Año V Zaragoza, Marzo de 1895. Núm. 51

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

NOCIONES SOBRE LOS SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1 El sistema euclídeo tiene dos fases: en la primera predomina el carácter determinativo y tiene su completo desarrollo en los *Elementos de Geometría;* en la segunda predomina el enlace, la relación, la transformación y la síntesis, y en ella forman los métodos modernos de Carnot, de Poncelet, Bellavitis, Hamilton, Grassmann y de Staudt, de los que se ha tratado en la parte primera de esta obra. Como ramas superiores de la Geometría euclídea existen la Geometría cinemática y la Geometría infinitesimal, que tienen casi por exclusivo objeto el estudio de las curvas y superficies en su mayor generalidad.

2 La parte elemental ó determinativa de la Geometría, que hasta hace poco se reducía al contenido de los elementos de Euclides, ya en su exposición original (tal cual se ofrece generalmente en las obras inglesas), ya con modificaciones puramente formales ó de orden expositivo, ha recibido un considerable incremento con la agregación de la *Geometría reciente* ó del triángulo que puede considerarse como una *contiuuación ó complemento* de aquéllos.

3 A la determinación de las figuras elementales, triángulo, polígono, figuras en el círculo, etc., se ha agregado por combinaciones sucesivas de nuevos elementos la de otras figuras más complejas que comienza por la consideración de los puntos isogonales é isotómicos, simedianas, puntos y figuras complementarios y anticomplementarios y que se continúa con los círculos de Lemoine, Tucker, Taylor, triángulos de Brocard, etc. Además la aplicación continuada de una ley para la formacion de figuras sobre otras primitivas ó bases conduce á un estudio sistemático de la determinación geométrica.

4 La Geometría llega á un desarrollo sistemático, como se ha visto en la primera parte, especialmente en la parte que se llama Geometría proyectiva, y que también ha recibido otras denominaciones, como *Geometría moderna, superior, de posición*, etc.

En esta parte domina el carácter de *transformación*, por la que se derivan unas figuras ó formas de otras, reduciéndose, pues, á un estudio de sistemas en conexión con otros sistemas, basado en la variabilidad más bien que en la permanencia, como resulta en la parte elemental ó determinativa.

La homografía y la correlación de las figuras, las leyes de dualidad y de reciprocidad caracterizan á este desenvolvimiento superior de la Geometría, del que resultan como desarrollos parciales ó secundarios la homología, la homotecia, etc., y en cuyo fondo aparecen otras relaciones ó modos de transformación como los de las figuras inversas, polares, perspectivas, etc.

5 Además debe observarse que aparte de la síntesis ó agregación de unas figuras á otras formando sistema, el análisis que estudia cada figura en sus elementos determinativos y constitutivos, es un medio generador fecundo por la manera según la cual combina estos elementos, haciendo á los unos fijos y á los otros variables, ó sea ya considerando á unos como fijos ó bases respecto á los cuales los otros adquieren cierta variabilidad. Este procedimiento conduce: 1.º, á los *lugares geométricos*. 2.º, á *sistemas diversos de figuras*.

Vemos, en efecto, que, en el primer caso, si, por ejemplo, en un triángulo dejamos fijos la base BC y el ángulo opuesto A, quedarán variables los otros tres elementos que, sujetos á la relación en que deben estar ó condiciones que deben satisfacer para formar triángulo, determinan un arco, ó dos, de circunferencia como lugar del vértice variable.

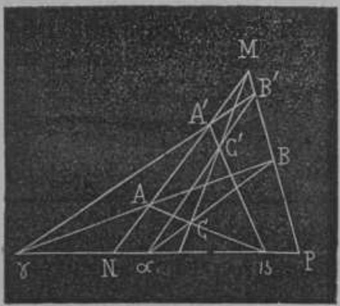


Fig. 1

En la figura 1 se ve que la circunstancia de concurrir los pares de lados homólogos AB, A'B', BC, B'C', CA, C'A' de los triángulos ABC y A'B'C' en los tres puntos colineales γ, α, β, implica el que los vértices A y A', B y B', C y C' se hallen sobre tres rectas concurrentes. Esto permite que, dejando como bases fijas de la figura los puntos α, β, γ, y las rectas M, N, P, ó triángulo MNP, se pueda considerar el triángulo ABC como variable, de modo que mientras sus tres lados sigan siendo en las diversas posiciones respectivamente concurrentes en α, β, γ, al recorrer A y B dos de los lados de MNP, C recorrerá una recta que pasa por M, y se verá, recorriendo con encadenamiento de teoremas, que esta conclusión es una transformada de la siguiente: que, dado el valor de una relación anarmónica y tres puntos, el cuarto que satisface á aquélla queda determinado.

Basta decir, por ahora, que el análisis aplicado á la generación de figuras, se reduce á una elección de las que deban eliminarse y de las que deban quedar como bases fijas ó conocidas y las que siendo variables engendran el lugar geométrico.

6 Respecto á los sistemas de figuras puede citarse, como ejemplo, los dos sistemas de círculos ortogonales, cuyo estudio desenvuelve Poncelet en su *Traité des propriétés projectives des figures* y también las figuras polares recíprocas.

7 La resolución de los problemas, como la demostración de ciertas relaciones ó propiedades de las figuras, estriba en una sustitución de elementos de las figuras por otros, de tal modo, que después de efectuada esta sustitución, quede la figura también determinada con otra combinación de elementos, habiendo pasado á ser general otro ú otros que antes eran fijos, siendo precisa para esta sustitución una superabundancia ó exceso de elementos. Así, por ejemplo, en un triángulo la intersección de las alturas ó de las medianas ó de las bisectrices está *determinada* solamente por dos; pero la tercera de estas líneas, que también pasa por dicho punto, introduce un elemento de más que permite establecer las relaciones que determinan puntos notables del triángulo. En la figura que se construye para demostrar el teorema de Simson resultan tres cuadriláteros inscriptibles en vez de dos que son los suficientes, lo que permite llegar á la conclusión final. Esta superabundancia conduce particularmente á la multitud de fórmulas simétricas que ligan los elementos de un triángulo, y aun otros elementos con éste, tomado como figura de referencia, dando lugar á ecuaciones homogéneas.

8 Terminaremos estas generalidades acerca de la Geometría euclídea haciendo ver cómo en el caso de simple determinación de figuras, unas resultan como transformadas, por la introducción de nuevos elementos, de otras. Así, el sistema de los tres puntos A, B, C en línea recta está ligado por la relación

$$CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2AC \, . \, AB$$

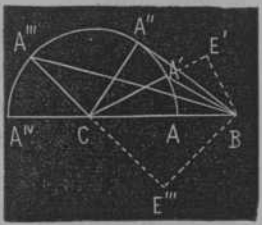


Fig. 2

Para las posiciones del punto A en A', A'', A''', A'''' correspondientes á los casos del triángulo obtusángulo, rectángulo, acutángulo y una segunda posición en línea recta, resulta

$$CB^2 = CA'^2 + A'B^2 + 2 . CA' . A'E'$$
$$CB^2 = CA''^2 + A''B^2$$
$$CB^2 = CA'''^2 + A'''B^2 - 2A'''C . A'''E'''$$
$$CB^2 = A''''B^2 + CA''''^2 - 2A''''B . CA''''$$

Carnot en su *Géométrie de position* se propuso establecer la correspondencia entre las variaciones de una figura y las modificaciones de las fórmulas que las expresan. Más tarde Bellavitis, Hamilton y Grasman establecieron algoritmos en que la posición y la magnitud estuviesen enlazadas y en que dichas transformaciones resultaran sometidas á la continuidad por medio del cálculo.

9 *Sistemas no-euclídeos.* Las definiciones primeras de la Geometría han conducido á distintas direcciones que constituyen otros tantos sistemas de Geometría. Así la admisión de una sola paralela (ó en el lenguaje moderno, á la existencia de un solo punto en el infinito, en la dirección de cada recta) conduce al sistema euclídeo.

Pero Lobatchewsky y Bolyai, prescindiendo de la exactitud del postulado euclídeo, establecieron un sistema geométrico, ó un encadenamiento lógico de verdades, del que resulta la existencia de dos paralelas y Riemann consideró otro sistema en el que no hay paralelas, habiendo sido objeto de examen también la propiedad fundamental de la recta, de que dos de éstas tengan sólo un punto común ó puedan tener más, de que sea de infinita longitud, no re-entrante ó re-entrante, habiendo hecho Riemann también la distinción entre lo ilimitado y lo infinito.

Esto ha conducido á considerar diversos géneros de espacio: el espacio *hiperbólico* (infinito) en el que *la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo no puede exceder á dos rectos*, y por consiguiente que *un ángulo exterior de un triángulo no es menor que la suma de los interiores opuestos*, siendo el *defecto de un triángulo siempre positivo ó siempre cero* correspondiendo este último caso al espacio euclídeo ú *homoloidal.*

En el espacio elíptico (de Riemann) la recta es limitada y reentrante, y dos rectas cierran un espacio. *Todas las perpendiculares en un plano dado á una recta dada se encuentran en un punto, el exceso de cada triángulo es positivo.* En este sistema todas las propiedades del espacio son mensurables, es decir, pueden reducirse á la determinación de magnitudes, definiéndose la línea recta como la *más corta distancia* entre dos puntos, lo que determina una magnitud.

Estos curiosos resultados á que ha conducido la discusión de los primeros principios de la Geometría, han adquirido gran importancia en estos últimos años y constituyen una interesante literatura matemática enriquecida con los estudios de los espacios más de tres dimensiones, cuyos fundamentos estableció Riemann en su Memoria *Ueber die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*

10 Para resumir los conceptos en que estriba esta nueva evolución de la Geometría, que hoy con el Algebra de la lógica y las teorías del imaginarismo y de los infinitos, ya en el dominio de la magnitud, ya en el de la posición, constituyen el núcleo sobre que se desarrolla la filosofía de la Matemática, seguiremos esta concatenación de ideas á partir de la geometría euclídea, sin perjuicio de insistir en este punto que ahora diseñaremos, en la tercera parte de la *Geometría general* (*), que seguirá á la *sistematización de la Geometría* y que ha de versar sobre la *crítica y la síntesis* de la misma.

11 De los *Elementos* de Euclides observaremos desde luego que los postulados 2 y 3 en que se establece la posibilidad de prolongar continuamente una recta, y el describir con un intervalo cualquiera una circunferencia, implican el que *una figura invariable de forma pueda transportarse de una manera cualquiera en su plano ó en el espacio, sin que ninguno de sus elementos, distancias mutuas ó ángulos, cambie en magnitud* (**).

Estos dos postulados juntamente con el 1.º: *Trazar una recta de un punto cualquiera á otro punto cualquiera*, como dice M. Liard, equivalen á decir: dadme espacio indefinido, homogéneo y capaz de recibir todas las determinaciones, y crearé la Geometría, los cuales unidos á la posibilidad de transportar una figura invariable de una manera cualquiera constituyen la materia de la Geometría (***).

Basado en estos fundamentos y en el procedimiento lógico que tanta unidad da á la obra, reducido á probar que una cosa *no puede no ser*, llega Euclides hasta la proposición XXIX sin emplear el axioma característico de esta Geometría.

12 Respecto al sistema de Lobatchewsky, vemos que se resume en admitir tres géneros de rectas respecto á otra: secantes, no secantes y paralelas, que son dos, estableciendo rigurosamente que una paralela conserva el carácter del paralelismo en todos sus puntos, que dos rectas son recíprocamente paralelas, que en todo triángulo

---

(*) La primera se publicó en el PROG. MAT. con la denominación de *Teoremas, problemas y métodos geométricos.*

(**) Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Geom. élém.*

(***) *Les définitions géométriques* (pág. 38).

rectilíneo la suma de los tres ángulos no puede exceder á dos ángulos rectos, que si en un triángulo rectilíneo la suma de los tres ángulos es igual á dos rectos, lo mismo ocurrirá para cualquier otro triángulo, que por un punto dado puede trazarse una recta que forme con otra dada un ángulo tan pequeño como se quiera, que *si dos perpendiculares á una misma recta son paralelas*, la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo cualquiera será igual á π, que dado un ángulo cualquiera α, se puede hallar siempre una distancia p tal, que se tenga $\Pi(p)=\alpha$, estableciendo aquí el concepto importantísimo en la Geometría hiperbólica de ser el ángulo de paralelismo una función de la distancia que satisface á la relación $\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi$.

Además, la aproximación indefinida de dos rectas paralelas, el paralelismo de dos paralelas á una tercera recta, preceden á la importante relación $P=\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$ que determina un triedro por medio de un triángulo esférico y permite demostrar que: *cuando tres planos se cortan dos á dos según rectas paralelas, la suma de los tres ángulos diedros es igual á dos ángulos rectos.*

Demuéstrase enseguida que: si dos perpendiculares en los puntos medios de dos lados de un triángulo se encuentran en un punto, la perpendicular bajada al tercero desde este punto pasará por su punto medio, de modo que *si se admite que dos de estas perpendiculares no se encuentran, la tercera tampoco las encontrará*, de modo que dichas perpendiculares *ó no se encuentran ó se encuentran las tres en un mismo punto*, y de esto se sigue la proposición siguiente: *las perpendiculares en los medios de los lados de un triángulo rectilíneo serán las tres paralelas entre sí, siempre que se supongan dos de ellas paralelas.*

Esto conduce á la consideración de la *curva-límite* (horiciclo) curva tal, que *todas las perpendiculares en los medios de sus cuerdas son paralelas entre sí* y á demostrar que la curva límite es un círculo de radio infinitamente grande.

En fin, la superficie límite es la engendrada por la revolución de una curva límite alrededor de uno de sus ejes, existiendo en los ángulos y lados de los triángulos de esta superficie las mismas relaciones que se demuestran en la Geometría ordinaria para los triángulos rectilíneos, y después de establecerse que la Geometría esférica es independiente de que en un triángulo rectilíneo la suma de los tres ángulos, sea ó no igual á dos ángulos rectos, concluye Lobatchewsky que la *Geometría imaginaria* (*) se transforma en la Geometría ordina-

(*) Así denominó á su nuevo sistema.

ria cuando se suponen los lados de un triángulo rectilíneo muy pequeños.

