igualmente CA y BB″, AB y CC″ constituyen un par de diámetros conjugados de las hipérbolas H_b , H_c .

El paralelogramo YHA′P es equivalente á CB′A′M

» ZIA′Q » BC′A′L

y por esta razón, los puntos Y, Z se hallan en la hipérbola H_a .

Igualmente ZKB′R equivale á AC′B′H

XLB′S » CA′B′N

XMC′I » BA′C′K

YNC′U » AB′C′I

Lo que demuestra que los puntos Z, X y X, Y pertenecen respectivamente á las hipérbolas H_b, H_c.

En segundo lugar, el área del paralelogramo construído sobre dos diámetros conjugados BC, AA″ de la hipérbola H_a es el doble de la del paralelogramo BCHI y equivale, por consiguiente, á la del triángulo A″B″C″ ó á cuatro veces la del triángulo ABC. Las tres hipérbolas H_a, H_b, H_c tienen, dos á dos, una asíntota común; además, los rectángulos construídos sobre los ejes tienen la misma área, resultando, según un teorema conocido, que tienen dos á dos un contacto de segundo orden sobre la asíntota común.

II. Las potencias de las hipérbolas H_a, H_b, H_c son respectivamente

$$CB' . B'A' = \frac{1}{2} b . \frac{1}{2} c = \frac{1}{4} bc$$

$$AC' . C'B' = \frac{1}{2} c . \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} ca$$

$$BA' . A'C' = \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} b = \frac{1}{4} ab.$$

III. *Longitudes de los ejes.* Los ejes de la hipérbola H_a se hallan dirigidos según las bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas A′B′ y A′C′; son, pues, paralelos á las bisectrices interior y exterior del ángulo A, y la asíntota A′B′ forma con el eje transverso un ángulo igual al complemento de $\frac{1}{2}$ A. Por otra parte, si designamos por x, y las longitudes de los semi-ejes, la potencia de la hipérbola

será $$\frac{1}{4}(x^2+y^2) = \frac{1}{4} bc.$$

Vemos, pues, que x é y son los lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\sqrt{bc}$, es decir, una media proporcional á los dos lados del ángulo A, teniendo un ángulo agudo el valor $\frac{1}{2}$ A. Tendremes, por consiguiente, los semi-ejes, proyectando sobre las bisectrices del ángulo B′A′C′ una longitud igual á $\sqrt{bc}$, tomada sobre A′H, á partir del punto A′.

$$x = \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \sqrt{bc} \qquad y = \cos \frac{1}{2} A \sqrt{bc}$$

Se obtendrían de una manera análoga las longitudes de los ejes de H_b y H_c.

CUESTIÓN 252

(Véase tomo V, páginas 168 y 228).

Se consideran las parábolas P_a, P_b, P_c *que tienen por foco un vértice del triángulo* ABC *y por directriz el lado opuesto, construir las tangentes comunes á dos de estas parábolas.*

(J. NEUBERG).

Solución por el SR. KLOMPERS (T.), *Profesor del Ateneo de Amberes.*

1.° El lugar de los puntos simétricos del foco con respecto á las tangentes á la parábola es la directriz.

2.° La polar de un punto cualquiera de la directriz pasa por el foco y es perpendicular á la recta que une este punto al foco.

Teorema. Las tangentes comunes á las dos parábolas P_b, P_c distintas de la recta del infinito, son las bisectrices del ángulo A y la mediatriz que corresponde al lado opuesto BC. Los seis puntos de contacto se hallan sobre las rectas A'B y A'C que unen el punto A', diametralmente opuesto al punto A en la circunferencia circunscripta al triángulo ABC en los extremos del lado BC.

Demostración. Según (1.°) las tangentes buscadas son rectas tales, que los simétricos de los puntos B y C con respecto á ellas, se hallan sobre los lados AC y AB del ángulo A.

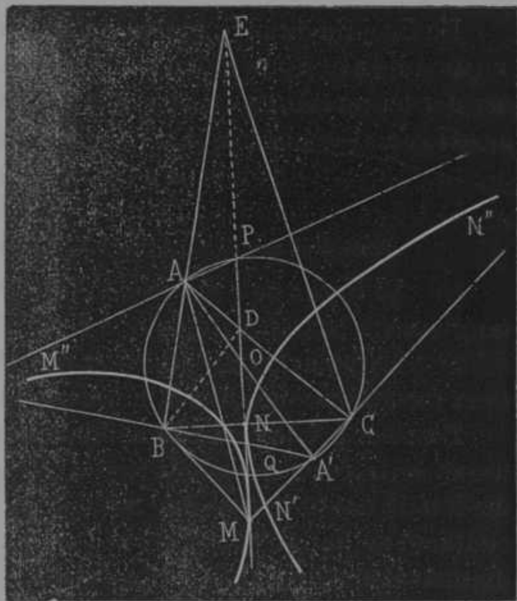
Las rectas que satisfacen á estas condiciones son evidentemente las bisectrices AP y AQ del ángulo A y la perpendicular levantada en el medio de BC. El triángulo APQ que forman y cuyos vértices A, P, Q son, por consiguiente, umbílicos, es rectángulo en A, y la hipotenusa PQ es el diámetro del círculo circunscripto, perpendicular al lado BC del triángulo ABC.

El (2) nos permite demostrar la segunda parte del teorema relativa al punto de contacto. Basta observar que el punto A está en la intersección de las directrices; las cuerdas de contacto de las tangentes trazadas por A á las curvas P_b y P_c son las perpendiculares BA' y CA' levantadas en B y C á los lados AB y AC del triángulo ABC, y se cortan en el punto A', extremo del diámetro que pasa por A.

La tercera tangente PQ encuentra á las directrices AC y AB respectivamente en los puntos D y E; las perpendiculares á las rectas BD y CE en los puntos B y C determinan sobre PQ los puntos M y N que son los puntos de contacto. Se hallan situados respectivamente en las rectas CA' y BA'.