13 Gauss, que ya se había ocupado de estas cuestiones, según resulta de una correspondencia con Lobatchewsky y Bolyai, en su célebre *Tratado de la curvatura de las superficies*, introdujo un nuevo elemento para estas transcendentales investigaciones, á saber: el *coeficiente de curvatura*, es decir, el inverso del producto del mayor y menor radio de curvatura, que debe permanecer constante en toda la extensión de la superficie, y entre otras importantes consideraciones expuestas en dicha correspondencia, observa que en la Geometría no-euclídea la semicircunferencia de un círculo de radio r tiene por valor

$$\frac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{r}{k}}-e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

siendo k una constante que la experiencia nos indica como extremadamente grande con respecto á todo lo medible para nosotros y que en la Geometría euclídea se hace infinita.

La célebre Memoria de Riemann ya citada, la de Helmholtz *Uber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome*, y la del profesor de Roma Sr. Beltrami *Saggio di interpretazione de la Geometria non-euclidea*, con los trabajos de Lobatchewsky y Bolyai, dilatando considerablemente el campo de los estudios geométricos, plantean problemas nuevos y aportan elementos hasta esta época fuera del alcance de las investigaciones matemáticas, ya que el sistema euclídeo era considerado como absolutamente cierto é indiscutible y muy conforme á la doctrina Kantiana, como una doctrina desenvuelta *á priori*, al ser el espacio una forma subjetiva de nuestro modo de conocer.

Si la recta es infinita ó reentrante, si dos rectas pueden ó no encerrar un espacio y en fin si el axioma de las paralelas es ó no absolutamente cierto son cuestiones que llevan á resultados importantes como son las distinciones de la geometría euclídea, de Lobatchewky de Riemann, y los espacios homaloidal, hipérbolico ó parabólico, ó de curvatura nula, positiva ó negativa, la consideración de coeficientes característicos de cada espacio, siendo el espacio homaloidal ó euclídeo un espacio hiperbólico cuyo coeficiente ó constante es infinito, constantes que corresponden al *defecto* ó *exceso* del triángulo respectivamente en los espacios hiperbólico y elíptico, de manera que en una región infinitamente pequeña de estos espacios siendo la mayor dimensión lineal infinitamente pequeña respecto á la constante característica, el defecto ó exceso será infinitamente pequeño y la geometría correspondiente no diferirá sensiblemente de la geometría euclídea; y si en esta nada es grande de una manera absoluta, en el espacio hiperbólico ó parabólico se podrían dividir los seres en dos clases con respecto á sus dimensiones, micrántropos ó macrántropos (*) Así en el espacio elíptico, el mundo de los micrántropos podía ser una pequeña parte del universo elíptico, los axiomas de Euclides le parecían estrictamente conformes con la experiencia, y un macrántropo en el espacio hiperbólico, por ejemplo, estaría familiarizado con el hecho de que el defecto de un triángulo disminuye con su área (**).

Dejando para otra ocasión el ocuparnos de la rica literatura que forman en conjunto las obras escritas en estos últimos años acerca de los diversos sistemas geométricos de los Sres. Flye Ste. Marie, Frischauf, Erdmann, Lipschitz, Scheffler, Killing, Battaglini, Cayley, Klein, Poincaré Bruce, Halsted (***), Vassilief, haremos mención también del geómetra belga M. Tilly cuya obra *Essai sur les principes fondamentaux de la Geómétrie et de le Mécanique* es muy digna de estudio, así como la recientemente publicada en *Mathesis, Essai de Geómétríe analytique générale* en las que expone conceptos originales y presenta un plan completo de la exposición de la Geometría.

Distingue el Sr. Tilly en la primera de sus obras un axioma *principal*, el concerniente á la distancia ó intérvalo de dos puntos del espacio, y otros dos *secundarios* ó de simplificación, á saber: 1.º que la distancia de dos puntos del espacio no tiene límite superior y puede aumentar indefinidamente (esta es común á las Geometrías de Euclides y de Lobatchewsky): 2.º que por un punto exterior á una recta solo se le puede trazar una paralela (axioma que separa las geometrías de Euclides y de Lobatchewsky).

La idea de M. Tilly acerca de la distancia implica dos propiedades esenciales:

1.º La distancia varía, en el espacio, de una manera continua.

2.º Dado un sistema de puntos, en número infinito, ABCD.... (en otros términos, una figura cualquiera) y un punto B', tal que AB' = AB, una á otra parte del espacio, ó aun llegar á ser absolutamente local;

(*) G. Chrystal. *Non-euclidean Geometry* (p. 25).

(**) G. Chrystal. *Non-euclidean Geometry* (p. 25).

(***) Este ilustrado profesor de la Universidad de Texas publica actualmente una serie de artículos sobre la Geometría de Euclides en *American Mathematical monthly*.

existen puntos C′, D′,... tales, que el sistema AB′C′D′... es absolutamente idéntico al primero, es decir, que en estos dos sistemas, las distancias entre los pares de puntos correspondientes ú homólogos sean iguales dos á dos, y dicho axioma principal se halla expresado en otra forma mediante la introdución explícita de la idea de movimiento.

Admitiendo desde un principio el empleo de tres coordenadas para la determinación de un punto, distingue las distancias ideales, analíticas (racionales ó abstractas y la distancia física, usual ó experimental). Las primeras son funciones absolutamente cualesquiera de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$; las distancias analíticas son funciones de estas coordenadas que satisfacen á las condiciones del axioma I, y la distancia física es función especial de las mismas que posee el mismo valor numérico para un par cualquiera de puntos y para el par cualquiera de puntos homólogos, en dos objetos físicos.

En cuanto á las distancias analíticas, demuestra que para satisfacer á las condiciones indicadas solo pueden afectar tres formas que corresponden á la geometría usual, abstracta (que prescinde del 2.º axioma concerniente á la única paralela) y doblemente abstracta (que prescinde de los dos axiomas secundarios), de manera que solo hay tres sistemas de Geometría posibles, originando el primer axioma secundario una primera bifurcación que separa la Geometría de Riemann de las de Euclides y Lobatchewsky, así como el segundo motiva otra bifurcación que separa estas dos geometrías.

La obra de M. Tilly constituye una interesantísima y original exposición de la Geometría fundada en el axioma de la distancia ó intérvalo entre dos puntos que conceptúa como una idea absoluta é irreducible, y además es un estudio simultáneo y comparado de los tres sistemas posibles de Geometría que considera M. Tilly indispensable para el establecimiento racional de los principios de la Geometría ordinaria.

«Si se quiere, observa, como lo hemos supuesto hasta ahora, que exista un sistema de Geometría constantemente aplicable á todas las partes del espacio, una sola de las geometrías precedentes será real con un solo valor de parámetro, bien que las otras existan siempre en el análisis y sean susceptibles de una interpretación geométrica. Si, al contrario, se pretendiera que el espacio no fuese homogéneo, es decir, que la Geometría no es la misma en todas sus partes, se podría suponer que la función-distancia (ó su parámetro) cambiase de una á otra parte del espacio, ó aun llegar á ser absolutamente local;

se podría suponer también que esta función (ó su parámetro) fuese variable con el tiempo, y aun hasta hacerse instantánea, ó bien todavía que en ciertos lugares y en ciertos intervalos de tiempo, no existiese Geometría rigurosa.»

Pero prescindiendo de estas abstracciones, y entrando en la realidad física, la experiencia—observa—nos muestra que existe una Geometría aplicable por todo y siempre, es decir, que todas las medidas directamente tomadas, verifican una de las geometrías teóricamente posibles, y se verifican las tres en los límites de nuestros medios de medida. Respecto á la exposición de la Mecánica, si bien encuentra evidentemente posible continuar la exposición de los tres sistemas, adopta el de Euclides, ya que los resultados prácticos de las otras dos Geometrías coinciden con éste para parámetros correspondientes suficientemente grandes.

Haremos notar, por último, el importante sistema de Geometría analítica expuesto por el Sr. Tilly en su Geometría analítica general, basada en la noción de la distancia é independiente de la experiencia, cuya idea fundamental se reduce á que: existen entre n puntos $\frac{n(n-1)}{2}$ distancias, y á partir de $n=5$ existe una relación entre estas distancias, relación que no es la misma en los diversos sistemas de la Geometría, y que contiene el parámetro constante de la Geometría real.

En el espacio real, se tiene $n=5$ y la relación fundamental existe entre las diez distancias de cinco puntos; pero no es arbitraria, debe existir para *todos* los grupos de cinco puntos con que se puede llenar el espacio, es decir, debe verificar un teorema que designa Mr. Tilly *la condición de los seis puntos*. El sistema de coordenadas adoptado en sus diversas obras permiten establecer las ecuaciones de la recta, del plano, etc., y llega á probar por qué es imposible demostrar el postulado de Euclides.

29 Ya que exponemos estas indicaciones y noticias acerca de la Geometría no-euclídea, creemos de gran oportunidad citar el trabajo reciente de M. Mansion *Essai d'exposition élémentaire des principes fundamentaux de la Géométrie non-euclidenne de Riemann.*

Para dar á conocer el significado del principio fundamental en este sistema, á saber, que la recta es una línea finita reentrante en sí, expone las definiciones euclídeas de la recta y el plano en el sentido atribuido por Cauchy (*) y desarrollado por M. Tilly: La noción de

(*) *Sept Lecons de Physique générale.*

distancia considerada como una noción irreducible, un punto M se dice que pertenece á una recta AB, si ningún punto del espacio está distante de A y de B como lo está M. Un punto cualquiera M se dice pertenecer á un plano ABC, si ningún punto del espacio está distante de A, B y C como lo está M. Un punto cualquiera M del espacio está determinado por sus distancias á cuatro puntos A, B, C, D.

Partiendo de estas nociones y suponiendo finita la distancia máxima 2Δ de dos puntos del espacio, como puede verse en las obras de M. Tilly, que dos rectas cualesquiera de un mismo plano se cortan en dos puntos situados á la distancia 2Δ, deduciéndose que, en un triángulo riemanno la suma de los ángulos es superior á dos rectas, y por consiguiente, que en un cuadrilátero riemanno la suma de los ángulos es superior á cuatro rectos (*Mathesis*, 1894, t. IV páginas 180-183).

Establecidos estos preliminares, M. Mansión desarrolla los principios de la geometría riemanna.

Termina este interesante opúsculo con un *Apéndice* sobre la historia de la Geometría no euclídea y otro sobre los primeros principios de la Metageometría y de la geometría riemanna (*).

Z. G. DE GALDEANO.

La curva podar de un cono axial en las superficies de segundo grado

POR EL PROFESOR HERR. J. MEYER EN HALLE A S

Es sabido que el sistema de ejes de una superficie de segundo orden F^2 pertenece á los complejos de segundo grado ó á los complejos de Reye. Toda recta perpendicular á su polar con respecto á F^2 se llama eje de F^2. Fácil es ver que los ejes situados en un plano cualquiera, envuelven en general una parábola. En efecto, un eje situado en el plano π, siendo perpendicular á su polar, que pasa por el polo P de π, como también lo es á la normal n trazada desde P á π, lo será el plano del haz cuyo eje es n, por tanto, tendremos todos los ejes situados en π, si trazamos perpendiculares desde los polos del haz de planos n á los planos correspondientes; pero estos polos forman una serie de puntos rectilínea n' que es proyectiva con el haz de planos y también con el de rectas que dicho haz de planos engendra sobre π;

(*) *Mathesis* Décembre 1893.

luego aquellas perpendiculares envuelven una parábola. La ley de reciprocidad exige que los ejes que pasan por un punto formen un cono de segundo grado.

2 Sea a un eje, normal, por consiguiente, á su polar a', y trácese por a un plano paralelo á a', este plano cortará á la superficie F^2 según una sección cónica, de la cual un eje es a, porque su polo, con respecto á la sección cónica perpendicular á él está situada á distancia infinita. Por a' trácese otro plano perpendicular á a, y desde el punto de encuentro se construye el cono de las tangentes á F^2, a es también eje de este cono, porque su plano polar con respecto al citado cono es perpendicular al referido eje. De este doble fundamento proviene la denominación de eje que se da á cada una de las ∞^3 rectas del complejo. La proyección ortogonal de a' sobre a, es, como se ve, un punto que se llama *pie del eje* a. Nos proponemos, pues, la cuestión siguiente: Determinar el lugar de los pies de todos los ejes que pasan por un punto del espacio (*).

3 Con tal objeto demostraremos previamente una proposición que encierra en sí gran interés, á saber:

Si un haz de planos E^2 está en relación proyectiva con una curva alabeada K^3 de tercer orden, en general, y á lo sumo cinco planos del haz, pasarán por los puntos correspondientes.

Si una curva plana de segundo orden K^2 está en relación proyectiva con un haz de planos de tercer orden E^3, en general y á lo sumo coincidirán cinco pares de elementos correspondientes.

Basta demostrar la proposición de la iáquierda, pues de ella se sigue la otra en virtud del principio de dualidad. En efecto, sea α un plano del haz E^2 que pasa por el punto correspondiente A del K^3 y trácese en el plano α por A una recta g, esta recta tendrá común con K^3 el punto A. Ahora bien, las cuerdas de K^3 que pasan por los puntos de dicha recta forman, como se sabe, un sistema reglado de segundo orden, á cuyo sistema director pertenece g; pero este sistema director está en perspectiva con la curva K^3, luego es proyectiva con E^2 y engendra con este haz una curva alabeada de tercer orden l^3, la cual, con la recta g situada enteramente en el plano α, completa una curva alabeada de cuarto orden. Que la línea citada últimamente es en general el resultado de un haz de planos de segundo orden, y además de un sistema reglado proyectivo se deduce de lo siguiente:

Si un plano cualquiera corta al sistema reglado según una sección

(*) Reye, *Geometrie del Lage*; t. II, p. 164 de la tercera edición.

cónica situada en perspectiva respecto de dicho sistema reglado y es proyectiva con el haz de planos, entre las dos últimas formas, se sabe (*) que no hay en general más que cuatro pares de elementos coincidentes; esto es, que la curva alabeada de que se habla es de cuarto grado. De todo lo dicho se sigue que k^3 y l^3 están situadas sobre la misma superficie reglada de segundo grado y tienen como cuerdas el mismo sistema de rectas, por lo cual tienen en general cuatro puntos comunes (**) y con esto nuestra proposición está demostrada.

Una consecuencia inmediata de nuestra proposición es, por ejemplo, ésta:

Si una curva alabeada de tercer orden es proyectiva con un sistema reglado, sin que coincidan dos elementos homólogos, estas formas engendran un haz de planos de quinto orden.

Si un haz de planos de tercer orden es proyectivo con un sistema reglado sin que coincidan dos elementos homólogos, estas formas engendran una curva alabeada de quinto orden.

El sistema reglado se proyecta desde un punto cualquiera del espacio por un haz de planos de segundo orden, que es proyectivo con la curva alabeada de tercer orden, y del cual, como sabemos, solamente pasan cinco planos por los puntos correspondientes.

Si un sistema reglado es proyectivo con una curva alabeada de tercer orden, y coinciden uno, dos, tres ó cuatro pares de elementos correspondientes, estas formas engendran un haz de planos de cuarto, tercero, segundo ó primer orden.

Si un sistema reglado es proyectivo con un haz de planos de tercer orden y coinciden uno, dos, tres ó cuatro elementos correspondientes, estas formas engendran una curva alabeada de cuarto, tercero, segundo ó primer orden.

3 Lo que sigue se refiere á la curva podaria. Sea P un punto situado en el complejo de los ejes y vértice de un cono de segundo orden cuyas generatrices son ejes; la parábola perteneciente á los ejes está situada en el plano polar π de P; tendremos, pues, todos los pies de las generatrices del cono trazando por las tangentes á la parábola planos perpendiculares á las generatrices correspondientes. Pero todos estos planos son paralelos á los que pasan por P y perpendiculares á los ejes, cuyos planos (los que pasan por P) forman un haz de

(*) Reye, I, pág. 136 de la tercera edición.

(**) Reye, II, pág. 200.

2.º orden y cortan según un haz de rayos de 2.º orden á los planos del infinito; por tanto, pueden mirarse los planos citados primeramente, como el resultado de dos haces de rectas de segundo orden proyectivos, de los cuales el uno es el sistema de tangentes á la parábola y el otro está situado en el infinito.

Este resultado es un haz de planos de tercer orden E^3 porque los planos de los haces de rayos se cortan en una recta que pertenece á ambos haces, pero que no se corresponde á sí misma.

Según esto, á la tangente en el infinito de la parábola de los ejes en π, corresponde el diámetro de F^2 que pasa por P y que en general no es perpendicular á π. E^3 es proyectivo con el cono P y ambos engendran la curva podaria, que es de quinto orden. Cortemos, en efecto, el cono P por un plano cualquiera, obtendremos una sección cónica que es perspectiva con P y proyectiva, por consiguiente, con E^3; pero según la proposición primera de 2 sabemos que en general y á lo sumo pasan cinco planos por los puntos correspondientes. Además, puesto que los tres ejes del cono P son perpendiculares entre sí y cada uno es conjugado al plano de los otros dos, también son ejes de F^2 y P es el pie de los tres y un punto triple de la curva alabeada de quinto orden.

BREVE NOTA MATEMÁTICA SOBRE EL TRIÁNGULO

POR D. JUAN J. DURÁN LORIGA, COMANDANTE DE ARTILLERÍA

Consideremos un triángulo ABC y construyamos sobre cada uno de sus lados, por ejemplo, BC todos los triángulos equipotenciales con el propuesto, esto es, que sea constante la suma de los cuadrados de los lados (véase nuestra Nota en el PROGRESO MATEMÁTICO, t. IV, pág. 313). Es evidente que los vértices de estos triángulos describen una circunferencia que tiene por centro el medio m_a de BC y por radio $\frac{2(b^2+c^2-a^2}{4}$. De un modo análogo se obtienen las circunferencias relativas á los lados AB y AC; llamaremos, por evitar perífrasis, á estas líneas, circunferencias potenciales del triángulo, y las representaremos por P_a, P_b y P_c.

Cada dos circunferencias se cortan en un par de puntos que gozan por lo dicho de la propiedad de que unido uno cualquiera de ellos con los vértices del triángulo propuesto se forman dos equipotenciales con él; así, por ejemplo, para uno de los puntos de intersección π_a de las P_b y P_c se tiene:

$$\overline{\pi_a A}^2 + \overline{\pi_a C}^2 + b^2 = \overline{\pi_a A}^2 + \overline{\pi_a B}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Como de la igualdad anterior se deduce que $\overline{\pi_a C}^2 - \overline{\pi_a B}^2 = c^2 - b^2$, resulta que los ejes radicales de estas circunferencias son las rectas simétricas de las alturas del triángulo con relación á las mediatrices, y que, por lo tanto, el centro radical es un punto notable ya conocido del triángulo.

En el caso particular en que el triángulo propuesto es rectángulo, es muy fácil ver que las tres circunferencias potenciales pasan por un punto (simétrico del vértice del ángulo recto, respecto al medio de la hipotenusa), y que goza, por lo tanto, de la propiedad de que, unido con los vértices del triángulo propuesto, los tres triángulos obtenidos son equipotenciales con el dado.

Siendo evidentemente los ejes radicales del círculo circunscripto y de cada uno de los potenciales, las paralelas trazadas á los lados del triángulo desde los vértices opuestos, resulta que los ejes radicales de los círculos potenciales pasan respectivamente por los vértices del triángulo anticomplementario. Es fácil ver por otra parte que dichos ejes radicales son las alturas del citado triángulo, y decir, por consiguiente, que el centro radical de las circunferencias potenciales de un triángulo es el ortocentro de su triángulo anticomplementario.

Otras propiedades se deducen con gran facilidad, por ejemplo, la de ser los círculos potenciales ortogonales al anticomplementario del círculo polar conjugado (cuando existe), pero hoy las pasamos por alto, dando fin á esta pequeña Nota con la obtención en coordenadas baricéntricas de las ecuaciones de los círculos potenciales.

Consideremos, por ejemplo, la que pasa por A que hemos llamado P_a.

Se sabe que la ecuación general baricéntrica de una circunferencia es

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u_a \alpha + u_b \beta + u_c \gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

en la que u_a, u_b, u_c son las potencias de los vértices del tríangulo de referencia respecto al círculo en cuestión.

Se ve enseguida que en el caso en que estamos

$$u_a = 0 \qquad u_b = u_c = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = -p_a$$

(representamos por p_a la potencia parcial del vértice A, véase nuestra citada nota del PROG. MAT.)

Tendemos, pues, para ecuación del círculo P_a

$$p_a(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma)+a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta=0$$

ó abreviadamente

$$p_a(\beta+\gamma)\Sigma\alpha+\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

BIBLIOGRAFÍA

JAHRBUCH ÜBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK herausgegeben von ***Emil Lampe*** Band XXIII Jahrgang 1891, Heft 3 Berlin 1894.

El tercero y último cuaderno (págs. 897-1314) del *Jharbuch*, etc. correspondiente á este año comprende. ***Mechanik***, Allgemeines, Kinematik, Statik, Dinamik, Potentialtheorie—*Mathematische Physik*, Molecularphysik, Elasticität und Capillarität, Akustik und optik, Elektricität und Magnetismus, Wärmlehre.—*Geodäsie*, ***Astronomie***, ***Meteorologie***, Geodasie, Astronomie, Mathematische, Geographie und Meteorologie.—*Anhang*.

Con objeto de que los lectores de este importante Repertorio de Bibliografía se hallen al corriente de cuanto se publica y enriquece constantemente la literatura matemática, el sabio director de esta Revista, al mismo tiempo que el tomo XXIV, que contiene las publicaciones del año 1892, publicará el tomo XXV, que contendrá lo correspondiente á los años 1893 y 1894, el cual se halla ya en prensa, según expresa una circular publicada por su ilustrado director Doctor Lampe.

Acaba de publicarse el cuaderno primero correspondiente al año 1892 (496 págs.), de cuyo contenido se dará cuenta en otra ocasión.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO. Las materias contenidas en el tomo VIII (1894), son las siguientes;

Gerbaldi. Sulle singolaritá della Jacobiana di tre curve piane.—*Bianchi*. Sui sistemi tripli ortogonali de Weingarten.—*Paci*. Sopra le derivate terze della funzione potenziale di una superficie.—*Torelli*. Sul gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale projectiva.—*Poincaré*. Sur les équations de la Physique Mathématique.—*Garibaldi*. Sull'estensione delli agregati numerabili.—*Cerruti*. Elenco dei lavori scientifici di Enrico Betti.—*Burali-Forti*. Sulle clasi ordinate e i numeri transfiniti.—*Torelli*. Giuseppe Battaglini.

— *Amici.* Risoluzione della congruenza $x^m \equiv b$ (mod. 2^ν). — *Fouret.* Sur le nombre de plans tangents que l'on peut mener á una surface algébrique par une droite multiple de cette surface.—*Soler.* Sopra una certa deformata della sfera.—*De Vries.* Zur Theorie der Tripelsysteme.—*Guccia.* Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolaritá ordinarie.

APUNTES DE ANALISIS INFINITESIMAL (*)

POR EL INGENIERO

DON EUGENIO GUALLART

PROFESOR DE LA ESCUELA DE INGENIEROS DE MONTES

CANTIDAD

Si al contemplar y comparar entre sí varias entidades no descubrimos entre ellas, aparte de su situación, caracteres ó propiedades diferenciales, decimos que son idénticas ó una misma cosa repetida, y no podremos distinguirlas entre sí; pero si aquellos caracteres se presentan, diremos que son distintas unas de otras

Entidades distintas pueden no obtante tener caracteres comunes y se llaman homogéneas respecto de éstos y heterogéneas con relación á los diferentes.

Solamente cosas ó entidades homogéneas pueden reunirse para formar un conjunto como engendrado por la repetición de cualquiera de ellas, la cual representa la unidad generatriz. Y cualquiera entidad sola y limitada puede á la inversa, también, ser mentalmente descompuesta en partes homogéneas.

El conjunto, en ambos casos, se determina por un número, y así determinado es una *cantidad.*

Por la propiedad, inherente á los seres limitados ó finitos y susceptibles, por lo tanto, de forma, de poder ser cada uno un todo descomponible en partes, se les denomina *cantidades;* la cantidad es, pues, una cualidad, y las cosas, en tanto que son cantidades, son sus-

(*) Ligeras adiciones á la cuarta edición del *Cours d'Analyse Infinitesimal de Ph. Gilbert* (París, Gauthier-Villars. 1892), con el objeto de poner en parte á esta obra de acuerdo con el Programa de dicha asignatura que se exige para el ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes. Son una síntesis extractada de lo que suele llamarse metafísica del cálculo, y la modesta labor personal es casi un trabajo de recopilación.

ceptibles de aumento y disminución, y pueden ser representadas por números.

La idea de cantidad es una de las elementales, y por lo mismo no se puede expresar de una manera rigurosa, aunque, en realidad, todo el mundo la comprende, y sólo por la influencia que tiene en la naturaleza compleja de las cosas, puede definirse como lo hemos hecho.

Dos caracteres esenciales é inseparables se presentan en la cantidad, el abstracto numérico ó discreto y el concreto extensivo ó continuo.

En el alternativo predominio de estos dos caracteres hasta identificarse estriba la división natural de la Matemática ó ciencia de la cantidad en las tres partes principales siguientes:

1.ª Análisis numérico que estudia la cantidad bajo el predominio del carácter numérico.

2.º Análisis geométrico, cuando sólo se atiende al extensivo y

3.ª Análisis infinitesimal cuyo objeto es el estudio de la cantidad en su total concepto abstracto-concreto sin que ninguno de estos caracteres predomine sobre el otro.

Así es que la cantidad, en este último, igualmente puede considerarse formada por otras cantidades de la misma especie más pequeñas, ó por el crecimiento ó decrecimiento de otras que varían de un modo continuo, es decir, por grados insensibles y pasando por todas las magnitudes intermedias para llegar al estado final.

Pero al considerar una magnitud como constituyendo un número, es decir, formada por otras iguales de la misma especie, como sólo excepcionalmente la mayor será múltiplo de la menor ó de los submúltiples de esta menor, si queremos considerar siempre la primera como un *número*, pudiendo ser cualquiera la unidad, será preciso ampliar el restringido concepto de aquella expresión, aplicándole á toda relación (razón) de magnitudes que evidentemente tiene un valor único, aunque este valor no pueda expresarse en el lenguaje escrito directamente, pero sí si se acude para ello á una *doble sucesión de números racionales* fácilmente determinables, que satisfaciendo á condiciones dadas representan exacta y precisamente el valor de que se trata que puede conocerse con una aproximación tan grande como se quiera.

(Núms. del autor, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16).

También hemos dicho que la cantidad puede engendrarse por el crecimiento ó decrecimiento de otra continuamente variable, pero como en esta variación no podemos tener presente el tiempo invertido (idea que hasta en Mecánica toma carta de naturaleza en el cálculo), no es admisible precisar que en *un momento dado* la cantidad variable llegue á tomar el valor de la fija que se nos dió, y al suponer una *variación indefinida* en la cantidad variable hasta poder ser igual que la fija tenemos que introducir en la ciencia la noción de *límite.*

LÍMITE

Cuando los valores sucesivos de una cantidad variable se aproximan indefinidamente á otra fija y determinada de tal manera que pueda diferenciarse de ella menos que todo lo que se suponga, se dice que la cantidad fija es el límite de los valores de la variable.

Así, el círculo puede considerarse como el límite de los polígonos inscriptos ó circunscriptos; la parábola como el de una elipse cuyo eje mayor crece sin término; la asíntota de la hipérbola como el de las tangentes cuyo punto de contacto se aleja indefinidamente del vértice, etc.

Para que la cantidad fija sea realmente el límite de los valores de la variable, no basta que la diferencia disminuya constantemente, que es preciso además que pueda hacerse menor que toda cantidad dada. La posición de una paralela á la asíntota de la hipérbola, por ejemlo, no puede nunca ser el límite de las tangentes, que evidentemente no podrían coincidir nunca con ella, pues no tienen punto alguno común; ni un círculo de radio menor ó mayor que otro, en el que están inscriptos los polígonos, lo puede ser de estos últimos, á pesar de que la diferencia de áreas disminuya constantemente.

El carácter del límite, tal como lo hemos definido, es que cuando la variación tiene lugar en el mismo sentido, aunque la variable llegue á diferenciarse de él tan poco como se quiera, no pueden, sin embargo, confundirse nunca, porque la consecución de este resultado supone la realización de un cierto infinito que nos está vedado.

Así, por ejemplo, para que los polígonos se confundiesen exactamente con el círculo, sería preciso que el número de lados fuese infinito, y esto no lo podremos conseguir nunca.

A la noción de límite en este caso corresponde, en el lenguaje vulgar, una particularidad curiosa, cual es la de que dos definiciones completamente distintas determinan dos objetos que tienden á confundirse, por lo que se llega así al extremo resultado de que dos enunciados lógicamente distintos representan una sola cosa. Pero como esta confusión no se manifiesta verdaderamente sino en el infinito, no hay, en realidad, contradicción alguna.