Solución por D. Juan V. Alonso.

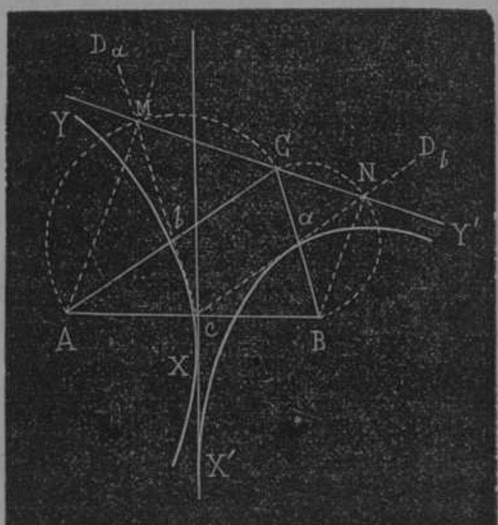
Los ejes de las parábolas consideradas son las alturas del triángulo ABC. Las tangentes en el vértice respectivas son las paralelas medias á los lados del triángulo, *bc*, *ca*, *ab*. Fundándose en la propiedad de estas tangentes de ser podares de la parábola correspondiente respecto á su foco se deduce la solución buscada.



Cuestión 252.—Solución del Sr. Klompers.

Refirámonos, por ejemplo, á las parábolas P_a, P_b.

Una de las tangentes comunes será la perpendicular al lado AB en su punto medio *c*, la cual verifica, según es visible la propiedad indicada.



Cuestión 252.—Solución del Sr. Alonso.

La otra es la bisectriz del ángulo exterior en C. En efecto, los triángulos C*b*M, C*a*N son evidentemente isósceles

$$bM = bC = bA$$
$$aN = aC = aB$$

Es decir, que los puntos M, N están sobre las circunferencias descritas sobre AC, BC como diámetros, y por tanto los ángulos en M y N son rectos, cumpliéndose por tanto la condición exigida.

CUESTIÓN 24

(Véase tomo I, página 263),

En la brújula de inclinación el lugar de las posiciones de equilibrio de la aguja es un cono oblicuo de base circular. (E. Cesaro).

Solución, remitida por un alumno de la Escuela de Caminos (*).

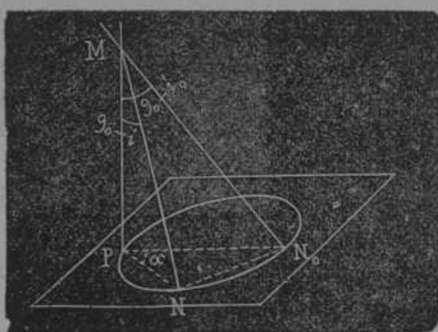
La brújula de inclinación es, según sabemos, una aguja imantada suspendida por su centro y dispuesta de modo que podamos hacerla mover en un plano vertical cualquiera.

Haciendo variar este plano, á cada una de sus posiciones corresponderá una de quilibrio para la aguja, de modo que la inclinación de la aguja es así una inclinación del ángulo que el plano vertical que se considere forme con el meridiano magnético.

Para comodidad de nuestro razonamiento llamaremos:

α el ángulo variable que el plano vertical forma con el meridiano magnético, designando el plano con el signo P_α.

i la inclinación correspondiente de la aguja; es decir, el ángulo que en su posición de equilibrio en el plano P_α forma con la dirección horizontal.



i_0 el ángulo de inclinación de la aguja en el meridiano magnético, y por tanto también cuando está suspendida libremente.

Definidos estos ángulos, haremos notar que el equilibrio de la aguja ha de resultar de la acción que la tierra ejerce sobre ella y de la reacción normal que el plano considerado opondrá, según la condición establecida.

Llamemos F la fuerza que la tierra ejerce sobre un polo de la aguja, fuerza cuya dirección hemos ya definido. Descompongamos esta fuerza en tres direcciones rectangulares: la vertical, la horizontal situada en el plano P_α y la normal á éste. Sus valores serán respectivamente.

$$F \operatorname{sen} i_0, \quad F \cos i_0 \cos \alpha, \quad F \cos i_0 \operatorname{sen} \alpha.$$

Esta última debe quedar destruída por la reacción del plano vertical, y los valores de las otras dos dan entonces la inclinación de la

(*) La demostración del sencillo teorema propuesto, se ha dado en la clase de física de la Escuela de Caminos, y está, *en principio*, indicada en el tratado de Mr. Gariel, y acaso en alguna otra obra. No puede, pues, el que hoy la presenta á los lectores de El Progreso Matemático darla como una novedad ni tampoco firmarla como cosa propia. Sin embargo, la publica en vista de que viene figurando esta cuestión entre las propuestas por este periódico.

fuerza subsistente, es decir, la de la posición de equilibrio que corresponde al plano P_α, y será

$$\text{tang}\, i = \frac{\text{F sen}\, i_0}{\text{Fcos}\, i_0 \cos \alpha} = \frac{\text{tang}\, i_0}{\cos \alpha}$$

Ahora consideremos ya el cono formado por las posiciones de la aguja en los distintos planos verticales y cortémoslo por un plano horizontal. Sea P la proyección del centro M de suspensión y sean N, N_0 las intersecciones de dos posiciones de la aguja en un plano cualquiera y en el meridiano magnético con el plano de la sección horizontal

Tendremos evidentemente

$$PN = MP \,.\, \text{cotg}\, i \quad PN_0 = MP \,.\, \text{cotg}\, i_0$$

De donde $$PN = PN_0 \,.\, \cos \alpha$$

Y segun esto, el ángulo PNN_0 es recto, y por tanto el lugar de los puntos N, sección horizontal del cono considerado es una circunferencia, la circunferencia descrita sobre PN_0 como diámetro.

CUESTIÓN 209

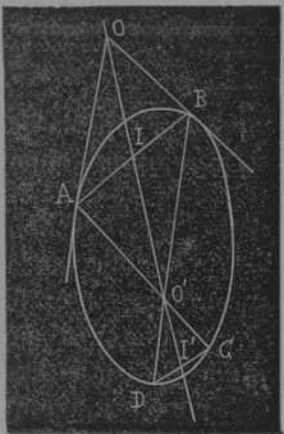
(Véase tomo IV, página 280 y t. V, p. 20).

Desde un punto cualquiera O *se trazan dos tangentes* OA, OB *á una cónica. Sean* AC, BD *las cuerdas paralelas á* OB, OA. *Demostrar que las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

(J. Neuberg).

Solución por D. Juan V. Alonso

La propiedad enunciada es un caso particular del conocido teorema del exágono de Pascal. En efecto, como tal puede considerarse el contorno ABDC, suponiendo en A yB dos lados infinitamente pequeños dirigidos según las tangentes respectivas. En este exágono se verifica que dos pares de lados opuestos son paralelos; luego los otros los lados AB y CD serán también paralelas, puesto que la recta á que se refiere el teorema de Pascal está toda en el infinito.



Puede también demostrarse directamente la propiedad de que tratamos.

En efecto, O debe encontrarse sobre el diámetro conjugado con la dirección de AB, y éste coincidirá, por tanto, con la diagonal del paralelogramo OAO'B. Este diámetro OO' lo será igualmente para la elipse y para el sistema de rectas AO', BO'. Por tanto, la paralela á AB trazada por C debe cortar á la elipse y á BO' en un mismo punto, es decir, coincidir con DC, según se deseaba demostrar.

Observación. El punto O', en que se cortan las cuerdas AC, BD puede caer, en caso de ser la cónica elipse, dentro ó fuera de la misma. Es fácil conseguir que esté dicho punto O' sobre la elipse. Esto se verificará cuando AB divida en partes iguales el semidiámetro conjugado. La demostración puede hacerse sin dificultad gráfica ó analíticamente, fundándose en que I es siempre punto medio de OO'

Estos triángulos inscriptos, cuyo centro de gravedad coincide con el de la elipse, tienen todos áreas iguales y son máximos entre todos los inscriptos. En cambio, los circunscriptos correspondientes son de área mínima entre los circunscriptos (Carnoy, Geometría Analítica).

CUESTIÓN 240

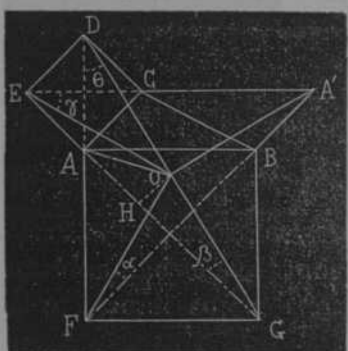
(Véase tomo IV, página 32).

Si el ángulo A *de un triángulo es igual á* 45°: 1.° *Los vértices de los cuadrados construídos exteriormente sobre los lados* AB, AC *y el vértice* A' *del paralelogramo* BACA' *están en una circunferencia concéntrica con el círculo* ABC; 2.° *La suma de los cuadrados de los radios de estos círculos es igual á la suma de los cuadrados de los lados* AB, AC.

(B. Sollertinsky).

Solución por el profesor D. R. Mir de Lara

1.° Quedará demostrada la primera parte del enunciado probando que siendo O el centro del círculo ABC, las distancias OA', OG, OF, OE y OD, son iguales entre sí.



En efecto, puesto que ∠ A=45° por hipótesis y el ∠ BAG es igual también á 45°, en virtud de las propiedades de las diagonales del cuadrado, resulta que AE está en prolongación de la diagonal GA; por otra parte, BA también está en prolongación de la diagonal FB, pues siendo ∠ ABA' suplementario del A, lo será del igual á éste ABF que le es adyacente.

Por pertenecer O á la perpendicular levantada en el punto medio de AB, equidista de los vértices F y C, luego OF=OG [1].

Además $\angle\alpha=\angle\beta$, por ser diferencias de ángulos iguales, y GE=FA′ por ser iguales los segmentos cuyas sumas representan.

Tenemos, pues, los triángulos EOG, FOA′ iguales, por serlo respectivamente dos lados y el ángulo comprendido. De aquí OE=OA′ [2].

Análogamente se deduce que $\angle\theta=\angle\gamma$ y que OD=OE [3], y como además se verifica que DF=BA′, resulta que los triángulos ODF, OEA′ son iguales, y por lo tanto, que OF=OA′ [4].

Finalmente, de la comparación de las igualdades [1] á [4], resulta demostado que OF=OG=OA′=OD=OE.

Representando por R, r los radios de ambos círculos, por L, l los lados AB, AC y por D, d las diagonales de los cuadrados construídos respectivamente sobre AB y AC, hay que demostrar

$$R^2+r^2=L^2+l^2.$$

Como $\angle$ DEA es recto y el vértice E pertenece á la circunferencia concéntrica con el círculó ABC, los puntos D y E estarán en los extremos de un mismo diámetro, y por lo tanto OD y OG estarán en prolongación uno de otro. Considerando, pues, el triángulo rectángulo DEG, se verifica en él que

$$\left.\begin{array}{l} 4R^2=[D+l]^2+l^2=D^2+2l^2+2Dl \\ \text{y como } D^2=2L^2 \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4R^2=2L^2+2l^2+2l\sqrt{2} \\ 2R^2=L^2+l^2+Ll\sqrt{2} \quad [1] \end{array}$$

En el triángulo OEA se verifica que

$$r^2=R^2+l^2-2l\times EH$$

pero $EH=\frac{1}{2}GE=\frac{1}{2}(D+l)=\frac{1}{2}(L\sqrt{2}+l)$, y sustituyendo resulta

$$r^2=R^2+l^2-lL\sqrt{2}-l^2=R^2-lL\sqrt{2} \qquad [2]$$

Sumando ordenadamente [1] y [2] y simplificando, queda

$$R^2+r^2=L^2+l^2.$$

Solución remitida por el Sr. Sollertinsky (B.)