Esta particularidad comprueba también perfectamente el hecho á primera vista extraño de la imposibilidad de hacer coincidir nunca dos cantidades cuya diferencia, variable en el mismo sentido, podemos disminuir por bajo de toda expresión.

Es de advertir, no obstante, que del hecho real de que la cantidad variable no pueda confundirse con su límite, no se deduce que nosotros no podamos determinar el valor de este límite, pues de su misma definición se desprende el procedimiento que conduce á su determinación.

La cantidad variable no es por necesidad constantemente superior ó inferior al límite: puede muy bien oscilar de uno á otro lado con tal de que la amplitud de esta oscilación decrezca indefinidamente tendiendo hacia cero, aunque sin llegar nunca á él, lo mismo que sucedía anteriormente; y en este caso es muy posible que suceda que en la sucesión de magnitudes de la cantidad variable, un número considerable de veces, llegue á valer igual que su límite.

Parece á primera vista que el concepto de límite, todavía más aún en el presente caso que en el anterior, no ha de tener finalidad alguna, pero este error se desvanece si consideramos que cuando se trate de determinar el valor de una cantidad en un problema, será siempre más fácil que el averiguarlo directamente, deducirlo, como límite de los de otra, que puede ser muy sencilla, sometida á una variación de ley conocida.

Y sólo con estos conocimientos podremos resolver la cuestión que no dependerá ya de los valores intermedios, que pueden ser los que quieran y que no nos interesan, sino de la ley de la variación, lo cual es mucho menos complicado y está al alcance de nuestros medios.

Ejemplo frecuentísimo de ello tenemos cuando se trata de determinar la tangente en un punto de una curva, para lo cual no investigamos directamente la inclinación de la recta, que pasando por el punto dado, sólo tiene este mismo punto común con la curva, sino que lo que se hace es considerar la tangente como *límite* de las posiciones de la secante cuando el segundo punto se aproxima al primero y se busca el *límite* de la razón de los *incrementos* de la ordenada y de la abscisa de la curva, es decir, de una expresión dependiente de la *ley de variación*, sin que para nada nos interesen los diferentes valores de las coordenadas.

CANTIDADES VARIABLES INFINITESIMALES

Correlativa con la noción de límite es la del *infinitamente pequeño*, ó indefinidamente decreciente, que no es más que una cantidad variable que tiene por límite cero, pues si la cantidad variable se aproxima indefinidamente á su límite, la diferencia entre ellas, ó la amplitud de la oscilación, será necesariamente un infinitamente pequeño tal como se ha definido.

Análogamente se dice que una cantidad es *infinitamente grande* cuando es variable, pero creciente y sin limitación alguna. Los infinitamente pequeños é infinitamente grandes son dos cantidades inversas unas de otras.

De ninguna de las dos se puede decir qne tienen un valor *actual* ni pequeño ni grande susceptible de determinación; su carácter común y eminente es la *variabilidad.*

No se puede, por lo tanto, comparar el infinitamente pequeño con la cantidad finita, desconocemos el valor de la primera, que pudiera ser superior, igual ó inferior á la finita, según el estado en que se encuentre actualmente, estado que no podemos precisar al prescindir del tiempo, y lo único que sabemos es que, con el objeto de simplificar, pero siempre dentro de la más rigurosa exactitud en los cálculos finales, se la puede *suprimir* enfrente de la cantidad finita *cuando se ha de pasar por el límite para terminar los desarrollos,* puesto que en el límite su valor será cero y podemos por lo tanto aligerar nuestras expresiones despreciando términos que no tienen influencia en la finalidad que perseguimos.

Los infinitamente pequeños tampoco pueden ser, por idénticas razones, comparados entre sí, *valor á valor*; sólo podremos saber *si varían ó no con igual rapidez* por las consideraciones que se harán después.

Es preciso desechar también el erróneo concepto de que la cantidad variable que constantemente crece ó decrece llega á ser respectivamente mayor ó menor que toda cantidad dada; en ambos casos, el aumento ó disminución pueden ser indefinidos, pero siempre limitados por cantidades determinadas.

De manera que los cuatro casos siguientes pueden tener lugar:

1.º Crecimiento *ilimitado*, ej. $\frac{a+m}{b}$; $a \gtrless b$, $m = 0.1...\infty$. Lim. $= \infty$

2.º Decrecimiento *ilimitado*, » $\frac{a}{b+m}$; $a \gtrless b$, $m = 0.1...\infty$. Lim. $= 0$

3.º Crecimiento limitado, ej. $\frac{a+m}{b+m}$; $a<b$, $m = 0.1...\infty$. Lim. $= 1$.

4.º Decrecimiento limitado, » $\frac{a+m}{b+m}$; $a>b$, $m = 0.1...\infty$. Lim. $= 1$.

En los dos primeros casos de crecimiento *ilimitado* se suele decir que los *límites* son ∞ y 0 respectivamente, y por eso se han escrito así.—(Núms. del autor, 18... 21.)

FUNCIONES

Se dice que dos cantidades son funciones la una de la otra cuando del valor de una de ellas se deduce inmediatamente el de la otra, y viceversa. La dependencia recíproca se establece por medio de una relación analítica que se llama ecuación. Al decir analítica queremos indicar que la relación supuesta es expresable con los algoritmos del Análisis, ó lo que es lo mismo, que la función es abstracta. Hay una multitud de relaciones naturales (funciones concretas) que no podemos representar analíticamente y á las que no consideraremos, por lo tanto, como verdaderas funciones.

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

1.º Atendiendo al número de variables se dividen las funciones en funciones *de una sola variable* independiente y funciones de *dos ó más variables* independientes.

2.º Si la expresión de la función, por medio de ser variable está dada en símbolos conocidos, se la llama *explícita* y se la representa por $y = f(x)$, $z = f(x, y)$... Si el valor de la función no está expresado directamente, sino que dicha función está incluída con las variables en una ecuación no resuelta, se dice que la función es *implícita*, y se la representa por $f(x.y)=0$. $f(x, y, z)=0$...

3.º Teniendo presente la forma de las funciones, se las divide en *algébricas* y *trascendentes*, y se subdividen las primeras en enteras, fraccionarias, racionales é irracionales y las segundas en logarítmicas, exponenciales y circulares directas é inversas.

4.º Respecto á su mutua dependencia, según que ésta sea inmediata ó mediata, se dividen en funciones *elementales* y funciones *compuestas* de las elementales. En las primeras, la variable está relacionada con la función por medio de *una sola operación* de las fundamentales del análisis, es decir, que las funciones son la expresión de los distintos algoritmos que sabemos se clasifican en cinco grupos binarios. Las funciones compuestas, según que sean de operaciones *superpuestas* ó *aisladas*, se subdividen en *funciones de funciones* y *funciones compuestas* propiamente dichas.

5.° Con relación al modo de variación se dividen en continuas y discontinuas; y

6.° Atendiendo á la naturaleza de las variables, se dividen en funciones de *variables reales* y funciones de *variables complejas.*

REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN POR LA ECUACIÓN

Ya hemos dicho anteriormente que una función abstracta cualquiera se podía representar siempre por una ecuación, y en efecto, se comprende que así sea si reflexionamos sobre los extensos medios de expresión de que las ecuaciones disponen.

Dejando aparte las ecuaciones trascendentes cuyo solo carácter es suficiente recordar para vislumbrar el ilimitado campo que abarcan, vamos á ver que en las algébricas la diferente categoría de los elmentos que las constituyen establecen divisiones subordinadas que en la amplitud de su variación permiten comprender todas las gradaciones posibles de las funciones, de la misma manera que en las ciencias naturales las diferentes agrupaciones de la clasificación estableciendo un orden de dependencia comprenden sistematizados todos los seres de la naturaleza.

Vemos, en efecto, que si en una ecuación $\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^n y + \mathrm{C}x^p y^2 + \ldots = 0$, por ejemplo, damos á los *exponentes* valores particulares, restringiremos en cierto modo la generalidad de la función de las variables que consideramos que nos representará solo, un cierto *órden* ó *grado;* así si la ecuación es de dos variables y la suma de los mayores exponentes es dos, tendremos la expresión general de las curvas de segundo grado. Si fijamos después signos y valores que cumplan determinadas condiciones, á los coeficientes distinguiremos dentro del segundo órden ó grado, varios *géneros* (elipse hipérbola... etc, en el ejemplo citado) y finalmente en cada uno de estos *géneros* separaremos *especies* de diferentes magnitudes y variedades (circunferencia, rectas...) según cuales sean los valores que reciban ciertas cantidades llamadas *parámetros* (que pueden ser esponentes coeficientes ó sumandos) que quedarán todavía sin fijar y que cuando varían continuamente con sujeción á una ley dada, dan origen á un conjunto de funciones denominado, puede ser que con impropiedad, sistema ó *familia.*

De donde se deduce que dentro de las funciones de una dimensión dada ó *clase*, según el número de variables independientes, los exponentes de estas variables determinan el *órden* ó grado, los coeficientes con sus signos el *género*, los parámetros las *especies* y *variedades* y por último los valores de las variables, los puntos representativos del valor de la función; con cuyos elementos tenemos, según se comprende, medios de representación tan estensos y variados como variadas pueden ser las funciones que nos interesen.

VENTAJAS DE LA FORMA IMPLÍCITA

Parece á primera vista que la forma explícita es más conveniente que la implícita para su representación mas general, pero nada hay más lejos de la verdad, porque aparte de que la forma explícita contiene generalmente denominadores susceptibles de anularse y hacer indefinida á la función ó radicales de valores múltiples reales ó imaginarias, la ecuación de la forma $F(x, y)=c$, por ejemplo, supuesta su continuidad y la de sus primeras derivadas, representa una curva, sin principio ni fin prolongada de una parte y de otra de cada uno de sus puntos según direcciones exactamente opuestas, y cuya tangente varía de una manera continua, propiedades todas, que hacen del lugar geométrico $F(x. y)=c$ un todo natural del que representan partes, artificialmente circunscritas, los valores explícitos.

La diferencia es más importante de lo que parece; ambas formas, la implícita y la explícita, representan completamente el lugar geométrico á que se refieren, pero la primera lo hace ciñéndose á *un solo* punto que puede ser *cualquiera*, lo cual es relativamente menos complicado que como lo hace la segunda, que abarca *todo el conjunto* de puntos bajo una sola expresión que necesariamente ha de contener radicales de significaciones múltiples ó cualesquiera otras formas algébricas de constitución muy compleja acompañadas de una especie de indeterminación que obliga á fijar los límites entre los que la variación de la abscisa x debe estar comprendida.

La representación más general de la cantidad se consigue por las funciones continuas.

Según los teoremas, números 62 y 132 (*), la función representa la cantidad en su carácter númerico, pues si hay siempre un número racional ó inconmensurable que expresa el valor máximo ó el mínimo de una función que en un intérvalo está comprendida entre dos números dados; reduciendo á cero el intervalo, se deduce que hay un *número que mide el valor de la función* en cualquier estado.

(*) Del Autor.

Los teoremas números 67 y 136 demuestran que la función que varía *continuamente* no puede descender de uu valor *superior* á un *inferior* ó viceversa sin pasar *por los comprendidos entre ellos*; los teoremas números 68 y 137 *completan* la demostración para cuando la función alcanza un *máximo* ó un *mínimo*, y se comprueba así que la función *representa el carácter extensivo* de la cantidad, *desde el punto de vista* de que la *variación* desde un estado á otro no puede hacerse sin *transitar por todos los intermedios*. Los teoremas números 69 y 138 para los casos de subdivisiones de un intérvalo y los números 70 y 139 generalizando los anteriores para una ley arbitraria, estudian esta *misma propiedad bajo su aspecto complementario* de que la *variación* se realiza por *grados insensibles* y resulta como síntesis que la *función continua puede representar la cantidad en su carácter extensivo*.

Como la continuidad es condición necesaria para que la función sea la representación más general de la cantidad considerada como número y como extensión y esta continuidad no podemos comprobarla sino por medio de la serie numérica que esencialmente discontinúa, el teorema número 71 demuestra que si la función es continua para los valores de esta serie, lo será tambien en absoluto.

ANALISIS INFINITESIMAL

El Análisis infinitesimal, teniendo presente todo lo que antecede, no es otra cosa sino la «*Teoría de las funciones*» que estudia, además de comparar los valores de la función considerada como expresión de dependencia, con las de las variables, el concepto de la continuidad y la fluxión ó ley de variación en el curso de la función misma.

Los problemas que resuelve pueden separarse en dos categorías según que las relaciones entre los datos y las incógnitas se establezcan directamente ó por el intermedio de otras que á las primeras se aproximan indefinidamente, de tal manera que las cuestiones, se resuelvan buscando los límites de ciertas cantidades variables convergentes hacia los elementos verdaderos de la cuestión.

De aquí se sigue una sub-división de esta ciencia en dos ramas llamadas respectivamente:

Análisis ordinario ó algebraico, que es cálculo de las funciones directas, y el

Análisis trascendente ó infinitesimal propiamente dicho, cuyos procedimientos constituyen el cálculo de las funciones indirectas.

De la misma manera que en el Análisis ordinario *plantear los problemas* y *resolver las ecuaciones* obtenidas, constituyen dos operaciones distintas que corresponden al *método* y *cálculo* algebraicos, en el Análisis infinitesimal se reconoce igualmente un *método*, diferente del mecanismo del *cálculo*, que presenta la particularidad, que no se encuentra en el algebrico, de requerir en cada problema, la investigación de ciertas cantidades de las que se puedan considerar como límites las dadas, y procura establecer las ecuaciones que deben expresar las relaciones entre estos límites.

El *cálculo* infinitesimal, tiene por objeto crear procedimientos regulares, que permitan resolver las ecuaciones de nueva naturaleza á que dá lugar la relación de límite introducida.

MÉTODO INFINITESIMAL

Ya hemos definido su objeto, que no es otro, que expresar las cantidades de la cuestión en función de otras variables á las que sirvan de límites ó de cuyos límites dependan.

Como esta dependencia puede establecerse de muchas maneras diferentes y las formas de sus expresiones son tan diversas como las cuestiones á que se refieren, parece difícil establecer reglas precisas que conduzcan á la solución. Pero como se observa que un gran número de cuestiones dan lugar á las mismas clases de límites y que es generalmente posible referir á ellas, las que pudieran intentarse de otra manera, solo se consideran tres modos principales que constituyen las tres ramas importantes siguientes del método infinitesimal.—(Núm. 25 del Autor).

Correspondientes con ellas, el cálculo se subdivide también en otras tres que reciben respectivamente los nombres de *cálculo de las series*, *cálculo diferencial* y *cálculo integral*.