1.º Evidentemente las diagonales GC, DB de los cuadrados ADEB, ACFG son paralelas á los lados AB, AC del triángulo, y las diagonales AF, AE son prolongaciones de las rectas AD, AG. Se tiene, pues,
$$\angle DA'G=45^{\circ}=\angle DEG=\angle DFG$$

Por consiguiente, los cinco puntos D, E, A′, F, G están en una misma circunferencia. Esta circunferencia está evidentemente descrita sobre EF como diámetro; y puesto que las mediatrices de las cuerdas DE, FG son al mismo tiempo las mediatrices de las cuerdas AB, AC de la circunferencia ABC, estas dos circunferencias son concéntricas.

2.º Del $\triangle$ EAF se obtiene

$$AE^2+AF^2=2AO^2+2OE^2$$

ó $$2AB^2+2AC^2=2AO^2+2OE^2$$

Luego $$AO^2+OE^2=AB^2+AC^2$$

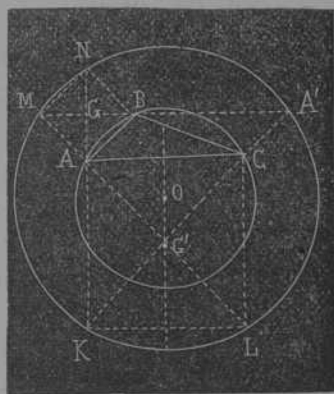
Sean OB′, OC′ dos radios rectangulares de la circunferencia exterior en B, C; M, M′ los medios de las cuerdas BC, B′C′.

Si se toma sobre la circunferencia BC el punto A de manera que MA sea igual á OM′, los cuadrados construídos exteriormente sobre los lados AB, CA serán los cuadrados buscados, porque se tiene

$$AB^2+AC^2=2AM^2+BM^2=OB'^2+OB^2.$$

Solución por D. Juan V. Alonso

La línea MB diagonal del cuadrado construído sobre AB formando con este lado un ángulo de 45º es por esa razón paralela á AC, y por tanto estará en prolongación con BA′. Y como MA hace el mismo ángulo de 45º con AC, el trapecio ACMA′ es simétrico y coinciden las perpendiculares á MA′ y á CA en sus puntos medios.



Del mismo modo tenemos que KC es prolongación de CA′ y que la perpendicular en el punto medio de A′K coincide con la levantada á AB en el suyo.

De aquí la evidencia de la serie de igualdades que podemos formar con las distancias desde O centro del círculo ABC á los cinco puntos indicados en el enunciado

$$ON=OM=OA'=OK=OL$$

Por consiguiente, está demostrada la primera parte del teorema.

Para la demostración de la segunda parte, llamemos r el radio del círculo ABC y R el del otro, e la distancia del centro de los círculos al del cuadrado ABMN y a, b, c los lados del triángulo dado respectivamente opuestos á los ángulos A, B, C.

Podremos establecer las igualdades siguientes:

$$r^2=\left(e-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{1}{4}c^2=e^2-ec+\frac{1}{2}c^2$$

$$R^2=\left(e+\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{1}{4}c^2=e^2+ec+\frac{1}{2}c^2$$

y sumando $$r^2+R^2=2e^2+c^2$$

Pero la magnitud e es igual á la diagonal del cuadrado construída sobre CD por partes de paralelas entre paralelas. Por tanto

$$2e^2=b^2 \quad \text{y en definitiva} \quad r^2+R^2=b^2+c^2$$

Observación.—También han remitido soluciones á esta cuestión los Sres. Klompers, Caro y D. Ignacio Beyens.

CUESTIÓN 1

(Véase tomo I, página 206).

Hallar grupos de tres números enteros, primos entre sí dos á dos, tales, que la suma de dos cualesquiera de entre ellos no admite otros factores primos que los contenidos en el tercero: ejemplo, 3, 5, 22.

(Ernest Quetelet).

Solución por D. Ricardo Caro

Desde luego, los dos primeros números son arbitrarios; el objeto es hallar un tercero que cumpla con las condiciones del problema.

Sean p y q los dos primeros cuya suma descompuesta en sus factores nos dé $p+q=a^r b^s \ldots$; si esta suma no ha de admitir otros factores primos que los contenidos en el tercero, es evidente que este tercero será de la forma $nab\ldots$ siendo n un número entero y primo con p y q. Además, por las condiciones del problema, se debe verificar entre los tres números p, q y $nab\ldots$

$$\begin{aligned} p+nab\ldots&=n'q \\ q+nab\ldots&=n''p \end{aligned} \qquad (1)$$

siendo n' y n'' enteros, de donde sacamos

$$n'=\frac{p+nab\ldots}{q} \qquad n''=\frac{q+nab\ldots}{p} \qquad (2)$$

El análisis nos da medio de hallar los valores de n que dan soluciones enteras para las ecuaciones (1). Estos valores forman dos progresiones aritméticas, y conoceremos n tomando un término común á ambas.

Sea el ejemplo de Mr. Quetelet y supongamos prefijados el 3 y el 5. Su suma nos da $3+5=2^3$, luego el tercero es $2n$. Las fórmulas (2) nos dan para este caso

$$\frac{3+2n}{5} \quad \text{y} \quad \frac{5+2n}{3}$$

cuyas expresiones son enteras para $n=1$ y $n=2$, respectivamente; luego las soluciones enteras de las ecuaciones (1) corresponden á los valores de n.

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36...
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26...

y de éstos, satisfacen al problema los 11, 26, 41, 56,... comunes á ambas progresiones, siendo por tanto el tercer número 22, 52, 82, 112.....

Así pueden calcularse otros grupos 2, 3, 25; 2, 3, 55; 5, 7, 408, etc. etc. en las condiciones propuestas.

CUESTIÓN 235

(Véase tomo IV, página 344).

Sobre los lados opuestos A_1A_2, A_3A_4 *de un cuadrilátero* $A_1A_2A_3A_4$ *se construyen exteriormente los cuadrados* $A_1A_2B_1C_1$, $A_3A_4B_3C_3$ *é interiormente los cuadrados* $A_1A_2b_1c_1$, $A_3A_4b_3c_3$; *sean* I_1, I_3, i_1, i_3 *los centros de estos cuadrados, siendo* S *el área del cuadrilátero* $A_1A_2A_3A_4$, *se tendrá*:

1.º $\overline{I_1I_3}^2-\overline{i_1i_3}^2=4S.$ 2.º $\overline{B_1B_3}^2-\overline{b_1b_3}^2=8S$

(H. Van Aubel).

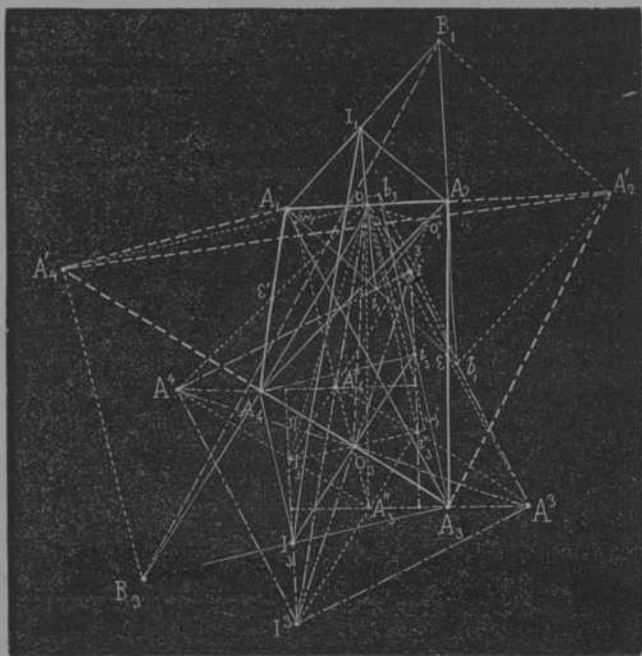
Solución por el Sr. Schiappa Monteiro (A.)

Como se va á ver, puede hacerse derivar, en parte, la demostración de este teorema del procedimiento que hemos empleado en la solución de la cuestión núm. 139, propuesta por este mismo distinguido matemático (*).

1.º Sean o_1 y o_3 los puntos medios de los lados opuestos A_1A_2 y A_3A_4 del cuadrilátero *convexo* dado, ó los centros de los cuadrados $A_1I_1A_2i_1$ y $A_3I_3A_4i_4$.

(*) Véase este periódico, t. III, pags. 192 y 312.

Tracemos por los vértices de este último cuadrado las rectas $A_3{}^3AI_3{}^3I$, $A_4{}^4A$, $i_3{}^3i$ respectivamente equipolentes á las semidiagonales A_1o_1, I_1o_1, A_2o_1, i_1o_1 del primer cuadrado, y se tendrá el cuadrado ${}^3A^3I^4A^3i$, determinado también por las rectas $o_1{}^3A$, $o_1{}^3I$, $o_1{}^4A$, $o_1.{}^3i$ trazadas por el punto o_1 y respectivamente equipolentes á las rectas A_1A_3, I_1I_3, A_2A_4, i_1i_3. Así nos hallamos reducidos á considerar solamente el punto o, y este nuevo cusdrado ${}^3A^3I^4A^3i$.



Los pares de rectas $o_1{}^3A_1$, A_2A_3 y $o_1{}^4A$, A_1A_4 cortándose mutuamente en sus puntos medios ε y ε', determinan los triángulos $A_2o_1\varepsilon$ y $A_1o_1\varepsilon'$ respectivamente iguales á los triángulos $A_3{}^3A\varepsilon$ y $A_4{}^4A\varepsilon'$; y si se consideran también los triángulos iguales $A_3{}^3Ao_3$ y $A_4{}^4Ao_3$, se ve fácilmente que el área del triángulo ${}^3Ao_1{}^4A$ es igual al área S del cuadrilátero dado $A_1A_2A_3A_4$.

Según esto, nos hallamos en el caso de demostrar que:

$$\overline{o_1\,{}^3I}^2-\overline{o_1\,{}^3i}^2=4{}^3Ao_1{}^4A=4.S \qquad (1)$$

es decir, que

Dado un punto o_1 *y un cuadrado* ${}^3A^3I^4A^4i$, *la diferencia de los cuadrados de los lados* $o_1{}^3I$, $o_1{}^3i$ *del triángulo* ${}^3Io_1{}^3i$ *es igual á cuatro veces el área del triángulo* ${}^3Ao_1{}^4A$.

Sea $o_1 o_3$ la mediana común de los triángulos ${}^3Ao_1{}^4A$, ${}^3Io_1{}^3i$; y o_1o_1', o_1o_1'' las perpendiculares bajadas desde su vértice común o_1 á los lados ${}^3A^4$, A^3I^3i.