A estas operaciones fundamentales, cuyo objeto es manifiesto, se unen siempre desarrollos analíticos importantes por que no es frecuente que la cuestión se reduzca inmediatamente á la evaluación directa del límite de un cociente ó de una suma, sino que los límites de que se trata estan generalmente combinados con otras incógnitas, en ecuaciones de forma complicada que dan origen á una elaboración especial.

Resumiendo, el método infinitesimal, se reduce en último estremo á procurar el establecimiento de una ecuación de la forma:

$$\text{Cantidad desconocida} = \left\{ \begin{array}{l} \text{límite de cociente} \\ \text{ó} \\ \text{límite de suma.} \end{array} \right.$$

á lo cual llegaremos:

1.º Investigando cuáles son las cantidades *infinitamente pequeñas* (*) cuyos límites de cociente ó de suma tienen por valores las cantidades desconocidas, y

2.º Reduciendo estos cocientes ó estas sumas á la forma requerida por el cálculo; sea á la $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, ó á la $\Sigma f(x) \Delta x$, siendo $f(x)$ conocida, pues si esto se consigue, la cuestión se resuelve facilmente por un procedimiento conocido que tiene por objeto calcular la derivada $\frac{d f(x)}{d x}$ ó la integral $\int f(x)\, d x$.

La investigación de los infinitamente pequeños varía como es natural con las cuestiones, y en cada caso particular, hay que demostrar que la cantidad que nos ocupa, puede ser considerada como límite de un cociente ó de una suma de ciertos infinitamente pequeños.

Así por ejemplo, podremos determinar la longitud de una curva, después de demostrar que esta longitud es el límite de la suma de los lados de los polígonos inscriptos; si nos proponemos calcular el área comprendida entre una curva el eje de las x y dos ordenadas extremas, hay que demostrar que dicha área es el límite de la suma de los pequeños rectángulos formados, trazando por las extremidades de las ordenadas de la curva, perpendiculares á las ordenadas siguientes... etc.

Estas demostraciones, que se reducen á comprobar que la definición de límite se satisface, pueden hacerse cuando se trate de sumas, que es el único caso difícil, por un procedimiento general que consiste en descomponer la curva ó el área... etc, en porciones infinitesimales, lo mismo que el polígono ó el rectángulo y comparar luego infinitamente pequeños entre sí haciendo aplicación de los importantísimos teoremas siguientes.—(Núms. 46, ... 50 del Autor).

Una misma cantidad puede ser considerada como límite de una infinidad de otras; por ejemplo, una curva puede considerarse como límite de los polígonos inscriptos igualmente que de los circunscriptos, lo mismo límite de una serie de tangentes terminadas en la ordenada del punto de contacto inmediato y todavía límite de una serie de rectas no tangentes que se aproximan indefinidamente según una ley dada... etc; entre todas ellas deben escojerse las que ofrezcan más facilidades para el cálculo; así por ejemplo, se elegirá, cuando esto sea

(*) Puesto que el desarrollo en serie según veremos, es una consecuencia del cálculo diferencial.

posible, la forma de límite de cociente, por que el cálculo de una derivada es mas seguro que el de una integral que no siempre se puede resolver.

Ni para la investigación de los infinitamente pequeños, ni para la elección de los más convenientes cuando hay varios, excepto en el caso citado, se puede establecer regla alguna, por que solo la costumbre del cálculo puede dar el discernimiento necesario para tales apreciaciones.

Una vez determinados los infinitamente pequeños de cuyos cocientes ó sumas son límites las cantidades buscadas, es preciso para poder calcular su valor, reducirlos, como ya hemos dicho, á la forma $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ó á la $\Sigma f(x) \Delta x$. Si se ha demostrado que la longitud de una curva es igual á Σl, siendo l la longitud de una cuerda inscripta, se debe remplazar l por $f(x) \Delta x$ siendo $f(x)$ conocida para que el cálculo pueda ser efectuado. Es decir se deben expresar los diversos infinitamente pequeños en función de uno solo, que pueda ser el del incremento de la variable independiente, de quien los de las demás variables dependen evidentemente.

Para esta elaboración son también de una gran utilidad los teoremas que anteriormente se demostraron y las proposiciones siguientes referentes á la consideración de infinitamente pequeños de diversos órdenes y á las operaciones fundamentales entre ellos.—(Núms. 58 y 59 del Autor).

La determinación de unos infinitamente pequeños en función de otros se simplifica atendiendo á la importantísima circunstancia de que en lugar de establecer entre ellos ecuaciones exactas, lo que presenta frecuentemente obstáculos insuperables, se pueden omitir desde luego todos los infinitamente pequeños de órdenes superiores que en las ecuaciones debían figurar para que desde el principio fuesen rigorosas, pero que estan condenados á desaparecer mas tarde; pudiéndose establecer que *la igualdad de los dos miembros de una ecuación cualquiera exige que todos sus términos sean finitos ó infinitesimales del mismo órden* y que cuando asi no sea deben hacerse *homogéneas* con respecto á los del orden menos elevado, *suprimiendo los demás términos.*

Es preciso al hacer esta supresión no engañarse respecto de la importancia de las cantidades, que puede estar oculta por falsas apariencias, resultantes de ciertas compensaciones implícitas.

La supresión de infinitamente pequeños de órdenes superiores que constituye la esencia del *principio de la homogeneidad infinitesimal* está fundada en una consideración análoga á la que permite igual desaparición del infinitamente pequeño de primer orden comparado con las cantidades finitas.

Según ya dijimos, no es posible asegurar, que el valor *actual* del infinitamente pequeño de orden superior, es grande ni chico por que se trata también de cantidades variables cuyos estados intermedios desconocemos y solo se deduce de que el cociente de un infinitamente pequeño, por otro del orden inmediato inferior, tiende hacia cero, que el numerador (infinitamente pequeño de orden superior) *disminuye* ó varía más *rápidamente* que el denominador siendo despreciable enfrente de él al llegar al límite.

En todas las ecuaciones existen con los infinitamente pequeños, cantidades finitas que ó bien figuran en ellas desde el principio ó aparecen después, cuando se suprime un factor infinitesimal al pasar al límite y como necesariamente hemos de pasar por este estado para obtener la relación deseada entre los datos y las incógnitas, la supresión de todos los infinitamente pequeños ó por lo menos la de los de orden superior es una operación legítima que por las simplificaciones que introduce hace del procedimiento infinitesimal el auxiliar más preciado de las ciencias.

LA SISTEMATIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

Continuación.—(Véase tomo V, págs. 38-40).

§ 4.°—Semejanza, simetría y relaciones métricas

13 *Relaciones métricas determinativas.* El empleo del número como medida de las magnitudes geométricas ó la *razón* entre dos de la misma naturaleza (medidas con la misma unidad que les sirve de término medio en su comparación) permite generalizar el modo de determinación de las figuras. Esta generalización depende de la correspondencia existente entre los ángulos que las rectas AC y AC_1 forman con LL' y la longitud de cada una (fig. 2, véase pág. 39).

A cada recta AC, AC_1,.... corresponderá una razón distinta. Pero se tiene

$$AP = \frac{AP}{AB} AB,\ AP = \frac{AP}{AC} . AC;\ \text{luego}\ \frac{AP}{AB} AB = \frac{AP}{AC} AC$$

$$\text{y} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AC} : \frac{AP}{AB} ; \frac{AB}{AC} = \frac{\varphi\,(C)}{\varphi\,(B)} \;(*)\; \text{y } AB = \frac{\varphi\,(C)}{\varphi\,(B)} AC \;(1)$$

Observación. La relación que permite pasar de AB á AC ó que transforma AB en AC es

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } C} \text{ ó } AC = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } C} AB$$

En el caso de ser una de las rectas AB, la AP, será

$$AC = \frac{AP}{AC} AP = \frac{\text{sen } C}{1} AP = m.\,AP$$

indicando m el coeficiente que transforma AP en cualquiera de las rectas del sistema que consideramos.

Pero esta transformación solo se aplica por ahora á la faja comprendida entre LL′ y la paralela trazada á esta por A, y además á todas las fajas iguales en que se puede considerar dividido el plano.

La consideración de la semejanza y la homotesia permite una nueva generalización.

14 *Generalización de las relaciones determinativas por semejanza.* Si se toman partes iguales á AB y BC se obtienen puntos A_1, A_2,.... C_1, C_2.... y las rectas A_1C_1, A_2C_2,... A_nC_n son paralelas á la AC, pues en las diferentes fajas se obtienen los Δ^s AA_1C', A_1A_2C'',.... iguales al ABC, siendo A_1C', A_2C'',... paralelas á AC, y recíprocamente: Si A_nC_n es paralela á AC, será,

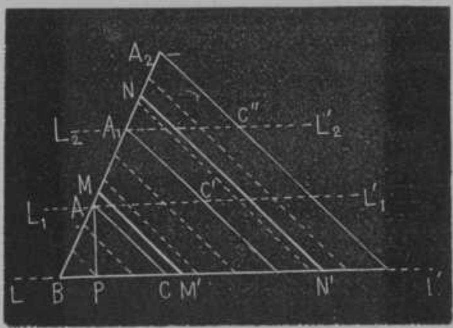


Fig. 4.ª

$$\frac{BA_n}{BC_n} = \frac{BA}{BC}$$

pues si se tuviese $BA_n = m.\,BA$, $BC_n = m'.BC$, se tendría $BA_n = m.BA$ y $BC_n = mBC'$, siendo C′ distinto de C y el $\angle C'$ distinto del C_n; y según la proposición directa tomando m segmentos, á partir de A y C′ se obtendrían los puntos A_n y C_n, no siendo A_nC_n paralela á AC, puesto que lo sería á la AC′,

(*) Los signos φ (B), φ (C) que representan las relaciones $\frac{AP}{AB}$, $\frac{AP}{AC}$, ... designan la función del ángulo B, C,... que se llama *seno*, según se explana mas adelante. Y también las relaciones $\frac{PB}{PA}$, $\frac{PC}{PA}$,... corresponden á otras funciones angulares que se llaman tangentes de los ángulos PAB, PAC,.... Así como $\frac{PB}{AB}$, $\frac{PC}{AC}$ se designan con el nombre de *cosenos* y $\frac{PA}{PB}$, $\frac{PA}{PC}$, con los de *cotangentes* etc.

siendo $\angle C_n = \angle C'$ y por consiguiente $\angle C_n \neq \angle C$ contra lo supuesto.

Observación. Esta relación de proporcionalidad se extiende inmediatamente á cualquier triángulo homotético del ABC por medio de triángulos auxiliares formados por las prolongaciones de sus lados hasta encontrar las rectas LL', BA_n.

15 *Simetría* a) Sean dos sistemas de paralelas. Estos formarán paralelógramos. Haciendo girar la figura ABCD (fig. 5.ª) alrededor del punto medio O de AC, hasta que AO coincida con OC, AD coincidirá con BC y CD con AB; luego D coincidirá con B y AD = BC y AB = CD.

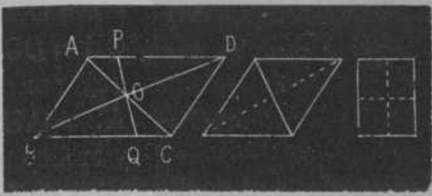


Fig. 5.ª

b) Además los ángulos AOD y BOC superpuestos serán iguales; luego OD es prolongación de OB y O el punto medio de BD.

De igual manera cualquier otro segmento PQ quedará dividido por O en dos partes iguales, luego: *el punto de intersección de las diagonales de un paralelógramo es un centro de simetría.*

c) En el rombo y el rectángulo además del centro existen *dos ejes de simetría en el cuadrado cuatro.*

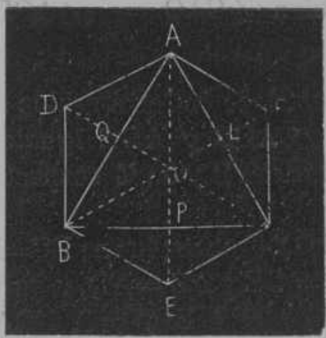


Fig. 6.ª

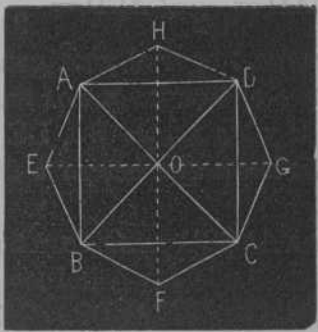


Fig. 7.ª

d) Supongamos la perpendicular PO en el punto medio de BC y la oblicua trazada á la AP tal, que BA=BC (fig. 6.ª); entonces, siendo QO un eje de simetría con relación á BA, tendremos AO = BO = CO(*), y OP será igual á OQ, porque siendo PB = QB, en cada uno de los dos ejes, por la relación unívoca, el pie O de la oblicua OB equidistará respectivamente de P y de Q y por la misma razón será

(*) Además, cortando á AP en P el lado PQ del triángulo isósceles BPQ, que forma con AB el ángulo agudo PQB, la $\perp$ QO á AB cortará á AP por ser la primera perpendicular y la segunda oblícua á AB ó por ser áng. OQP + áng. OPQ < 2 rectos, etc.

QC = AP; y QO pasará por C; al otro lado de AP será AC = AB y el tercer eje pasará por O, y por B, siendo LB = AP.

Prolongando los tres ejes de modo que OD = OE = OF = OA, se tiene el exágono regular, y luego los polígonos de 12, 24, etc. lados.

Si ahora consideramos el cuadrado ABCD que admite además de los ejes de simetría AC, BD, otros dos, y si en las direcciones de estos otros dos se toma OE = OC = OF = OH = OA (fig. 7.ª) se tendrá) por ser además $\angle$ AOE = $\angle$ AOH = ...: AB = AH = HD = ... y $\angle$ EAH = $\angle$ AEB = ... y análogamente se obtendrán polígonos regulares de $4n$ lados.

Fig. 8.ª

e) La obtención por medio de la regla y el compás de polígonos regulares de $5n$, $7n$,..... lados, dependiendo de la formación alrededor de un punto de 5, 7,... ángulos iguales, ofrece dificultades que no permiten llevar más lejos, por ahora, estos desarrollos acerca de la simetría.

Así, suponiendo dado el $\triangle$ isósceles ACD tal, que

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ADC \left(\text{ó bien } \angle CAO = \frac{1}{4} \angle ACD\right)$$

podremos llegar al pentágono regular.