Esto sentado, se tiene

$$\overline{a_1{}^3I}^2 - \overline{o_1{}^3i}^2 = 2\,.\,{}^3I^3i\,.\,o_3o_1'' \tag{2}$$

pero $$3I^3i = {}^3A^4A \quad \text{y} \quad o_3o_1'' = o_1'o_1$$

de donde $$2.{}^3I^3i.o_3o_1'' = 2.{}^3A^4A.o_1'o_1 \tag{3}$$

Ahora, ${}^3A^4A.o'o_1$ representa la doble área del triángulo ${}^3Ao_1{}^4A$, luego

$$\overline{I_1I_3}^2 - \overline{i_1i_3}^2 = 4.S \tag{4}$$

2.º Si se prolonga el lado A_1A_2 del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ en una longitud $A_2A'_2 \equiv A_1A_2$ (*) y el lado opuesto A_3A_4 en una longitud $A_4A'_4 \equiv A_3A_4$, se tendrá otro cuadrilátero $A_1A_2'A_3A_4'$ cuya área será evidentemente el doble de la del primero. Según esto, los pares de puntos B_1b_1 y B_3b_3 serán los vértices opuestos de los cuadrados $A_1B_1A'_2b_1$ y $A_3B_3A'_4b_3$que tienen por diagonales los lados opuestos A_1A_2' y A_3A_4' del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4'$ y por centros A_2 y A_3.

Así nos volvemos á encontrar en el caso precedente, considerando el cuadrilátero de área 2S; luego

$$\overline{B_1B_3}^2 - \overline{b_1b_3}^2 = 8S \tag{5}$$

Observación. Es bueno observar que esta segunda parte del teorema será solamente cierta, creemos, cuando el cuadrilátero $A_1A_2'A_3A_4'$ sea *convexo*, como el cuadrilátero dado $A_1A_2A_3A_4$.

Nota. Si sobre la prolongación de los lados opuestos A_1A_2 y A_3A_4 del cuadrilátero dado se toman, en lugar de los segmentos A_1A_1' y A_3A_4', los segmentos $A_1A'_{n_2} \equiv 2^n\,.\,A_1A_2$ y $A_3A'_{n_4} \equiv 2^n\,.\,A_3A_4$ que serán los lados opuestos de un nuevo cuadrilátero $A_1A'_{n_2}A_3A'_{n_4}$, de área 2^nS, considerando los dos cuadrados $A_1B_{n_1}A_{n_2}'b_{n_1}$ y $A_3B_{n_3}A_{n_3}'b_{n_3}$ que tienen por diagonales estos lados opuestos, se tendrá

$$\overline{B_{n_1}B_{n_3}}^2 - \overline{b_{n_1}b_{n_3}}^2 = 2^n\,.\,S \tag{6}$$

ya que es convexo.

Tomando sobre los lados A_1A_2 y A_3A_4 los segmentos

$$A_1\alpha_{n_2} \equiv \frac{1}{2^n}\,A_1A_2 \quad \text{y} \quad A_3\alpha_{n_4} \equiv \frac{1}{2^n}\,A_3A_4$$

(*) Por falta del signo de equipolencia se emplea en su lugar el signo ≡ (N. de la R).

que representarán los lados opuestos de un cuadrilátero $A_1\alpha_{n_2}A_3\alpha_{n_4}$ de área $\frac{1}{2^n}$ S, si se consideran los dos cuadrados $A_1 6_1 \alpha_{n_2}\beta_1$ y $A_3 6_3 \alpha_{n_4}\beta_4$ que tienen por diagonales estos lados opuestos, se tendrá

$$\overline{6_1 6_3}^2 - \overline{\beta_1\beta_3}^2 = \frac{1}{2^n} . S \tag{7}$$

Si en vez de construir cuadrados sobre los lados opuestos A_1A_2 y A_3A_4 del cuadrilátero dado, se construyen rectángulos semejantes, cuya relación de semejanza sea $\frac{1}{m}$, los triángulos $o_3 I_3 {}^3I$, $o_3 i_3 {}^3 i$, en vez de ser directamente iguales, serán directamente semejantes á éstos; y por consiguiente, los dos cuadrados $A_1I_1A_2i$ y $A_3I_3A_4i_3$ se reducirán á dos rombos, cuya relación de semejanza es también $\frac{1}{m}$, luego:

Si sobre los lados opuestos A_1A_2 *y* A_3A_4 *de un cuadrilátero convexo* $A_1A_2A_3A_4$ *cuya área es* S, *se construyen los rectángulos iguales* $A_1A_2B_1C_1$, $A_1A_2b_1c_1$ *y los rectángulos* $A_3A_4B_3C_3$, $A_3A_4b_3c_3$ *semejantes á éstos, cuya relación de semejanza sea* $\frac{1}{m}$ *siendo* I_1, I_3; i_1, i_3 *los centros de estos rectángulos construídos exterior é interiormente, se tendrá*

1.º
$$\overline{I_1I_3}^2 - \overline{i_1i_3}^2 = \frac{4S}{m} \tag{8}$$

2.º
$$\overline{B_1B_3}^2 - \overline{b_1b_3}^2 = \frac{8S}{m} \tag{9}$$

De una manera análoga se puede aplicar á este caso lo que hemos dicho anteriormente respecto á la cuestión propuesta.

Los triángulos ${}^3I o_1 {}^3 i$ y ${}^3A o_1 {}^4A$ dan

$$\overline{O_1 {}^3I}^2 - \overline{o_1 {}^3 i}^2 = 2 . {}^3I {}^3 i . o_3 o_1'' \tag{10}$$

y

$$\overline{o_1 {}^3A}^2 - \overline{o_1 {}^4A}^2 = 2 . {}^3A {}^4A . o_3 o_1' \tag{11}$$

de donde

$$\frac{\overline{I_1I_3}^2 - \overline{i_1i_3}^2}{\overline{A_1A_3}^2 - \overline{A_2A_4}^2} = \frac{o_3 o_1''}{o_3 o_1'} \tag{12}$$

y, designando por θ el ángulo $o_1 o_3 {}^4A$ formado por la recta o_1o_3 que une los puntos medios o_1, o_3 de los lados opuestos A_1A_2, A_4A_3, y por la recta ${}^3A^4A$ equipolente á la recta que representa la suma geométrica $A_1A_2+A_4A_3$ de estos lados opuestos, se tendrá

$$\overline{I_1 I_3}^2-\overline{i_1 i_3}^2=\left(\overline{A_1 A_3}^2-\overline{a_1 a_3}^2\right) \operatorname{tg} \theta \tag{13}$$

Trazado por el punto o_1 respectivamente equipolentes los pares de rectas o_1i_3', o_1I_3' y o_1A_4'', o_1A_3'' respectivamente equipolentes á los pares de rectas I_1i_3, i_3I_3 y A_1A_4, A_2A_3 y bajando desde aquel mismo punto las perpendiculares $o_1\omega_1$ y $o_1\omega_1'$ sobre las rectas $A_3''A_4''$ y $I_3'i_3'$, los triángulos $A_3''o_1A_4''$ y $I_3'o_1i_3'$ darán

$$\overline{o_1 A'_3}^2-\overline{o_1 A'_4}^2=2 \,.\, A''_3A''_4 \,.\, o_3\omega_1 \tag{14}$$

y

$$\overline{OI'_3}^2-\overline{o_1 i_3}^2=2 \,.\, I_3 i'_3 \,.\, o_3\omega'_1 \tag{15}$$

y designando por θ el ángulo $o_1o_3A_4''$ determinado por la recta o_1o_3 que une los puntos medios de los lados A_1A_2 y A_3A_4 del cuadrilátero dado, y por la recta $A''_3A''_4$ equipolente á la que representa la suma geométrica $A_1A_2+A_3A_4$ de estos lados, se tendrá

$$\overline{i_1 I_3}^2-\overline{I_1 i_3}^2=\left(\overline{A_2 A_3}^2-\overline{A_1 A_4}^2\right) \operatorname{tg} \theta \tag{16}$$

Reemplazando análogamente los cuadrados por otras figuras semejantes, se puede llegar á relaciones análogas y curiosas.

Lo mismo sucede respecto á la cuestión núm. 139, para la que el cuadrilátero dado puede dejar de ser convexo.

CUESTIÓN 222

(Véase tomo IV, página 311).

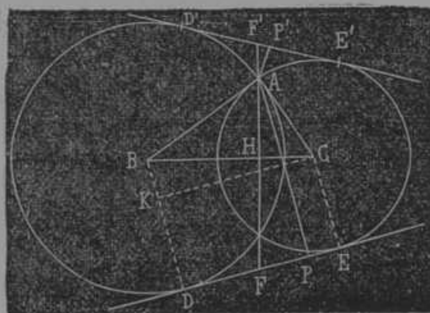
Existen dos parábolas que pasan por dos vértices B, C *de un triángulo y tienen por focos el tercer vértice* A. *Los parámetros de estas curvas tienen por expresión*

$$\frac{4bc \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A}{b+c \pm 2\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}}$$

(J. NEUBERG).

Solución por el SR. SOLLERTINSKY (B).

Desde los puntos B y C como centros se describen las circunferencias que tienen BA, CA por radios. Las tangentes comunes DE, D'E' de las circunferencias son las directrices de las parábolas y las distancias AP, AP' de A á estas tangentes son los semi-parámetros.



Sean F, F'. H los puntos en que el eje radical de las circunferencias encuentra á DE, D'E', BC; K la proyección de C sobre BD.

Los triángulos semejantes APF, AP'F, CKB dan

$$\frac{\text{AP}}{\text{AF}} = \frac{\text{AP}'}{\text{AF}'} = \frac{\text{CK}}{\text{CB}'}$$

de donde $$\text{AP} = \frac{\text{CK}.\text{AF}}{\text{CB}}, \quad \text{AP}' = \frac{\text{CK}.\text{AF}'}{\text{CB}}$$

Del triángulo CBK se obtiene

$$\text{CK}^2 = a^2 - (b-c)^2 = -2bc \cos \text{A} + 2bb = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\text{A}}{2}$$

de donde $$\text{CK} = 2\sqrt{bc} \operatorname{sen} \frac{\text{A}}{2}$$

Se tiene, además $$\begin{cases} \text{AF.BC} = \text{AH.BC} + \text{HF.BC} = 2\text{ABC} + \text{BDEC} \\ \text{AF}'.\text{BC} = \text{HF.BC} - \text{AH.BC} = \text{BDEC} - 2\text{ABC} \end{cases}$$

y $$\text{BDEC} \pm 2\text{ABC} = (b+c)\sqrt{bc} \operatorname{sen} \frac{\text{A}}{2} \mp bc \operatorname{sen} \text{A} =$$

$$= \sqrt{bc} \operatorname{sen} \frac{\text{A}}{2}\left(b+c \pm 2\sqrt{bc} \cos \frac{\text{A}}{2}\right)$$

Por consiguiente

$$\text{AP} = \frac{2bc \operatorname{sen}^2 \frac{\text{A}}{2}\left(b+c+2\sqrt{bc} \cos \frac{\text{A}}{2}\right)}{a^2}$$

$$\text{AP}' = \frac{2bc \operatorname{sen}^2 \frac{\text{A}}{2}\left(b+c-2\sqrt{bc} \cos \frac{\text{A}}{2}\right)}{a^2}$$

Para dar á estas expresiones la forma pedida, basta observar que

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}=$$

$$\left[b+c+\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}\right]\left[b+c-2\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}\right]$$

CUESTIÓN 189

(Véase tomo IV, página 160).

Complemento al enunciado 108.—*Cuando el cociente de* (2 m — 1) *por* m! (m — 1)! *en un número par, el exponente de la potencia de* 2 *que entra como factor en el cociente, es* (q — p — 1), *siendo* q *la suma de las cifras de* (2m — 1) *escritas en el sistema binario y* p *el exponente de la mayor potencia de* 2 *que entra como factor en* m.

(WOLSTENHOLME).

Solución por el SR. SOLLERTINSKY (B.)

Sea $n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1 n$ el número m escrito en el sistema binario, designando n, n_1, ... n_i las cifras 0 ó 1.

El producto de los factores pares de la expresión $m!$ es igual á $2^{m_1}.m_1!$ de donde $m_1=\dfrac{m-n}{2}$ (1).

Igualmente los factores pares del producto $m_1!$ dan $2^{m_2}.m_1!$ de donde $m_2=\dfrac{m_1-n_1}{2}$ (2).

y así sucesivamente. En fin, los factores pares del producto $m_{i-1}!$ darán

$$2^{m_i}.m_i! \quad \text{de donde} \quad m_i=\frac{m_{i-1}-n_{i-1}}{2}=n_i=1 \qquad (i)$$

Así, la potencia de 2 que entra como factor en el producto $m!$ tiene por exponente la suma

$$S=m_1+m_2+\dots+m_i$$

Sumando las igualdades (1), (2)... (i), se obtiene

$$S=\frac{m+s-m_i}{2}-\frac{n+n_1+\dots+n_{i-1}}{2}$$

de donde, haciendo $n+n_1+n_2+\dots+n_i=\sigma$, se obtiene

$$S=m-\sigma$$

y además se tiene $(2m-1)! = 1.\ 3.\ 5 \ldots (2m-1)\ 2^{m-1}\ (m-1)!$

luego $$\frac{(2m-1)!}{m!\ (m-1)!} = (2N-1)\ 2^{m-1-s} = (2N-1)\ 2^{\sigma-1}$$

Falta demostrar que $\sigma = q - p$.

Según la suposición, el número m escrito en el sistema binario se halla terminado por p ceros. Para obtener el número $2m$, basta escribir á la derecha todavía un cero:la suma de las cifras (σ) quedará la misma, pero restando de este número la unidad (para obtener $2m-1$), se tendrá en lugar de los $(p+1)$ ceros. otras tantas unidades; y la unidad que ocupaba el lugar $(p+2)$ quedará reemplazada por el cero; luego la suma de las cifras aumentará en p unidades, y se tendrá $q = \sigma + p$.

BIBLIOGRAFÍA

Lezioni di Geometria descrittiva *di Ferdinando Aschieri, professore nella R. Università di Pavia.* 1896. Milano.—U. Hoepli.—Ya en los años 1883 y 84 el Sr. Aschieri publicó una *Geometría descriptiva y proyectiva* en dos tomos. La nueva edición revela por su primer tomo recientemente publicado que su autor se propone dar más amplio desarrollo á su obra. Contiene dos partes, la primera dividida en cuatro capítulos: I. *Métodos de representación y problemas de posición y de magnitud.* en el que trata de las proyecciones concurrentes y paralelas en un Plano. Representación con la proyección central. Método de Monge. Problemas fundamentales. Cambio del cuadro, traslación y rotacion de la figura en el método de las proyecciones centrales, rebatimiento, cambios de plano, traslación y rotación en el método de Monge.—II. *Método de las proyecciones axonométricas.*—III. *Las diversas perspectivas de una figura.*—IV. *Representación de los poliedros.*

La segunda parte: *Representación de las formas geométricas*, está dividida en doce capítulos cuyas materias son las siguentes: I. Las formas elementales del plano y de la irradiación (*stella*).—II. De las formas del plano y de la irradiación en general.—III. Las cuádricas con rectas reales.—IV. Cúbica alabeada y su desarrollable osculatriz.—V. Cuádricas y sus formas correlativas.—VI. Haces de cuádricas.—Curva alabeada de cuarto orden y haz alabeado de cuarta clase.—VII. Generalidades sobre las curvas y las superficies.—VIII. Superficies regladas y curvas de eje.—IX. Superficie de rotación.—X. Corresdencia unívoca cuadrática en el espacio.

Manuali Hoepli.—TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITICHE *per Ernesto Pascal* prof. nella Università di Pavia.—Milano 1896. La obra que consta de 227 páginas 8.º se halla dividida en seis capítulos: I. Las funciones ϑ de Jacobi.—II. Las funciones elípticas de Legendre.—III. Las cuatro funciones ó de Weierstrass.—IV. La función $p(u)$ de Weirstrass.—V. Integrales de 1.ª, 2.ª y 3.ª especie.

Esta nueva é interesante obra del muy distinguido profesor Sr. Pascal completa perfectamente su tratado de cálculo infinitesimal de que ya se trató en esta Revista y en su obra también reciente (1895) *Esercizi é note critiche di calcolo infinitesimale*, de gran utilidad para todo el que se dedique á estos estudios.

PRINCIPII DELLA TEORIA DEL MOVIMENTO DEI CORPI (corso de Meccanica razionali di *Gian Antonio Maggi*.—Ulrico Hoepli, Milano, 1896. —Esta obra muy desarrollada en su parte analítica consta de: *Preliminares* que tratan de: Eje y ángulo, orientación de un eje, posición un punto, sistema de puntos y cuerpo. Determinación de la posición de un sistema rígido. Cantidad. Vector, momento de un vector respecto á un punto. Resultante de un sistema de vectores. Par. Terna vectorial etc.

La CINEMÁTICA se compone de cuatro capítulos: I. *Mutación* (*Spostamento*) de un punto, de un sistema, de traslación, de rotación, elicoidal, rígido, etc.—II. *Movimiento* que comprende movimiento de un punto, de un sistema, de rotación, de traslación, polar, rígido, continuo, regular y relativo.—III. *Velocidad.*—IV. *Aceleración.*

La Dinámica se divide en dos partes: 1.ª *Leyes generales del movimiento* que comprende: I. Masa y fuerza motriz.—II. Propiedades generales del movimiento.—III. Gravedad; 2.ª parte. *Cálculo del movimiento* que comprende: I. Cuerpos rígidos libres.—II. Presiones.—III. Cuerpos enlazados.—Cuerpos variables.

Sentimos que la falta de espacio nos impida hacer un detallado exámen de esta obra de la que el lector podrá obtener muy buenos resultados.

Imprenta de Calixto Ariño, Coso, 100, bajos.