Para ello supongamos trazadas las bisectrices de los ángulos en C y en D y las rectas BC, DE que forman $\angle^s$ ACB y ADE iguales al $\angle$ CAD hasta que corten á dichas bisectrices en B y en E respectivamente.

Los $\triangle^s$ BCD y ADE son también isósceles é iguales; luego BC=DE.

Siendo además $\triangle$ PMC = $\triangle$ QMD, BD = CE y AC =AD, resultará $\angle$ BPA = $\angle$ EQA, BP = QE y AP = AQ; luego $\triangle$ BPA = $\triangle$ EQA

Pero siendo isósceles los $\triangle^s$ BPC y DQE, se tiene $\triangle$ CPD = $\triangle$ BPA y $\triangle$ CQD = $\triangle$ EQA; luego AB = AE = ED (por ser $\triangle$ AED, isósceles) etc. $\angle$ AEQ = $\angle$ QCD; luego $\angle$ E = $\angle$ D, además $\angle$ E = $\angle$ B por ser los $\triangle^s$ ADE y ABC iguales,

Las bisectrices de $\angle$ C y $\angle$ D se encontrarán en la bisectriz AM, pues el punto de encuentro ha de ser en la perpendicular á CD en su punto medio.

Siendo OC = OA y BC = BA, OB será la bisectriz de $\angle$ ABC, y lo mismo se dirá de DE.

Z. G. DE GALDEANO.

(Se continuará).

RELACIÓN ENTRE LOS ELEMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

DE LAS SECCIONES PRODUCIDAS EN UNA SUPERFICIE POR PLANOS QUE PASAN POR UNO DE SUS PUNTOS DEL INFINITO

POR

D. EDUARDO TORROJA

Catedrático de la Universidad Central.

I. *Lema.* Cinco puntos A, B, C, D y E (fig. 1.ª) y dos planos α=ALM y β=BLM que pasan respectivamente por dos de ellos A y B determinan una superficie de segundo orden Σ que pasa por dichos puntos y es tangente á estos planos.

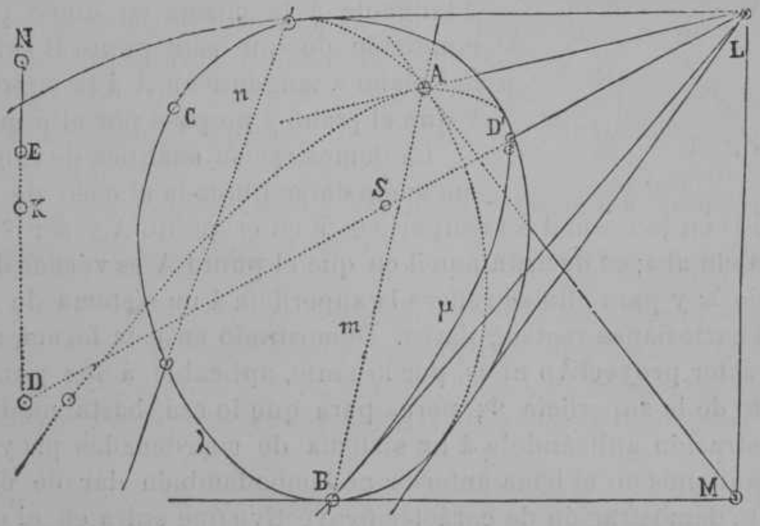


Fig. 1.ª

En efecto, en el plano ABC hay una curva de segundo orden λ que pasa por los tres puntos A, B y C y es tangente en los dos primeros, á las intersecciones respectivas AM y BM de su plano con los α y β. Si designamos por N el punto en que la recta DE corta al plano ABC, por n la polar de dicho punto respecto de la curva λ y por K el punto harmónicamente separado del mismo punto N por los D y E, la superficie que cumple las condiciones pedidas en el teorema debe pasar por la curva λ y tener como planos polares de los puntos A, B y N los planos respectivos α, β y nK; y, por tanto, como polo de su plano ABC el punto L de intersección de aquellos tres planos. La superficie de segundo orden pedida Σ será, pues, la inscripta en la superficie cónica $L\lambda$ á lo largo de la curva λ y que además pase por el punto D, y podrá considerarse engendrada por curvas cuyos planos pasen por la recta LD, cada una de las cuales queda determinada por el punto D, los dos en que su plano corta á la curva λ y las tangentes en éstos que pasan por el punto L; y claro está que todas estas curvas pasan por el punto D' harmónicamente separado del D por el L y el S de intersección de la recta LD con el plano ABC de la curva de contacto λ.

2. *Teorema.* Existen, por lo general, infinitas superficies de segundo orden Σ que tienen con una supercie cualquiera Φ, en uno de sus puntos ordinarios A (fig. 2.ª), un contacto de segundo orden. Para determinar una de ellas, puede fijarse arbitrariamente uno de sus puntos B y el plano β tangente á la misma en dicho punto; á condición de que este punto B esté fuera del plano α tangente en A á la superficie Φ y que el plano β no pase por el punto A.

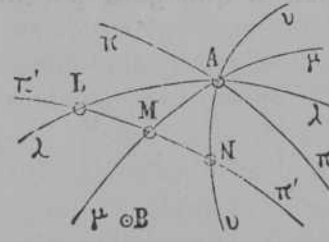


Fig. 2.ª

La demostración analítica de este teorema suele darse limitada al caso de estar el punto B en la normal á la superficie Φ en el punto A y ser el plano β paralelo al α; es decir, á aquél en que el punto A es vértice de la superficie Σ: y para ello se refiere la superficie á un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Demostrado en esta forma, no tiene el carácter proyectivo ni es, por lo tanto, aplicable á los puntos del infinito de la superficie Φ; pero, para que lo sea, basta modificar la demostración aplicándola á un sistema de coordenadas proyectivas. Apoyándonos en el lema anterior podemos también dar de él la siguiente demostración de carácter proyectivo que entra en el dominio de la Geometría pura.

Sean λ, μ y ν las secciones producidas en la superficie Φ por tres planos λ, μ y ν que pasan por la recta AB y π la sección producida en la misma por otro plano cualquiera π que pase por el punto A. Supongamos que éste se mueve viniendo á ocupar otra posición π' que corta á las tres curvas λ, μ y ν en tres puntos distintos L, M y N; sea π' la sección que este plano π' produce en la superficie Φ, y Σ' la superficie de segundo orden que pasa por los puntos A, B, L, M y N y toca en los dos primeros á los planos α y β.

Cuando el plano π' vuelva á su primera posición π, la superficie Σ' se transformará en otra Σ de segundo orden que es cortada por los planos λ, μ y ν según curvas que tienen con las λ, μ y ν un contacto de segundo orden, como límites de otras que tienen con cada una ellas dos puntos comunes y la tangente en uno de ellos A; y por el plano π según otra que tiene con la curva π un contacto del mismo orden, como límite de una curva que corta á la π' en los tres puntos L, M y N que tienden á confundirse en uno con el punto A.

Para demostrar que, cualquiera que sea la posición del plano π, la superficie Σ que se obtenga será la misma, basta observar que la Σ_1, que corresponde á otra posición π_1 de este plano, tendría comunes con la Σ las secciones que en ellas producen los planos λ, μ y ν, puesto que las producidas por uno cualquiera de ellos (el λ, por ejemplo) en las dos superficies Σ y Σ_1, tienen comunes los puntos A y B, las tangentes en ellos y además en el primero tienen un contacto de segundo orden, por tanto, se confunden en una. Un punto cualquiera C de la superficie Σ pertenece también la Σ_1, puesto que podemos imaginar trazado por él un plano γ que corte á aquellas curvas comunes en seis puntos distintos y que, por tanto, determina en las dos superficies Σ y Σ_1 una misma curva que pasa por el punto C: luego estas dos superficies se confunden en una misma Σ y todo plano que pasa por el punto A determina en ella y en la Φ secciones que tienen en él un contacto de segundo orden.

3. Como el plano α tangente en A determina en la superficie Σ dos rectas, cuando es alabeada, y según la demostración anterior, esta sección debe tener, por lo menos, tres puntos coincidentes comunes con la $\alpha\Phi$, que el mismo plano α produce en la superficie Φ, esta sección debe tener en A un punto doble y las dos ramas que pasan por él son tangentes á aquellas rectas, sin que deban tener con ellas un contacto de orden superior al primero, pues de los tres puntos coincidentes que una de ellas tiene comunes con la curva $\alpha\Phi$, dos pertenecen á la rama de curva tangente á ella y el tercero á la otra.

Escolio. La demostración anterior se funda en que dos curvas que se deforman de manera que tres puntos distintos comunes á ellas tienden á confundirse en uno sólo, tienen en la posición límite un contacto de segundo orden en el punto común en que se han reunido aquellos tres. Esta proposición, análoga á la que sirve de base á la definición de la tangente, dista mucho de ser evidente, ni es susceptible de una demostración general aplicable á todas las curvas; de manera que sólo á las superficies cuyas secciones planas, comparadas con una curva de segundo orden, cumplan aquella condición será aplicable el teorema en cuestión, y sólo á ellas nos referiremos en cuanto sigue.

4. *Teorema.* Una superficie de segundo orden Σ_1 tangente á una superficie Φ en un punto A y que tenga en este punto un contacto de segundo orden con una sección plana λ de esta superficie tendrá el mismo orden de contacto con todas las demás secciones planas de dicha superficie Φ cuyos planos pasen por la tangente l (no se ha trazado en la figura 2.ª) á la curva λ en el punto A.

Sea, en efecto, λ_1 la sección producida en la superficie Σ_1 por el plano λ, B uno de sus puntos distinto del A, β el plano tangente á Φ en el punto B y Σ la superficie de segundo orden osculatriz de la propuesta en el punto A y que sea tangente en el punto B al plano β. El plano λ corta á las dos superficies Σ y Σ_1 según la misma curva λ_1; por tanto, dichas superficies son tangentes á lo largo de esta curva ó se cortan además según otra de segundo orden cuyo plano pasa por la recta AB que une sus puntos de contacto, y, en uno y otro caso, todo plano secante trazado por l determina en ellas dos curvas de segundo orden que tienen entre sí en el punto A un contacto de segundo orden, por lo menos; y como las secciones producidas por dicho plano en la superficie Φ y en la Σ tienen un contacto de segundo orden (§ 2), queda con esto demostrado lo expresado en el enunciado del teorema.

5. Para el estudio de los puntos del infinito de las superficies distinguiremos dos casos, según que el plano tangente μ correspondiente á un punto del infinito M_∞ de la superficie sea uno propiamente tal ó sea el del infinito. En el primer caso, todas las tangentes correspondientes á dicho punto son asíntotas propiamente tales, excepto una que es la recta del infinito del plano μ y aquellas asíntotas son todas las paralelas de dirección M_∞ situadas en el plano asintótico μ: mientras que en el segundo caso no hay ninguna asíntota ni plano asintótico propiamente tal, siendo las tangentes en M las rectas del infinito de los planos de un haz cuya arista tiene la dirección M_∞.

6. Si cortamos una superficie por planos que pasen por una misma asíntota m, la relación entre los elementos de segundo orden de las secciones obtenidas, correspondientes á su punto del infinito común, se puede determinar considerando una superficie cilíndrica cuyas generatrices sean perpendiculares á la asíntota m y paralelas al plano asintótico correspondiente μ y que tenga por directriz una hipérbola que tenga con una de dichas secciones planas un contacto de segundo orden en el punto del infinito de la asíntota m; pues en virtud del teorema anterior (§ 4.º), todos los demás planos que pasan por m cortarán á la superficie propuesta y á esta cilíndrica según curvas que tienen en el punto del infinito de m un contacto de segundo orden.

Ya demostramos en otro artículo de El Prog. Mat. (v. el núm. 41, correspondiente á Mayo de 1894), que para que dos hipérbolas puedan tener en sus puntos del infinito un contacto de segundo orden, basta que intercepten áreas equivalentes entre las asíntotas y una de sus tangentes, ó sea que tenga en ellas un mismo valor del producto $ab = r^2$ de los semiejes. Por otra parte, la proyección ortogonal de una tangente y de las asíntotas de una sección oblicua de la citada superficie cilíndrica sobre el plano de la sección recta son respectivamente tangente y asíntota de esta sección recta; luego el área que ésta intercepta con sus asíntotas es la proyección ortogonal sobre su plano del área que corresponde á aquella sección oblicua. Por tanto, si designamos por r^2 el valor del área citada que corresponde á una sección normal de la superficie propuesta (perpendicular al plano asintótico μ), por $r_1{}^2$ el que corresponde á una sección oblicua que pasa por la misma asíntota m y por θ el ángulo de los planos de dichas secciones, existe entre r^2 y $r_1{}^2$ la relación sencilla $r^2 = r_1{}^2 \cos \theta$, que tiene alguna remota analogía con la deducida del teorema de Meunier para relacionar los radios de curvatura de la sección normal y la oblicua de una superficie, que son tangentes entre sí en un punto ordinario de una superficie.

CUESTIONES RESUELTAS

CUESTIÓN 223.

(Véase tomo IV, página 311).

Sea un triángulo. Sea Γ_c *la hipérbola equilátera circunscripta á* ABC *y que tiene el medio de* AB *por centro. Sea* Γ'_c *la hipérbola conjugada de* Γ_c.

Demostrar que Γ'_c *pasa por el medio de la parte de la bisectriz que parte de* C, *comprendida entre* C *y* AB.

Llamo dos cónicas conjugadas á dos cónicas que tienen iguales direcciones de ejes, el mismo centro y tales, que los cuadrados de sus ejes sean iguales y de signo contrario.

Solución por el Sr. Retali (V.)

El enunciado precedente no es exacto. La hipérbola Γ'_c pasa por aquellos puntos de la bisectriz (interna ó externa) que son simétricos de C respecto á las asíntotas.

Las cuerdas CA y CB son paralelas á dos diámetros conjugados de la hipérbola equilátera. y por esto las bisectrices de los ángulos en C son paralelas á las asíntotas. Toda paralela á una asíntota corta á las dos hipérbolas equiláteras conjugadas en dos puntos C, C' y á la otra asíntota en el punto medio del segmento CC'. Esto resulta inmediatamente de la simple contemplación de la figura y también como caso particular del teorema siguiente: «Dos cónicas conjugadas son entre sí homológicas armónicamente, cuando se toma uno de los dos puntos de contacto por centro de homología y la tangente en el otro punto de contacto por eje de homología». (*)

CUESTIÓN 201

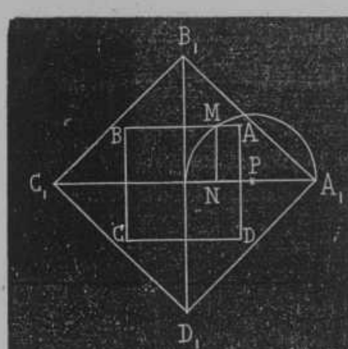
(Véase tomo IV, páginas 207).

Dados dos cuadrados concéntricos y dispuestos de manera que las diagonales del uno sean paralelas á los lados del otro, determinar, con solo los recursos de la Geometría elemental, los ejes de una elipse inscripta al mayor y circunscripta al menor.

(*R. Guimaraes.*)

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

Sea O el centro común de los cuadrados dados ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ de los que el primero está en el interior del segundo. Si la circunferencia descrita sobre OA_1 como diámetro encuentra á AB en M, las rectas A_1M, OM son los semi-ejes buscados.



En efecto: 1.º El círculo director de la elipse encontrará á los ejes en vértices del cuadrado $A_1B_1C_1D_1$, porque se tiene $\overline{OA_1}^2 = \overline{A_1M}^2 + \overline{OM}^2$.

2.º Sea N la proyección de M sobre OA_1, P la intersección de AD, OA_1. En el $\triangle$ rectángulo OMA_1 se tiene $MN.OA_1 = OM.OA_1$ de donde

$$MN^2 (OM^2 + MA_1^2) = OM^2.MA_1^2, \quad MN^2 \left(\frac{1}{MA_1^2} + \frac{1}{OM^2} \right) = 1$$

en fin

$$\frac{OP^2}{MA_1^2} + \frac{AP^2}{OM^2} = 1,$$

es decir, la elipse está circunscripta al cuadrado ABCD.

(*) Véase Retali *Sulle coniche conjugate* (Mem. della R. Acad. delle Sc. di Bologna, serie IV, t. VI, pág. 195). *Osserv. analitico-geometriche sulla projezione imaginaria*, etc. (Ibid tomo VII, pág. 610) *Ricerche sull' immaginario in Geometria* (ibid t. IX, pág. 273).

CUESTIÓN 175

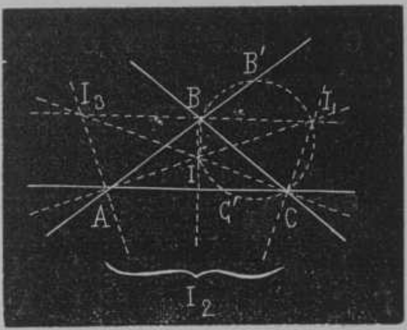
(Véase tomo IV, página 157).

Siendo I, I_1, I_2, I_3 *los centros de los círculos tangentes á los tres lados de un* $\triangle$ ABC, *demostrar las relaciones*

$$AB.AC = AI.AI_1, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BI.BI_2}{CI.CI_3}$$ (*J. Gillet*).

Solución por el Sr. Caro (D. R.)

1.º Es inscriptible el cuadrilátero BICI, por ser rectos sus ángulos B y C. Trazado el círculo, tendremos $AC' \times AC = AI \times AI_1$.



Pero siendo AI bisectriz del ángulo BAC, es evidente que $AC' = AB$, luego $AB.AC = AI.AI_1$

2.º Del mismo modo se deduciría

$BC.BA = BI.BI_2$

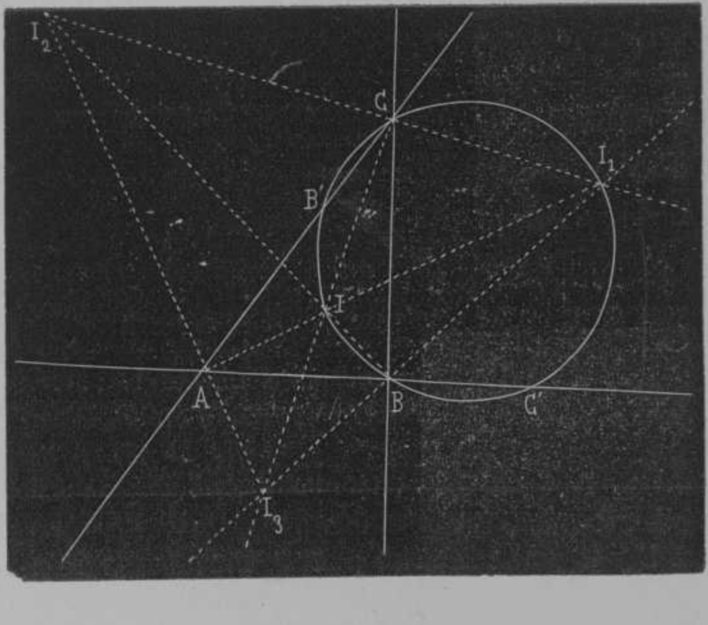
y $CA.CB = CI \times CI_3$

y dividiendo miembro á miembro

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BI.BI_2}{CI.CI_3}$$

Solución por D. Cecilio Jimenez Rueda

1.º El cuadrilátero IBI_1C, que tiene rectos los ángulos opuestos C y B es inscriptible en un círculo de diámetro II_1 en el cual se tiene:



$AI.AI_1 = AB.AC'$ y como $AC' = AC$ por simétrica respecto de AI_1, se tiene $AB.AC = AI.AI_1$.

2.º Análogamente se tiene $AB.BC = BI.BI_2$ y $CA.BC = CI.CI_3$; y dividiendo la una por la otra: $\frac{AB}{AC} = \frac{BI.BI_2}{CI.CI_3}$.

CUESTIÓN 242.

(Véase tomo V, página56).

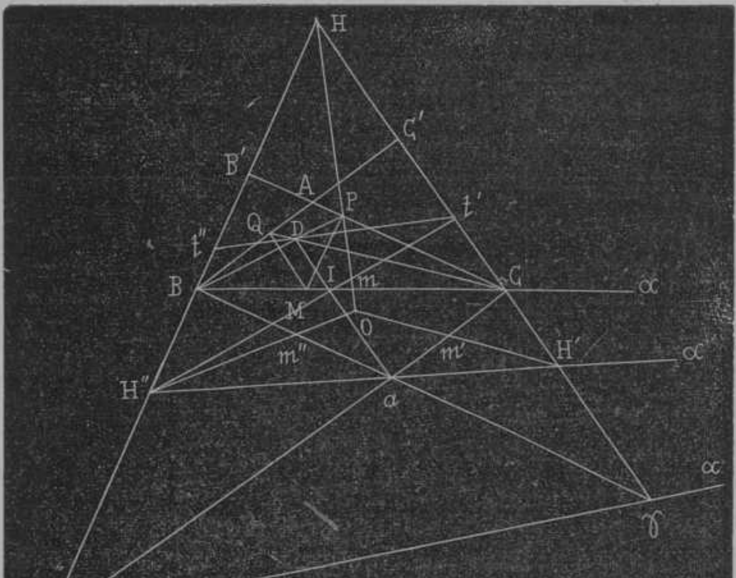
Un punto M *se mueve sobre el lado* BC *de un triángulo* ABC; *sean* P, Q *sus proyecciones sobre* AC AB. *Las rectas* BP, CQ *se cortan en un punto* D. *Demostrar que* D *describe una cónica* Σ_a *que es tangente en* B *y* C *á las alturas* BB', CC' *del triángulo* ABC. Σ_a *pasa por el simétrico de* A *con respecto al medio de* BC.

Construir la tangente en un punto y el centro de Σ_a -

(*J. Neuberg*).

Solución geométrica por el Sr. KLOMPERS (T.), profesor de matemáticas en el Ateneo de Amberes.

Mientras que el punto M se mueve sobre BC, sus proyecciones P, Q sobre los lados del ∠ A engendran dos puntuales proyectivas;



las rectas BP, CQ son los rayos homólogos de dos haces proyectivos de vértices B y C, y se cortan en puntos situados sobre una cónica.

La altura BB′ considerada como rayo del primer haz tiene por homólogo en el segundo la recta CB; la cónica Σ_a es tangente á BB′ en el punto B; igualmente la altura CC′ corresponde á BC, y por esta razón CC′ es tangente á la curva en el punto C. Cuando el punto M pasa al infinito en BC, BP y CQ son respectivamente paralelas á CA y BA. De esto resulta que el cuarto vértice a del paralelogramo construido sobre los lados del ángulo A pertenecen á la cónica.

Construcción de la tangente en el punto a.—Se sabe, según el teorema de Pascal, que si se prolongan los lados de un triángulo aBC inscripto en una cónica, hasta su intersección con las tangentes en los vértices opuestos á estos lados, los puntos de intersección α, β, γ son colineales.

Se determinarán pues los puntos β, γ intersecciones de los pares de rectas (BB′, Ca), (CC′, Ba); la recta $\beta\gamma$ encuentra á BC en α, αa es la tangente en el punto a.

Tangente en un punto cualquiera D.—Consideremos el cuadrilátero t'H′H″t'' circunscripto á la cónica formado por las rectas BB′, CC′, $a\alpha$ que se cortan en los vértices del triángulo HH′H″ y la tangente desconocida $t't''$. Se sabe, según el teorema de Brianchon, qne las rectas Da, BC, t'H″, t''H′ son concurrentes en un punto I. Esto sentado, para construir la tangente en el punto D, bastará unir Da que encuentra á BC en el punto I; H′I y H″I determinan sobre BB′ y CC′ los puntos t' y t'' pertenecientes á la tangente buscada.

Construcción del centro.—Es el punto de intersección de las rectas Hm, H′m', H″m'' que unen los vértices del triángulo HH′H″ á los medios m, m', m'' de los lados del triángulo BCa.

CUESTIÓN 232.

(Véase tomo IV, página 343).

Sea O *el centro del círculo circunscripto al triángulo* ABC.

Los focos A′,B′,C′ *de las tres parábolas que tocan á los lados del triángulo* ABC *y que tienen por directriz el tercer lado estan respectivamente situados sobre las rectas* AO, BO, CO *y también sobre las circunferencias* BOC, COA, AOB. *Los parámetros de las tres parábolas son iguales á*

$$\frac{2\text{R sen } 2\text{B sen } 2\text{C}}{\cos \text{A}}, \quad \frac{2\text{R sen } 2\text{C sen } 2\text{A}}{\cos \text{B}}, \quad \frac{2\text{R sen } 2\text{A sen } 2\text{B}}{\cos \text{C}}$$

Las tangentes en los vértices de estas curvas forman un triángulo perspectivo con ABC, *siendo las coordenadas normales del centro de pers-*

pectiva inversamente proporcionales á las cantidades sen 2A cos A, sen 2B cos B, sen 2C cos C.

Las distancias OA′, OB′, OC′ *tienen por valores*

$$\frac{R\cos(B-C)}{\cos A},\quad \frac{R\cos(C-A)}{\cos B},\quad \frac{R\cos(A-B)}{\cos C}$$

(*J. Neuberg.*)

Solución por el Sr. Brocard (H).

La parábola tangente á AB y á AC y que tiene por directriz BC tiene su eje perpendicular á BC. Sea AH la altura trazada por el vértice A. En el triángulo AHC se tiene CAH = 90 — C; pero BAO = 90 – C. Los dos triángulos CAH, BAO siendo iguales, y siendo AH paralela al eje de la parábola, se concluye, por un teorema de Poncelet, que AO pasa por el foco A′.

Se tiene, pues, que determinar el foco A′ de una parábola conociendo la directriz BC y dos tangentes AB, AC.

Sea J el punto diametralmente opuesto á A sobre el círculo ABC. El punto A′ estará, por definición, en la intersección de las rectas CA′, BA′, que forman con CJ, BJ ángulos iguales á los de AC, AB con las paralelas al eje, ó iguales á los complementos de los ángulos C, B. Pero esta condición define precisamente las bisectrices de los ángulos BCA′, CBA′, porque BCJ = 90 — C = JCA′ = CAH. Se tiene pues A′ = 180 — A′BC – A′CB = 180 – 2 (90 – C) — 2 (90 — B) = 2C + 2B – 180 = 2 (180 — A) — 180 = 180 — 2A

Pero COB = 2A. Siendo los ángulos BA′C, COB suplementarios, el cuadrilátero BOCA′ es inscriptible á un círculo y A′ está en la intersección de OA con la circunferencia COB, como se ha dicho en el enunciado.

Las diversas longitudes indicadas son fáciles de evaluar. El ángulo BOC, por ejemplo, = 2A, y si D es el medio de BC, se tiene OD = OC cos DOC = R cos A. Sea OA_1L el diámetro del círculo A_1. El triángulo OCL rectángulo en C da inmediatamente $OC = 2OA_1 \cos A$, ó $OA_1 = \dfrac{R}{2\cos A}$. El triángulo OA′L rectángulo en A′ da

$$OA' = 2R\cos A'OL.$$

Pero $$A'OL = BOA_1 - BOA' = A - (180 - 2C),$$

luego $$OA' = 2R\cos(A + 2C - 180) = \frac{R}{\cos A}\cos(B - C).$$

Siendo V la proyección de A′ sobre BC,

se tiene $$A'V + OD = OA'\cos(B - C),$$

luego $$A'V = \frac{R\cos^2(B-C)}{\cos A} - R\cos A = \frac{R}{\cos A}\operatorname{sen} 2B \operatorname{sen} 2C$$

Los triángulos A'B'C', ABC tienen el mismo centro de homología que el triángulo ABC y el triángulo de las tres tangentes en los vértices de las parábolas, porque estas tres tangentes son paralelas á los lados de los triángulos ABC, A'B'C' y se hallan á iguales distancias de estas rectas.

Consideremos el vértice C'' del triángulo de que se trata. Este punto tendrá por coordenadas normales

$$\frac{R}{\cos A} \text{ sen } 2B \text{ sen } 2C, \frac{B}{\cos B} \text{ sen } 2A \text{ sen } 2C.$$

Por consiguiente las tres rectas AA'', BB'', CC'' tienen por ecuaciones

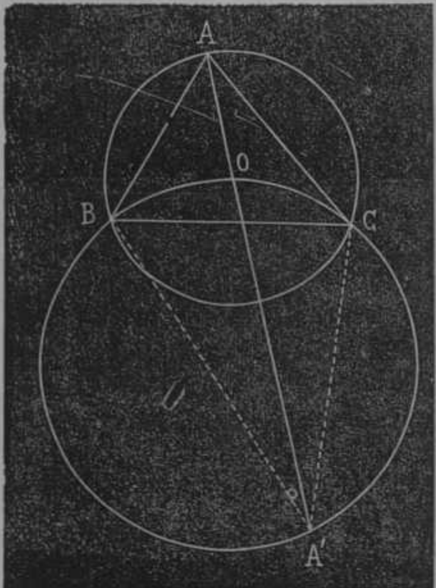
$$\frac{\alpha \cos A}{\text{sen } 2B} = \frac{\beta \cos B}{\text{sen } 2A} \text{ etc.}$$

ó $\qquad \alpha \text{ sen } 2A \cos A = \beta \text{ sen } 2B \cos B = \gamma \text{ sen } 2C \cos C$

Estas tres rectas concurren en el punto cuyas coordenadas normales son inversamente proporcionales á sen 2A cos A, etc.

Solución por el Sr. Sollertinski. (B.)

Siendo A' el foco de una parábola BC la directriz, las tangentes trazadas desde B y C son las bisectrices de los ángulos A'BC, A'CB y, por consiguiente, se encuentran en los cuatro centros inscriptos al triángulo A'BC.



Siendo A uno de los centros, el centro O del círculo ABC debe estar en el medio del arco BC del círculo A'BC, y el punto A está situado sobre la recta A'D.

El semi-parámetro p_a de la parábola, es decir, la distancia de A' á BC es igual á $\frac{A'B.A'C}{2R'}$, designando R' el radio del círculo A'BC. Pero se tiene

$$2R' = \frac{BC}{\text{sen } BOC} = \frac{2R \text{ sen } A}{\text{sen } 2A} = \frac{R}{\cos A},$$

$$\frac{A'B}{2R'} = \text{sen } BOA' = \text{sen } 2C;\ A'C = 2R' \text{ sen } A'OC = \frac{R}{\cos A} \text{ sen } 2B$$

$$\text{luego } p_a = \frac{\text{R sen 2B.sen 2C}}{\cos \text{A}}$$

La distancia OA′ = 2R′. sen OBA′,
pero

$$\angle \text{OBA}' = \angle \text{OBC} + \angle \text{COA}' = 90^\circ - \text{A} + 180^\circ - 2\text{B} = 90^\circ - (\text{B} - \text{C})$$

$$\text{luego } \text{OA}' = \frac{\text{R} \cos (\text{B} - \text{C})}{\cos \text{A}}$$

Sea $\alpha\beta\gamma$ el triángulo formado por las tangentes en los vértices de las parábolas. A causa de las paralelas, las distancias x, y, z del centro de homotecia de los Δ^s ABC, $\alpha\beta\gamma$ á los lados de ABC son proporcionales á las distancias entre los lados correspondientes de los triángulos, es decir, á los cuartos de los parámetros; se tendrá pues, después de haber suprimido el factor común $\frac{1}{2}$R sen 2A sen 2B sen 2C,

$$x : y : z = \frac{1}{\cos \text{A sen 2A}} : \frac{1}{\cos \text{B sen 2B}} : \frac{1}{\cos \text{C sen 2C}}$$

CUESTIÓN 211

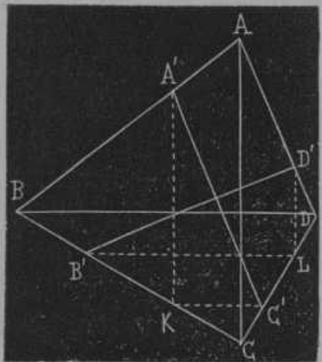
(Véase tomo IV, pag. 279)

Los puntos que dividen los cuatro lados de un pseudocuadrado en una misma razón son los vértices de un pseudocuadrado.

(*H. Van Aubel*)

Solución por el Sr. Sollertinsky (B.)

Sean A′, B′, C′, D′ los puntos que dividen los lados de un pseudocuadrado en una razón dada; K, L los simétricos de B′,C′ con relación á los medios de BC y CD.



Siendo paralelas las rectas A′K y B′L á AC y BD, se tiene

$$\frac{\text{A'K}}{\text{AC}} = \frac{\text{BK}}{\text{BC}}, \quad \frac{\text{B'L}}{\text{BD}} = \frac{\text{CB'}}{\text{CB}}$$

de donde A′K = B′L. Igualmente KC′ = LD′

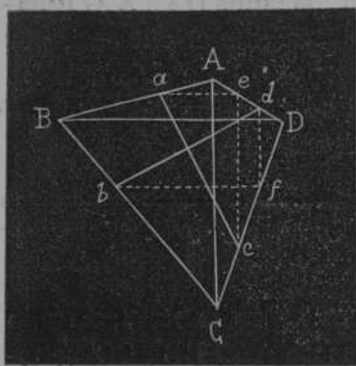
Siendo los lados A′K y B′L, KC′ y LD′ de los triángulos A′KC′ y B′LD′ iguales y perpendiculares, lo mismo sucede á sus terceros lados A′C′ y B′D′.

Observación. *Si se hace variar la relación* $\frac{\text{A'A}}{\text{A'B'}}$, *la intersección de las rectas* A′C′, B′D′ *describe una estrofoide* (recta).

Solución por el Sr. Iturralde (D. M.)

Tenemos

$$Aa = \frac{AB}{r};\ 3b = \frac{BC}{r};\ Cc = \frac{CD}{r};\ Dd = \frac{DH}{r}$$



Se va á demostrar que las rectas *ac* y *bd* son iguales y perpendiculares.

Desde *a* tracemos la paralela á BD y desde *c* la paralela á AC. Es fácil demostrar que estas dos rectas se cortan en ángulos rectos en un punto *e* del lado AD(*).

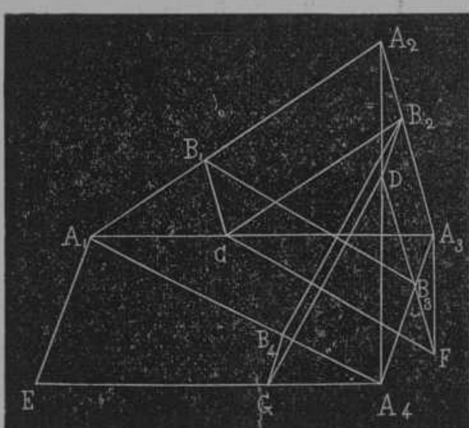
Del mismo modo la paralela á AC desde *d* y la paralela desde *b* á BD se cortan en ángulo recto en un punto *f* de DC,

$$\left.\begin{array}{l} bf = \dfrac{(BD)\,(r-1)}{r};\ ec = \dfrac{(AC)\ r-1)}{r} \\[2ex] ae = \dfrac{BD}{r};\ df = \dfrac{AC}{r} \end{array}\right\}\ \text{y como } AC = BD;\quad \begin{array}{l} bf = ce \\ ac = df \end{array}$$

$\triangle$ *ace* y $\triangle$ *dbf* tienen los catetos iguales y perpendiculares entre sí luego las hipotenusas *ac* y *bd* son iguales y perpendiculares.

Solución por el Sr. H. Van Aubel

Sean B_1, B_2, B_3, B_4 puntos que dividen en la misma razón los lados del pseudo-cuadrado $A_1A_2A_3A_4$.



Tracemos B_1C paralela á A_2A_3, B_2D paralela á A_3A_4, construyamos los paralelógramos $A_1A_3A_4E$, DA_2A_3F, tracemos B_4G paralela á A_1E y unamos GF, DG. Es visible que $B_1CB_2A_2$ es un paralelógramo, y como, á causa de la igualdad de los triángulos A_2B_2D, FB_3A_3 los lados paralelos A_2B_2, B_3F son iguales, B_1CFB_3 es también un paralelogramo.

Se tiene enseguida

(*) Pues si *e'* fuese el punto en que la paralela desde *c* encontrase á AD, se tendría

$$\frac{aA}{AB} = \frac{Ae}{AD},\quad \frac{cC}{CD} = \frac{Ae'}{AD}\ \text{y}\ \frac{aA}{AB} = \frac{Ae'}{AD}$$

es decir que *e* y *e'* se confunden.—*L. R.*

$B_4G: A_1E = A_4B_4: A_4A_1 = A_2B_2: A_2A_3$ y $B_2D: A_3A_4 = A_2B_2: A_2A_3$ de donde $B_4G = B_2D$. Siendo estas dos rectas paralelas, el cuadrilátero B_2DCB_4 es un paralelogramo.

Ahora, los triángulos DA_4G, CA_3F tienen los lados DA_4, A_4G iguales y perpendiculares á CA_3, A_3F y semejantemente orientados, por consiguiente el lado DG ó B_2B_4 es igual y perpendicular á CF ó B_1B_3.

Observación. También ha remitido una solución analítica el señor Caro y una análoga á las anteriores el Sr. Bozal.

CUESTIONES PROPUESTAS

241 (*). Si una transversal corta á los tres lados de un triángulo ABC en A′, B′, C′ y sobre las prolongaciones de AA′, BB′, CC′ se toman los puntos D, E, F tales que

$$\frac{AD'}{AA'} = \frac{B'E}{BB'} = \frac{C'F}{CC'} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$$

el área del triángulo DEF será igual á 1, 3, 6, 10, 15..... veces el área del triángulo ABC.

241 bis. Si una transversal corta á los tres lados de un triángulo ABC en A′, B′, C′ y sobre las prolongaciones A′A, B′B, C′C se toman los puntos D′, E′, F′ tales que

$$\frac{AD'}{A'A} = \frac{BE'}{B'B} = \frac{CF'}{C'C} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}. 2, \frac{5}{2}, \ldots$$

el área del triángulo D′E′F′ será igual á 3, 6, 10, 15, 21.... veces el área del triángulo ABC.

(H. Van Aubel).

243. Sean O una circunferencia fija de radio OB, C una circunferencia móvil de radio CB; A, M puntos de estas dos circunferencias; OD el radio que pasa por el punto M. Siendo A la posición inicial de M, la epicicloide engendrada por el punto M puede asimilarse á una cicloide, considerando la circunferencia fija como base. Entonces el punto M tiene por coordenadas $x = AD$, $y = MD$.

Se propone buscar qué forma tomará la ecuación de la epicicloide en el nuevo sistema de coordenadas. Señalar las ventajas que puede ofrecer su adopción.

(H. Brocard.)

(*) Por haberse publicado incompleto el enunciado de esta cuestión hoy se reproduce corregido y completado.

244. En un plano se dan una recta g y cuatro puntos A, B, C, D. Hallar un punto S tal, que la proyección central de los cuatro puntos desde S sobre g forme una serie de distancias iguales.

(*F. Meyer.*)

245. Se dan seis puntos del espacio, por los que se debe trazar un cilindro de segundo grado de modo que no se hallen dos de los puntos en un lado.

(*J. Meyer.*)

246. Una curva plana Ca tiene m asíntotas reales á distancias finitas. Se la transforma por inversión respecto á un punto X de su plano. Este punto es entonces un punto múltiple de orden m de la transformada T. Demostrar:

1.º Que hay una infinidad de puntos X tales, que dos de las ramas de T que pasan por X tengan en este punto el mismo radio de curvatura; indicar el lugar geométrico de estos puntos.

2.º Que hay $\frac{2m(m-1)(m-2)}{3}$ puntos X tales, que tres de las ramas de T que pasan por X tengan en este punto el mismo radio de curvatura; determinar estos puntos.

3.º Que en general, no existe punto X tal, que cuatro de las ramas de T que pasan por X tengan en este punto el mismo radio de curvatura.

4.º Que existen curvas C tales, que las m ramas de T que pasan por X tengan en este punto el mismo radio de curvatura. Indicar la naturaleza de estas curvas y determinar la posición del punto X que en este caso es único.

(*C. A. Laisant.*)

247. Si en un triángulo ABC se tiene:

$$a^2(\text{sen A} + \cos \text{A}) + bc = 0$$

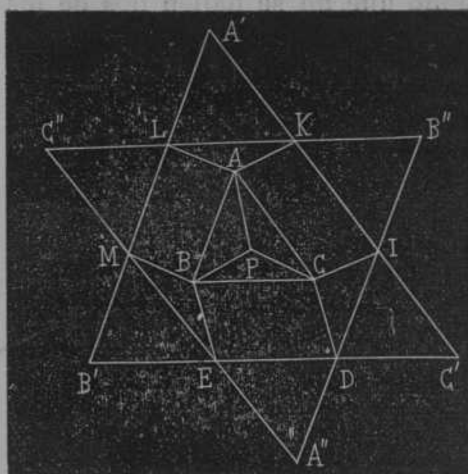
la recta que une el vértice A al centro del cuadrado construído exteriormente sobre BC será perpendicular en el medio de la recta de Brocard.

(*H. Van Aubel*)

248. Las simétricas de las alturas de un triángulo respecto á las mediatrices se cortan en un punto que goza de la propiedad de que los triángulos que tienen este punto por vértice y por bases respectivas los tres lados del propuesto, son equipotenciales (igual la suma de los cuadrados de los lados).

(*Juan J. Durán Loriga.*)

249. Sea P un punto cualquiera tomado en el interior del triángulo ABC. En el exterior de este triángulo se construyen los paralelogramos BCDE, CAKI, ABML en los cuales los lados CD y BE, AK y CI, BM y AL son respectivamente iguales y paralelos á las rectas AP, BP, CP. Las rectas ED, IK, LM suficientemente prolongadas forman un triángulo A'B'C'. Tambien las rectas LK, ME, DI forman un triángulo A″B″C″.



1.º El exágono KLMEBI vale seis veces el △ ABC.

2.º P es el centro de gravedad de los △ˢ EIL, DKM, A'B'C', A″B″C″

3.º Los lados de los △ˢ A'B'C', A″B″C″ son paralelos á los de ABC é iguales á los triplos de estos lados.

4.º Las rectas AA″, BB″, CC″ pasan por los centros X, Y, Z de los paralelogramos BCDE, CAKI, ABML y se cortan en un punto J″.

5.º Las rectas AA', BB', CC' se cortan en un punto J'.

6.º Los puntos J″ y J' dividen la recta GP aditiva y sustractivamente en la razón 1 : 3 (G es el centro de gravedad de ABC).

(*J. Neuberg*).

250. Sean A', B', C' los puntos en que las rectas trazadas desde los vértices de un triángulo ABC al punto de Lemoine encuentran á los lados opuestos. Demostrar que las rectas que unen los medios de los lados á los medios de AA', BB', CC' concurren en el medio de la recta de Brocard.

(*H. Van Aubel*).

ERRATAS.—En la página 64 suprímase la última línea. En la página 86, línea 6, cámbiense los términos de los quebrados.

—En la página 93, línea 21, suprímase «que son». Idem línea 22, en vez de «una superficie», póngase «la misma».

Zaragoza.— Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos.