

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

A NUESTROS LECTORES

El hecho de la supresión de las Facultades de Ciencias en las Universidades de Granada, Sevilla, Valencia y Zaragoza y de la reducción de la enseñanza matemática en los Institutos con motivo de economías es ya sobradamente conocido de nuestros lectores.

No creyéndonos en el caso de insistir sobre este suceso, de que ya han tratado varios periódicos de índole distinta que el nuestro, nos limitamos á consignarlo, puesto que además de que el tal hecho no puede ser más que pasajero, en nuestro artículo, hace tiempo anunciado, *Estudios sobre la enseñanza y el organismo de la ciencia matemática*, nos ocuparemos detenidamente de este menosprecio y abandono con que en España se ha tratado á las ciencias matemáticas y del contraste que el cultivo de las mismas en nuestro país forma con el floreciente estado de las mismas en las naciones más adelantadas y más prósperas.

Nos basta, al par que lamentamos tan infausto acontecimiento, manifestar por ahora que EL PROGRESO MATEMÁTICO proseguirá, como desde el comienzo de su publicación, su obra de propaganda de esta ciencia cuya importancia es innecesario encarecer.

Z. G. DE G.



LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

(Véase t. I, págs. 223, 269 y 317)

(CONCLUSIÓN)

Habiéndose llegado á estas alturas, M. Neuberg, volviendo á considerar la cuestión 1166 y la resolución de M. Chadeu, presintió con

gran perspicacia la trascendental importancia de este estudio, y los hechos han confirmado sus palabras (N. C. M. 1879, pág. 446) «El problema de que M. Brocard ha obtenido una multitud de resultados interesantes, parece ser una mina inagotable de deducciones matemáticas. En efecto, véanse algunos desarrollos nuevos que me contento con bosquejar» y partiendo de ciertas fórmulas obtenidas por M. Chady (N. A. M. 1875, p. 286), agregó á ellas las proposiciones siguientes:

- 1.º El punto Ω es el baricentro de tres masas $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ aplicadas respectivamente á los puntos C, A, B.
 2.º El ángulo ω satisface á las relaciones

$$\sum \frac{\text{sen}(B - \omega) \text{sen}(C - \omega)}{\text{sen} B \text{sen} C} = 1$$

y $\text{cosec}^2 \omega = \text{cosec}^2 A + \text{cosec}^2 B + \text{cosec}^2 C$.

3.º Las rectas $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ dividen los lados del triángulo en segmentos proporcionales á los cuadrados de dos lados (observación hecha ya por M. Catalán).

Pero cuando aparecían estas líneas, M. H. Brocard, justificando las previsiones de M. J. Neuberg, dirigía á M. E. Catalán la conclusión de sus estudios, estableciendo que los siete puntos O, centro del círculo ABC; Ω , Ω' ; A_1 , B_1 , C_1 y K, punto de intersección de las paralelas A_1K , B_1K , C_1K , á los lados del triángulo ABC, se encuentran en una misma circunferencia de diámetro OK y circunscripta á los triángulos isósceles $\Omega O \Omega'$, $\Omega K \Omega'$. (N. C. M. 1880, pags. 21-23 y 98-100).

El punto K así definido, tiene pues, por coordenadas normales $\frac{a}{2} \text{tg } \omega$, $\frac{b}{2} \text{tg } \omega$, $\frac{c}{2} \text{tg } \omega$, es decir, cantidades proporcionales á las longitudes de los lados a , b , c , siendo por tanto, en definitiva, el punto correspondiente al centro de gravedad en la *transformación por rectas simétricas*, ó de otro modo, es el *centro de las medianas antiparalelas*, cuyo importantísimo estudio había proseguido con tan fecundos resultados M. Lemoine, desde 1873. Uno de los más notables entre estos, era la noción de la circunferencia que pasa por los seis extremos de las paralelas á los lados del triángulo, trazadas por el punto K, y á la que se ha dado el nombre de *círculo de Lemoine* (Prog. Mat. I, p. 80).

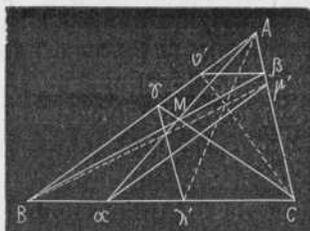
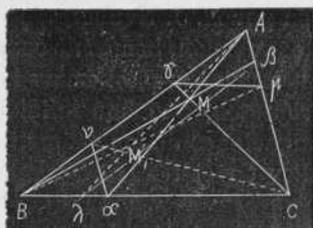
Pero el interés de esta nueva teoría ha estribado en correlación íntima que existe, por una parte entre los puntos K, Ω , Ω' y por otra entre los dos círculos precitados.

- 1.º Todo punto M de un triángulo da origen á dos puntos conju-

gados que M. Lemoine ha propuesto designar con las denominaciones de *punto directo* y de *punto retrógrado*.

La transformación que debe hacerse para llegar á este resultado es la siguiente (*Congrès de Grenoble*, 1885):

Sean α , β , γ las intersecciones de AM, BM, CM con los lados opuestos.



Por los puntos α , β , γ tracemos paralelas á los otros dos lados, que determinarán respectivamente sobre CA, AB, BC los puntos μ , ν , λ ; sobre BA, AC, BC puntos ν' , μ' , λ' , según que se haya seguido el perímetro en el sentido ABC (directo) ó BA (retrógrado).

Esto sentado, las rectas $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ por una parte, $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$ por otra se encuentran en dos puntos M_1 , M_2 que son los puntos directo y retrógrado derivados del punto M.

En el caso en que el punto inicial M es el punto K de Lemoine, los dos conjugados son los puntos de Brocard Ω , Ω' .

2.º Los círculos de Lemoine y de Brocard tienen el mismo centro, el medio Z del segmento OK, diámetro del círculo de Brocard.

La transformación por rectas simétricas, estudiada más atentamente da á su vez origen á nuevas propiedades geométricas entre las que basta consignar:

1.º Las relaciones de situación entre los grupos de puntos conjugados ($\Omega\Omega'$) (GK) (OH) (DD') (ZZ') (SS') etc.; en los que debe notarse: el paralelismo de ciertas líneas HD, GZ', OZSKD'; la convergencia de algunas otras OD, GZ, Z'K, HD' que concurren en el punto N de Tarry, diametralmente opuesto al punto R de Steiner (*Prog. mat.* I; págs. 138 y 193) en la circunferencia ABC; la homología de los triángulos ABC, A'B'C'; la perpendicularidad de sus ejes de homología Ξ al diámetro RDON, etc.

En lo que precede, S es el medio de $\Omega\Omega'$; H el ortocentro; D' el polo de $\Omega\Omega'$ en el círculo OZK; D el centro de homología de los dos triángulos ABC, A₁B₁C₁, S la intersección de GD' y de ZH, etc., etc. (Brocard. *Congrès de Rouen*, 1883).

2.º El estudio de la hipérbola Γ de Kiepert transformada de la

recta OK (Brocard, J. S., 1885. M'Cay, *Mathesis*, 1887, *PROG. MAT. I*, 193).

3.º El estudio de la hipérbola Γ' de Jerabek, transformada de la recta de Euler OGH (Jerabek. *Mathesis*, 1888).

4.º El estudio, por M. R. Tucker, de la agrupación muy variada de triángulos definidos por varias propiedades comunes que poseen, por ejemplo, el mismo ángulo ω , etc., etc.

Este asunto ha sido tratado también por M. J. Neuberg.

Proponiéndonos abreviar nuestra exposición, hemos de concretarnos á ir indicando algunas de las contribuciones publicadas hasta la actualidad sobre la Geometría del triángulo, que han influido para orientar en cierta dirección las investigaciones de los geómetras.

Así, se ha ofrecido la idea de hallar en el tetraedro propiedades análogas á las del triángulo.

Es sabido cuán engañosas son dichas analogías, habiéndose considerado, con razón, no un tetraedro cualquiera, sino cierto tetraedro particular del que M. Neuberg hace un estudio muy detallado en su importante *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884, que señala el punto de partida de una nueva evolución en la Geometría del tetraedro, así como expusimos anteriormente (*PROG. MAT. I*, pág. 135).

Como testimonio de que se han realizado durante estos últimos años loables tentativas para establecer teorías generales sobre la base que ofrecían los resultados particulares á que en su principio se había llegado, citaremos que:

1.º M. G. Tarry, por una concepción atrevida, dilató los dominios de la Geometría del triángulo, considerando á éste como ligado á figuras semejantemente variables; y entonces el círculo de Brocard es el círculo de semejanza que pasa por los tres puntos dobles A'' , B'' , C'' , vértices del *segundo triángulo de Brocard* (*PROG. MAT. I*, 81).

Estos puntos A'' , B'' , C'' , se encuentran en la intersección del círculo con las simedianas AK, BK, CK.

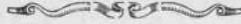
Este asunto, expuesto en la Memoria de M. Brocard (*Congrès d'Alger*, 1881), ha obtenido nuevos desarrollos en *Mathesis* (1882, pág. 73) en la obra de J. Casey *A treatise on conic sections* (1885) y en la 5.ª edición de *A Sequel to Euclid*, del mismo autor (1888), traducida y publicada poco há en *Mathesis* (1889) por M. Falisse (*PROG. MAT. I*, 72).

2.º M. R. Tucker ha extendido ingeniosamente las propiedades del triángulo al cuadrilátero inscriptible tal, que uno de sus puntos se halle á distancias proporcionales de los lados, es decir, lo que más generalmente se ha llamado un *polígono armónico*, habiéndose hecho la generalización completa por MM. G. Tarry y Casey (*ídem ídem* y *PROG. MAT. I*, p. 81, 191).

3.º M. McCay ha mostrado la conexión de ciertos círculos con tres nuevos puntos A''' , B''' , C''' , vértices del *tercer triángulo de Brocard* (J. Casey. *Conic sections*, pá. 253).

Estos nuevos puntos de vista han sido también explorados por otros geómetras, especialmente los señores Schoute, Neuberg, Tucker, H. Taylor, que se han dedicado á investigar á qué redes ó grupos de círculos debían pertenecer los de Lemoine y Brocard.

Z. G. DE G.



NOTA MATEMATICA

Sobre las funciones simétricas simples (suma de potencias) de las raíces de una ecuación.

POR D. JUAN J. DURAN LORIGA

Capitán de Artillería.

Es bien sabido que el procedimiento clásico para la determinación de la suma de potencias semejantes de las raíces de una ecuación es el llamado método de Newton. En la presente nota nos proponemos llegar á las expresiones á que dicho método conduce, más rápidamente que por el procedimiento usual, y sin necesidad de recurrir á la teoría de derivadas.

Sentemos como preliminar que, cuando se conoce la suma de varias cantidades y la de sus productos binarios, se puede determinar la suma de sus cuadrados como diferencia entre el cuadrado de la suma y el doble de dichos productos; el conocimiento de la suma de las cantidades, la de los productos binarios y la de los ternarios permite encontrar la suma de cubos, y en general, la suma de cantidades, suma de productos binarios, ternarios, etc., hasta los de k en k , proporciona el conocimiento de la suma de potencias del grado k . La forma que afecta la potencia k de un polinomio, hace ver claramente este hecho.

Resulta, por consiguiente, que si dos ecuaciones tienen iguales los dos, tres, cuatro, etc., primeros coeficientes, las sumas de raíces, las de productos binarios, ternarios, etc., tendrán que ser iguales, y que la determinación en una ecuación del grado n de la suma de potencias k (siendo $k < n$) de sus raíces, equivale á la misma obtención en una ecuación del grado k que tenga sus $(k + 1)$ coeficientes idénticos á los del mismo lugar en la propuesta. La investigación, pues, de las funciones simétricas simples de las raíces de una ecuación, hasta un grado igual al de ésta, queda reducida en todos los casos á la siguiente:

Dada una ecuación del grado n , encontrar la suma de potencias del mismo grado de sus raíces.

Sea la ecuación:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

sustituyendo en ella las raíces $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, tendremos

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \dots + a_{n-2} x_1^2 + a_{n-1} x_1 + a_n = 0$$

$$x_2^n + a_1 x_2^{n-1} + a_2 x_2^{n-2} + \dots + a_{n-2} x_2^2 + a_{n-1} x_2 + a_n = 0$$

.....

$$x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + a_2 x_n^{n-2} + \dots + a_{n-2} x_n^2 + a_{n-1} x_n + a_n = 0$$

Sumando miembro ó miembro, resulta la expresión conocida:

$$S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_{n-2} S_2 + a_{n-1} S_1 + a_n S_0 = 0 \quad (1)$$

en la que las cantidades S_0, S_1, S_2 , etc., tienen la significación conocida.

En virtud de lo que llevamos dicho, podemos dar á n los valores $n = 1, 2, 3$, y obtendremos:

$$S_1 + a_1 = 0$$

$$S_2 + a_2 S_1 + 2a_2 = 0$$

$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0$$

.....

puesto que S_0 toma los valores 1, 2, 3, etc., en las distintas hipótesis que hemos hecho.

Para calcular la suma de potencias de grado superior al de la ecuación, nos bastará sustituir en la expresión (1) y en los subíndices de S en vez de n los valores $(n + 1), (n + 2)$, etc., puesto que esto equivaldría á aplicar el procedimiento á las ecuaciones que se obtendrían multiplicando la propuesta por x, x^2, x^3, \dots

Para obtener la suma de potencias negativas, observaremos que podemos aplicar la expresión (1) á la ecuación cuyas raíces son recíprocas de las de la propuesta, y como en la transformación se cam-

bien los coeficientes equidistantes, habrá que efectuar igual cambio en la citada expresión, con lo que se obtendrá

$$a_n S_{-n} + a_{n-1} S_{-(n-1)} + a_{n-2} S_{-(n-2)} \cdots \cdots + a_1 S_{-1} + S_0 = 0 \quad (2)$$

teniendo en cuenta, al dar valores á n , que éstos deben referirse á los subíndices de S y no á los de a_n, a_{n-1}, a_{n-2} etc., que representan sencillamente el último, penúltimo, etc., coeficientes de la ecuación dada.

Debe también observarse que el último sumando en cada caso es el que tenga á S con el subíndice cero. Así, para $n=1, 2, 3$, etc., se obtiene

$$a_n S_{-1} + a_{n-1} = 0$$

$$a_n S_{-2} + a_{n-1} S_{-1} + 2 a_{n-2} = 0$$

$$a_n S_{-3} + a_{n-1} S_{-2} + a_{n-2} S_{-1} + 3 a_{n-3} = 0$$

.....

puesto que S_0 recibe los valores 1, 2, 3, etc., en las distintas hipótesis que hemos sentado.

Finalmente, para obtener la suma de potencias negativas de raíces de grado superior en valor absoluto de la ecuación, se procede con la relación (2) de un modo análogo á lo indicado respecto á la (1) al tratar de potencias positivas.

La Coruña, Mayo de 1892.



NOTA ACERCA DE LOS POLIEDROS DE CUATRO DIMENSIONES

I.—MODELO EN PROYECCIÓN

del prisma de cuatro caras y dimensiones y su descomposición en cuatro pentacélulas (Fünfcelle) de igual capacidad.

Correspondiendo al paralelogramo de dos dimensiones (prisma plano de dos caras) y al prisma de tres caras y tres dimensiones, existe, en el espacio de cuatro dimensiones, un prisma de cuatro caras y cuatro dimensiones, limitado por dos tetraedros, congruentes en espacios paralelos de tres dimensiones, y por cuatro prismas de tres caras.—De igual manera que el paralelogramo puede descomponerse mediante una sección diagonal (línea) en dos triángulos de igual área,

y el prisma triangular en tres tetraedros de igual volumen, por medio de dos secciones diagonales (triángulos), así el prisma de cuatro caras y cuatro dimensiones puede descomponerse en cuatro células pentaédricas (Fünfzelle) de igual capacidad por medio de tres secciones diagonales (tetraedros).—Y, precisamente, de la misma manera que en un plano dos triángulos congruentes cuyos lados son dos á dos paralelos, cuyos lados homólogos se hallan unidos, representan la proyección plana del prisma triangular, también puede obtenerse por una construcción análoga la proyección en el espacio de tres dimensiones, de un prisma de cuatro caras y cuatro dimensiones. Lo mismo puede decirse de la descomposición antes mencionada.

El modelo aquí descrito de esta proyección del prisma de cuatro caras y cuatro dimensiones y su descomposición en cuatro células pentaédricas de igual capacidad, en que las aristas del prisma están representadas, por alambres de latón y las nuevas aristas de los tetraedros sectores, por hilos de seda.

Este modelo tiene por objeto, primeramente, dar ocasión al alumno para ejercitarse en la deducción de analogías rigurosas que conducen de la Geometría de tres dimensiones á la de cuatro, mediante un ejemplo complejo, por la multiplicidad de las figuras que se presentan en él. Por otra parte, puede servir para ejercitarse en el proceso intelectual, por medio del cual deben considerarse las figuras de tres dimensiones, como proyecciones de las de cuatro dimensiones.

II.—MODELOS EN PROYECCIÓN DE LOS DOS ÚLTIMOS CUERPOS REGULARES DE CUATRO DIMENSIONES

Núm. 5.—(*Sechshundertzell*), de 600 celdas, representado por un tetraedro regular descompuesto en 599 tetraedros. El cuerpo contiene 1200 caras, 720 aristas y 120 vértices.

Núm. 6.—(*Hundertwanzigzell*), de 120 celdas, representado por un dodecaedro descompuesto en 519 dodecaedros.—El cuerpo contiene 720 caras, 1200 aristas y 600 vértices.

En el espacio de cuatro dimensiones existen, en correspondencia con los cinco cuerpos regulares del espacio ordinario, seis figuras regulares limitadas por tetraedros, exaedros, octaedros ó dodecaedros, de tal manera, que en cada vértice concurren igual número de aristas, caras y cuerpos, y en cada arista igual número de caras y de cuerpos.

Estas figuras son: 1.^a La de cinco células (*Fünfzell*) limitada por 5 tetraedros.—2.^a La de 8 (*Achtzell*), limitada por 8 exaedros.—3.^a La de 16 (*Sechzehnzell*), limitada por 16 tetraedros.—4.^a La de 24 (*Vierundzwanzigzell*), limitada por 24 octaedros.—5.^a La de 120 (*Einhundertzwanzigzell*), limitada por 120 dodecaedros.—6.^a La de 600 (*Sechshundertzell*), limitada por 600 tetraedros.

Aunque estas figuras son inaccesibles á nuestra percepción, se puede construir proyecciones de ellas en el espacio de 3 dimensiones, que conducen á la representación de los vértices, aristas, caras y cuerpos contenidos en las mismas, de igual manera que una proyección plana puede conducir á la obtención de los vértices, aristas y caras de los poliedros regulares. Estos *cuerpos en proyección* contienen al mismo tiempo la solución de un problema de Estereometría pura, á saber: Descomponer un tetraedro, exaedro, octaedro ó dodecaedro en cuerpos de igual clase, de manera que en cada vértice concurren igual número de aristas, caras y cuerpos, y en cada arista igual número de caras y cuerpos.

Completando la serie de los modelos que representan los cuatro primeros cuerpos de cuatro dimensiones, los modelos arriba descritos corresponden á los dos últimos cuerpos de este género representados en proyección central, en la que el centro de proyección está concebido también de manera que ninguno de los cuerpos limitantes se compenetre con otros y que uno sólo comprenda, como todo, á todos los demás, como sus partes.

También en estos modelos están los cuerpos representados por sus aristas construídas en alambre y seda, de manera que, en general, las aristas límites de cada capa poliédrica son de alambre y de seda de distintos colores las que separan cada una de las capas sucesivas.

Los modelos de los 6 cuerpos regulares fueron presentados por primera vez en el 57º congreso de los naturalistas y médicos alemanes (1884) en Magdeburgo, así como en Darmstadt en la solemnidad de la Escuela superior de esta ciudad.

III

Hemos creído preferible á otras indicaciones que pudiéramos hacer, el traducir literalmente los prospectos en que se anuncian los admirables modelos en proyección de los 6 sólidos de cuatro dimensiones con que el Dr. Schlegel ha enriquecido la Geometría del hiper-espacio.

Ya en otra ocasión (t. I, págs. 38-29) al ocuparnos de la obra *Fon-*

damènti di Geometría, etc., del Sr. Veronese, dimos alguna idea del carácter geométrico que caracteriza la exposición de esta doctrina que conduce de unos á otros espacios por proyecciones sucesivas, á la manera que se procede en el espacio de tres dimensiones, en la Geometría proyectiva ordinaria; y, reservándonos el hacer nuevas indicaciones acerca de la obra del Sr. Veronese, de cuya parte concerniente á los espacios de 4 y de n dimensiones, nos ocuparemos en breve, para terminar nuestra comenzada reseña bibliográfica, hoy vamos á dedicarnos á ultimar las indicaciones contenidas en los prospectos relativos á los modelos del Sr. Schlegel con algunas consideraciones aclaratorias sobre esta teoría, basada en la proyección de los sólidos en el espacio de cuatro dimensiones.

El Dr. Schlegel en su memoria *Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions* ⁽¹⁾, dice:

«Un sólido homogéneo de n dimensiones es regular, si las figuras de $(n-1)$ dimensiones que lo limitan son regulares.»

De aquí se sigue que hay (como se sabe) un número infinito de figuras homogéneas (ó regulares) en el plano, cinco en el espacio ordinario, seis en el espacio de cuatro dimensiones, tres en otro cualquiera espacio ⁽²⁾.»

Supongamos que se propone el siguiente problema: Descomponer un polígono (regular) en figuras análogas (á saber, que tienen el mismo número de aristas que el polígono dado), de manera que en cada vértice se encuentra el mismo número de aristas y de figuras (incluida la figura dada). Entonces, no hay más que las cinco soluciones esencialmente distintas de este problema representadas por las figuras siguientes:

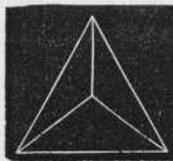


Fig. 1.ª

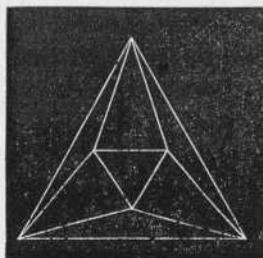


Fig. 3.ª

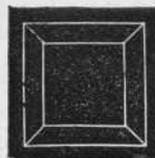


Fig. 2.ª

En efecto: Un triángulo puede descomponerse en 3, 7, 19 triángulos, un cuadrilátero en 5 cuadriláteros, un pentágono en 11 pentágo-

(1) *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (t. V, 1891, p. 1).

(2) Véase su memoria: *Quelques théorèmes de Géom. à n dimensions*. Bull. Soc. math. de France, vol. X,

nos, observándose que el número de aristas que concurren en cada vértice es de tres en las figuras 1, 2, 4, cuatro en la 3 y cinco en la 5.

Supongamos ahora uno de los seis poliedros regulares, huecos, cuyas caras sean transparentes.

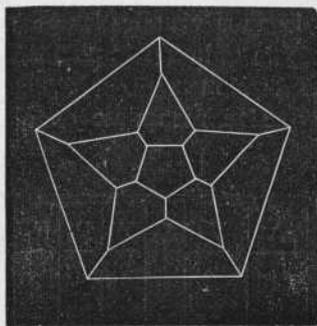


Fig. 4.ª

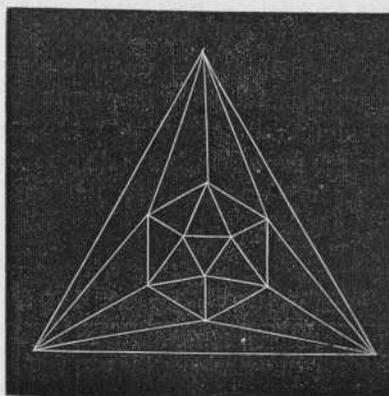


Fig. 5.ª

Si quitamos una de las caras y consideramos el punto de vista (centro de perspectiva) frente al punto medio de esta abertura, para ver el interior de todas las caras, tendremos el mismo aspecto que nos ofrecen las adjuntas figuras, que pueden considerarse como las proyecciones planas de los sólidos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro é icosaedro, y para completar el número de caras del poliedro, basta añadir la figura dada, que puede imaginarse superpuesta al conjunto de las demás.

Debe observarse que estas figuras, así como toda proyección plana de un sólido, ofrecen el aspecto de una figura plana; pero nuestra *imaginación* nos permite ver tres dimensiones donde á simple vista sólo percibimos dos.

Si extendemos el problema al espacio de tres dimensiones, hallamos la cuestión análoga: Descomponer un poliedro regular en sólidos análogos, es decir, con el mismo número de vértices de aristas y de caras que el polígono dado, de manera que en cada vértice se encuentran el mismo número de aristas de caras y de poliedros (incluído el poliedro dado).

Las soluciones al problema, en este caso, son las seis representadas por los modelos de que estamos tratando.

En efecto, según las investigaciones del Dr. Schlegel, resulta que un tetraedro se puede descomponer en 4, 15, 599 tetraedros, un exaedro en 7 exaedros, un octaedro en 23 octaedros, un dodecaedro en 119

dodecaedros, no siendo el icosaedro susceptible de tal descomposición.

Análogamente se pueden considerar estas figuras como las proyecciones de tres dimensiones de las seis figuras que es preciso distinguir con la denominación de *sólidos regulares de cuatro dimensiones*, con la sola diferencia ineludible é inherente á nuestra naturaleza, de que no disponemos de una imaginación susceptible de suplir y de representarnos, al percibir por nuestros órganos visuales las proyecciones de tres dimensiones, hecho después de todo sin importancia ó indiferente para los efectos de nuestras deducciones.

Los caracteres de dichos poliedros pueden resumirse en el siguiente cuadro:

NOMBRES	P	C	A	V	A _s	F _s	P _s	F _a	P _a
Pentaédroïde (Fünfzell)	5	10	10	5	4	6	4	3	3
Octaédroïde (Achtzell)	8	24	32	16	4	6	4	3	3
Hexadécaédroïde (Sechzehnzell).	16	32	24	8	6	12	8	4	4
Icosatétraedroïde (Vierundzwanzigzell)	24	96	96	24	8	12	6	3	3
Hekatonikasaédroïde (Hunderfzwanzigzell)	120	720	1200	600	4	6	4	3	3
Hexakosioédroïde (Schshundertzell)	600	1200	720	120	12	30	30	5	5

A_s indica el número de aristas, F_s el de caras, P_s el de los poliedros que se encuentran en un vértice, F_a el de las caras, P_a el de los poliedros que se encuentran en una arista.

IV.—LITERATURA DE LOS SÓLIDOS DE MÁS DE TRES DIMENSIONES

W. I. Stringham, Regular figures in n-dimensional space (American Journ. of Math. III. 1888).

H. Scheffler, Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen (Braunfchweig, Vieweg 1880).

R. Hoppe, Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen (Grunert's Archiv, LXVII, 1881).

V. Schlegel, Quelques théoremes de géométrie á n dimensions (Bulles. de la Soc. math. de France X, 1882).

K. Rudel, Vom Körper höherer Dimension (Kaiserslautern, 1882).

V. Schlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumbilde. (Nova acta d. Ksl. Leop. Carol. deutsch. Akad, d. Naturforscher. XLIV. Halle 1883).

A. Puchta, Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen (Wiener Sitzungsberichte LXXXIX, 1884).

V. Schlegel, Ueber Projectionsmodelle der regelmässigen vierdimensionalen Körper (Darmstadt, Brill 1885).

Heis, Reiträge zur Theorie der mersach perspectiven Dreiecke und Tetraeder (Math. Annalen XXVIII, 1886).

V. Biermann, Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variablen (Wiener Sitzungsberichte XCV. 1887).

Goursat, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. (Annales de l'Ecole Norm. (3) VI. 1889).

W. I. C. Sharp On the properties of simplissima (London Math. Soc. Proceed. XVIII, 1888, XIX. 1890).

G. Loria Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque (Battaglini Giorn. XVI. 1887).

P. H. Schoute Voordracht over de regelmatige lichamen in ruimte van meer dimensies (Natuur-en scheikundig congress te Utrecht, 1891).

V. Schlegel. Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions (Rendiconti del circ. mat di Palermo V, 1891).

V. Schlegel. Ueber congruente Raumtheilungen. (Grunert's Archiv (2) X, 1891).

V. Schlegel. Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions (Comptes rendus de l'Assoc, franc, pour l'avancement des sciences. Congrès de Toulouse. 1887.)

Z. G. DE G.



PROYECTO DE CLASIFICACIÓN DE LOS ESCRITOS LÓGICO-SIMBÓLICOS

ESPECIALMENTE DE LOS POST-BOOLIANOS

POR

DON VENTURA REYES PRÓSPER

Mi afición á los estudios lógicos me ha hecho reunir cierto número de escritos referentes al Álgebra de la Lógica, habiendo además consultado algunos otros, pocos, que existen en nuestras bibliotecas. Yo

me complazco en dar desde aquí las gracias á los señores Christine Ladd, Ernest Schröder, Charles Santiago Peirce, John Venn, Joseph Murphy, Bray Kempe, Andreas Voigt, Johnson, Hugh Mac-Coll, Albino Wagý y Peano, que me han auxiliado grandemente remitiéndome publicaciones suyas ó ilustrándome con sus consejos. Ha venido á mi mente la idea de preparar una historia de la lógica simbólica, y á este fin clasificar primero los escritos lógico-simbólicos.

La sola clasificación seria que conozco es la del señor Venn, publicada en su *Symbolic Logic*. Á pesar del mérito de su autor, yo adopto una clasificación diferente, y que me parece ser más natural.

Voy, pues, ligeramente á indicarla.

Ante todo dividiré los escritos de lógica simbólica en grupos principales. Son éstos: el ante-booliano, el booliano, el peirceano, el de Delbœuf, el de la lógica de los relativos, el mitcheliano y el de la lógica aplicada. Varios autores tienen escritos que corresponden á grupos diferentes, y por otra parte á estos grupos no es posible asignarles límites fijos de tiempo.

I.—GRUPO ANTE-BOOLIANO.

Está caracterizado por la anarquía grande de notaciones y poca fecundidad de éstas. Los resultados prácticos son insignificantes y nulas las aplicaciones á otras ciencias.

Pertenecen é este grupo los escritos de Leibniz, Bernoulli, Maimon, Plouquet, Holland, Darjes, Segner, Lambert, Dalgarno y otros. Aunque hechos en época moderna los unos y recientes los otros, deben corresponder, sin embargo, á este grupo, con el que tienen muchas afinidades, los trabajos de Hamilton y Frege, sobre todo si se tiene en cuenta su infecundidad y lo extraño de sus notaciones. No están con todo exentos de mérito ambos autores.

En el período ante-booliano se habían ya ideado representaciones esquemáticas ingeniosas (Euler, Bolzano, etc.); pero no existen aún las máquinas lógicas.

II.—GRUPO BOOLIANO.

A éste corresponden escritos lógicos de muy diversas épocas, unos que datan de Boole mismo y otros recientes. Tales son las obras de George Boole, las de Stanley Jevons, John Venn, Bruce, Halstead, Artur Cayley, W. Clifford, Allxander Mac-Farlane, Bray Kempe, Al-

bino Nagy ⁽¹⁾ y los primeros escritos de Peirce y Schröder, todos los cuales forman un grupo bastante natural, difiriendo sólo en algunas mejoras sucesivamente aportadas al sistema booliano. Es de advertir que los trabajos del señor Kempe comprenden una rama especial, muy notable por cierto.

III.—GRUPO PEIRCEANO.

Lo constituyen las publicaciones de Grassmann, de Hugh Mac-Coll, parte de las modernas de Peirce y de sus discípulos de la escuela de Baltimore (excepto Mitchell), las del sabio profesor de Karlsruhe señor Schröder, posteriores á su *operationskreis des Logikkalkuls*, y los escritos de Giuseppe Peano.

IV.

Los trabajos del señor Delbœuf y algunos del señor Murphy forman un grupo bien caracterizado y diferente de los anteriores.

V.—GRUPO DE LOS RELATIVOS.

Dentro de este grupo se comprende la mayor parte de las memorias del inmortal De Morgan, las más hermosas de las de Pierce y algunas de Murphy, Mac-Farlane, Christine Ladd, J. Ellis, etc.

VI.—GRUPO DE ENLACE ENTRE LA LÓGICA DE LO ABSOLUTO Y LA DE LOS RELATIVOS.

Es del período actual y fué iniciado por Oscar Howard Mitchell, habiendo sido seguido por su maestro Santiago Peirce, por Christine Ladd, por Andreas Voigt y por todos los lógicos modernos.

VII.—LÓGICA APLICADA.

La Aritmética ha llegado á ser, merced á los trabajos de Grassmann, Peirce, Dedekind y Peano, una rama de la lógica. Los escritos de Mac-Coll comprenden además curiosas aplicaciones al estudio de las integrales.

Es de advertir que de algunos autores no conozco todas las obras

(1) Aún no se ha publicado su anunciada última obra que publicará Loesche en Turin.

(de los citados conozco alguna por lo menos de cada uno) y que los que no cito me son desconocidos por completo. Sólo son estos últimos Elizabeth Blackwood y Poretzki, que ha introducido en Rusia estos estudios.

Los escritos referentes á máquinas y diagramas lógicos podrían formar un nuevo grupo. Además el día en que la Historia de la Lógica simbólica haya tomado incremento deberá crearse otro para los trabajos históricos.



TEOREMA

remitido por el Sr. BATTAGLINI, profesor de la Universidad de Nápoles. (1)

Consideremos en un plano un cuadrilátero completo Q:

Designaremos sus lados con a, b, c, d , sus vértices (puntos de intersección de dos lados) con bc, ca, ab, ad, bd, cd ; las rectas que unen los pares de vértices opuestos son las tres diagonales del cuadrilátero $(bc, ad), (ca, bd), (ab, cd)$.

Sobre cada lado del cuadrilátero, por ejemplo d , sean los conjugados armónicos de cada uno de los puntos ad, bd, cd , respecto á los otros dos, $a'd', b'd', c'd'$.

Los tres pares de puntos $(ad, a'd'), (bd, b'd'), (cd, c'd')$ están en involución. Designaremos por (D_1, D_2) el par de los puntos dobles de esta involución. De igual manera, sobre los otros lados c, b, a del cuadrilátero se tienen los pares de puntos dobles de las involuciones $(C_1, C_2), (B_1, B_2), (A_1, A_2)$.

Sobre cada una de las diagonales del cuadrilátero, el par de vértices de éste pertenecientes á aquélla y el par de puntos de intersección de dicha diagonal con las otras dos, son dos pares que determinan una involución; indicaremos con (E_1, E_2) el par de puntos dobles de esta involución.

Análogamente en las otras dos diagonales se tienen los pares de puntos dobles de las involuciones $(F_1, F_2), (G_1, G_2)$. Los catorce puntos $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1, F_2), (G_1, G_2)$ pertenecen á una línea de segundo orden S, que se llama la *cónica de los catorce puntos respecto al cuadrilátero Q*.

Mediante el principio de dualidad se tiene el teorema recíproco, relativo á una línea de segunda clase ó *cónica de las catorce rectas* respectó á un cuadrilátero.

(1) Tenemos el gusto de ofrecer á los lectores de EL PROGRESO MATEMÁTICO el precedente teorema, que se ha dignado remitirnos el ilustre geómetra Sr. Battaglini, en la seguridad de que ha de llamar poderosamente su atención.

CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión n.º 52 (véase t. II pág. 127). (1)

Se dan dos rectas rectangulares OA, OB y un punto C, por el que se hace pasar una secante variable ACB. Se describe la circunferencia que tiene AB por diámetro.

1.º Se traza la cuerda MCN perpendicular á AB. Hallar el lugar de los puntos M, N.

2.º Se traza en B la tangente sobre la que se proyectan los puntos M, N en S, T. Hallar el lugar de los puntos S, T.

(H. Brocard).

Solución por el Sr. A. SCHIAPPA MONTEIRO, profesor de la Escuela politécnica de Lisboa.

Primer lugar geométrico.

1.º Se ve por el enunciado de esta cuestión que la solución buscada se refiere solamente al caso en que el punto C se encuentra en el ángulo AOB, lo que se reduce á suponer que la cuerda MN es real.

Según esto, teniendo esta cuerda por medio el punto fijo C, el lugar buscado tendrá por centro dicho punto, que tomaremos por origen de coordenadas, eligiendo por ejes de la x , y las rectas CX, CY perpendiculares á las rectas dadas OA, OB que las cortan en los puntos K y H.

Consideremos el punto M cuyas coordenadas son $Cp = x$, $pM = y$; y hagamos $OH = h$, $OK = k$, $CM = \rho$, $AC = \gamma$, $CB = \delta$.

Los triángulos semejantes CpM , CHB , AKC originan las relaciones

$$\frac{x}{\rho} = \frac{k}{\delta} \quad y \quad \frac{y}{\rho} = \frac{h}{\gamma} \quad (1)$$

que multiplicadas, miembro á miembro, darán

$$\frac{xy}{\rho^2} = \frac{hk}{\gamma\delta}; \quad (2)$$

pero se tiene $\rho^2 = \gamma\delta;$ (3)

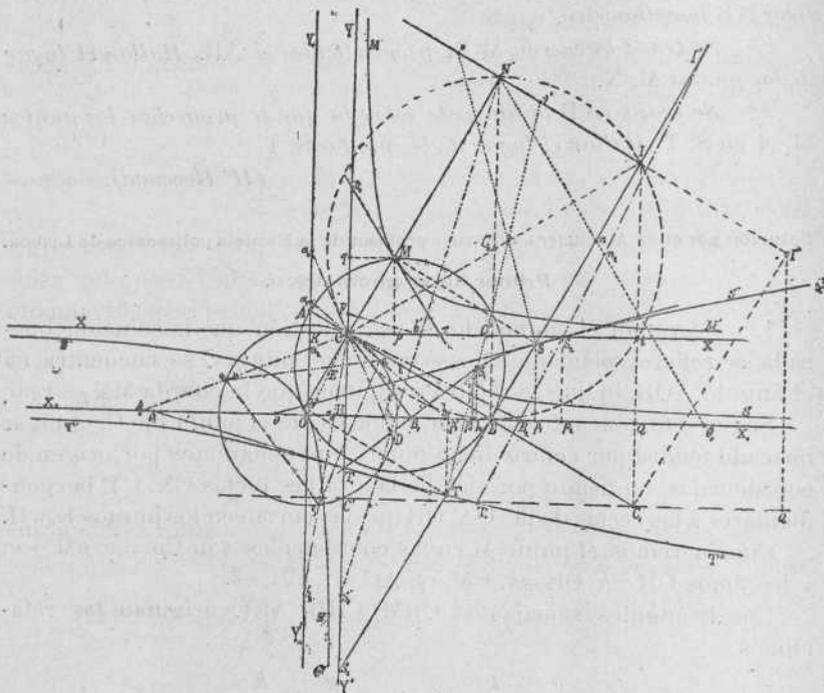
luego $xy = hk,$ (4)

que es la ecuación del lugar de los puntos M y N en coordenadas rectangulares.

(1) Para que el lector se entere con más facilidad de esta notable solución, con que ha favorecido á EL PROGRESO MATEMÁTICO el Sr. Schiappa Monteiro, daremos otra lámina de mayores dimensiones.

Como se ve, este lugar es, pues, una hipérbola equilátera (Σ) que tiene por asíntotas las rectas CX, CY y por eje transverso $2\sqrt{2}hk$.

2.º Si se quiere hallar directamente la ecuación de este lugar en coordenadas polares, tomemos el punto C como polo y CX por eje polar, haciendo el ángulo XCM igual á ω .



Los triángulos rectángulos AKC, CHB dan

$$\gamma = \frac{h}{\text{sen } \omega}, \quad \delta = \frac{k}{\text{cos } \omega} \quad (5)$$

y en virtud de la ecuación (3) resulta

$$\rho^2 = 2 \frac{hk}{\text{sen } 2\omega} \quad (6)$$

ecuación polar del lugar buscado (Σ).

Segundo lugar geométrico.

Para hallar el lugar de los puntos S, T, tomemos por ejes de las abscisas y de las ordenadas las rectas HB, HC. Consideremos el punto S cuyas coordenadas son $Hp_1 = x'$, $p_1S = y'$, y hagamos $HB = x_0$.

Siendo iguales entre sí los triángulos rectángulos CpM , Bp_1S y semejantes al CHB , dan

$$Bp_1 \cdot p_1 S = (Hp_1 - HB)p_1 S = h \cdot k \quad \text{ó} \quad (x' - x_0) y' = h \cdot k \quad (8)$$

$$y \quad \frac{x_c}{k} = \frac{y'}{x' - x_0} \quad (8)$$

Eliminando x_0 entre estas dos relaciones, y suprimiendo los acentos, el resultado

$$y^3 - h \cdot x \cdot y + h^2 k = 0 \quad (9)$$

es la ecuación del lugar geométrico pedido (Ω), que representa una verdadera transformada de la hipérbola equilátera (Σ).

DISCUSIÓN.—El examen de esta ecuación conduce á establecer que:

Los puntos de intersección reales de este lugar (Ω) con las asíntotas CX y CY de la hipérbola equilátera (Σ) tienen respectivamente por coordenadas

$$x = \frac{h^2 + k^2}{h} = Hp_2, \quad y = k = p_2 S_2 \quad (10)$$

$$y \quad x = 0, \quad y = -\sqrt[3]{h^2 k} = T_1 H \quad (11)$$

Esta curva tiene por asíntota el eje de las x , y otra llevada al infinito, paralela á este eje, puesto que se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{hy}{3y^2 - hx} = \frac{h}{3y - \frac{hx}{y}} = 0 \quad (12)$$

para $x = \infty$ é $y = 0$

así como para $x = \infty$ é $y = \infty$

Para $\frac{dy}{dx} = \infty$, resulta

$$y^2 = \frac{h}{3} x \quad (13)$$

y, según la ecuación (9) se obtiene la ecuación

$$x = 3 \sqrt[3]{\frac{hk^2}{4}} = Hp_0 \quad (14)$$

que representa la tangente real $p_0 S_0$ paralela al eje de las y en el *mínimum* de x , para los valores positivos de y .

Se llegaría al mismo resultado, estableciendo la condición neces-

ría y suficiente para que la ecuación (9) tenga dos valores iguales para y .

Se ve pues, que á todo valor positivo de x menor que Hp_0 , así como á todo valor negativo, corresponde para y un valor real negativo y dos imaginarios; y que para los valores positivos mayores y crecientes, y tiene tres valores reales, dos positivos y uno negativo.

Esta cúbica, teniendo un PUNTO DOBLE EN EL INFINITO, en la dirección asintótica del eje de las x , es UNICURSAL y se llama el TRIDENTE, pudiendo, como todas las cúbicas unicursales, ser engendrada á la manera de las CONCOIDALES.

Satisfaciendo las coordenadas de los puntos de inflexión ó los pares de valores reales de x é y á la vez á la ecuación de la curva y á una de las siguientes

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

están dadas por las fórmulas (11).

La inclinación de la tangente respectiva será

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{h}{3 \sqrt[3]{h^2 k}} \quad (15)$$

Cuando el punto generador T de la cúbica coincida con el punto de inflexión T_1 , el segmento TS tocará á la rama $S'SS''...$, en S_1 ; y la inclinación de este segmento será

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2k} = \frac{h}{y} = \frac{h}{\sqrt[3]{h^2 k}} \quad (16)$$

Se ve, pues, que la relación entre las subtangentes B_1h y 0_1H , correspondientes á los puntos S_1 y T_1 , es igual á $-\frac{1}{3}$, y por consiguiente, se tendrá

$$HB_1 = \frac{1}{3} 0_1H.$$

DE LA TANGENTE. Se reconoce *á priori*, que la envolvente de las posiciones sucesivas del segmento variable ST es una parábola (π), que tiene por foco el punto C y por PODAR, ó tangente en el vértice H la recta HB que representa la DIAMETRAL del tridente.

Según esto, cortando en el punto S_t la recta ST á HC , estará dado, como se sabe, su punto de contacto I con la envolvente (π), tomando sobre esta recta el segmento BI igual á BS_t .

Esto sentado, se puede considerar este punto de contacto I como un punto fijo por el que está sujeta á pasar la recta CD durante un tiempo infinitamente pequeño, y entonces se puede determinar la tangente en los puntos S y T á la cúbica engendradora, empleando el principio de las *transversales recíprocas*.

En efecto, si se toma á partir del punto I, en la dirección IB, una longitud $I_n = SB$ igual al semi-diámetro transverso CN de la hipérbola (Σ), cuando se considera una posición infinitamente próxima $I'S_2B_2$ del vector IB, siendo los segmentos $I'n_2$ y S_2B_2 equipolentes al semi-diámetro transverso infinitamente próximo de CN, las rectas nn_2 y SS_2 serán dos transversales recíprocas en el triángulo $BI'B_2$ y sus puntos de intersección con la directriz HB serán, pues, simétricos con relación al medio de BB_2 .

Si se supone ahora que el vector $I'B_2$ llega á confundirse con el vector IB, la recta SS_2 tiene por posición límite la tangente S_0 en el punto S á la cúbica, y por otra parte, nn_2 se reduce, en el límite, á la recta n_0 , paralela á la tangente á la hipérbola equilátera (Σ) en el punto N.

Resulta de aquí una construcción que se halla indicada en la figura. Para obtener la tangente S_0 se ha tomado $\theta_0B = B_0$.

Puesto que las normales en los extremos S, T de la cuerda ST del tridente deben cortar á la normal IN' á la parábola (π) en dos puntos simétricos v, v' con relación á N' , se puede obtener enseguida y con facilidad la tangente en el otro extremo T de esta cuerda.

OBSERVACIÓN. Es fácil reconocer que *el punto I se halla también en la circunferencia (C_0) QUE PASA POR C Y TANGENTE EN B Á LA DIAMETRAL HB, siendo entonces el extremo N' del diámetro de contacto BC_0N el centro instantáneo de rotación del segmento ST.*

La perpendicular bajada desde el punto I, cortando en Q y C_1 á las rectas HBQ y CB, determina el triángulo BQI semejante al triángulo CHB y cuyos lados HB y BQ son evidentemente iguales. La comparación de estos triángulos da

$$\overline{HB}^2 = HC \cdot QI$$

ó, haciendo

$$HQ = x; \quad QI = y$$

$$x^2 = 4ky \quad (17)$$

ecuación de la parábola (π), envolvente de las diversas posiciones de ST, la que tocará al tridente en el punto S_1 .

El lugar geométrico del centro instantáneo de rotación N del segmento variable ST es también otra parábola (ω) que tiene por vértice el punto C y por foco el punto F, cuyo parámetro es k.

En efecto, en el triángulo rectángulo BCN' , en el que CQ' es la perpendicular bajada desde el vértice C del ángulo recto á la hipotenusa BN' , se tiene

$$\overline{CQ'}^2 = Q'B \cdot Q'N' = HC \cdot Q'N'$$

y haciendo $CQ' = x$, $Q'N' = y$, resulta

$$x^2 = ky \quad (18)$$

Esta parábola ($\bar{\omega}$) es pues, una de las que representan los lugares geométricos de los puntos desde los que se puede trazar geoméricamente normales á la parábola (π).

El lugar geométrico del centro C_0 de la circunferencia C_0 será también una parábola (π_0), homofocal de (π), y cuyo vértice es el punto medio del segmento HC , ó que tiene por parámetro $2k$.

Observación general.

Si se supone que el segmento AB de la transversal trazada por el punto C se halla en alguno de los ángulos $X_0OY'_0$ ó Y_0OX_0' adyacentes al ángulo X_0OY_0 donde se encuentra dicho punto, la cuerda MN se convertirá en *ideal*, y el lugar geométrico de los puntos M, N será una hipérbola equilátera (Σ), á la cual corresponderá, como lugar de los puntos respectivos S, T una cúbica (Ω); simétrica de (Ω) con relación al eje $YCHY'$.

Si el segmento ST , en vez de variar con la magnitud de los diámetros equipolentes de la hipérbola (Σ) permaneciese siempre igual al radio $\sqrt{2hk}$ del círculo (C), *cónica suplementaria* de la hipérbola (Σ), los puntos S, T engendrarían una cuártica, transformada de este círculo, la cual podría considerarse análogamente como suplementaria de la cúbica (Ω), transformada de aquella hipérbola.

El centro ε del círculo (ε), descrito sobre el segmento variable AB como diámetro, se halla siempre sobre una hipérbola equilátera (E) que tiene por centro el punto medio E de OC , que por consiguiente, será uno de sus diámetros transversos y cuyas asíntotas son paralelas á las de las hipérbolas equiláteras (Σ) y (Σ').

Cuando del punto O como centro, con el radio OC se describe una circunferencia (C), quedará cortada por la hipérbola (E) en los puntos e_1, e_2, e_3 , y estos puntos, así como el punto C , serán los centros de cuatro círculos iguales al círculo O , cuyos diámetros serán los segmentos a_0b_0, a_1b_1 y a_2b_2, a_3b_3 , iguales á $2 \cdot OC$, de las transversales Cb_0, ce_1 y ce_2, ce_3 ; correspondiendo el primer par de estos círculos á la generatriz de la hipérbola equilátera (Σ) y el último á la hipérbola conjugada (Σ').

Por otra parte, la transversal Cb_0 , tangente á la hipérbola (E) deter-

minará sobre el círculo (O) los arcos Ce_1D y Ce_2e_3D con relación á los cuales esta hipérbola será TRISECTRIZ.

Estas son las propiedades que se ofrecen desde luego, y que no hemos creído debíamos dispensarnos de estudiar, por más que sólo se pidan las ecuaciones de los lugares geométricos propuestos.

Por esta razón no nos extenderemos en otras investigaciones, como por ejemplo, las relativas á los lugares de los que se pueden deducir geoméricamente normales á la parábola (π), sobre la determinación de las tangentes y del centro de curvatura del tridente et-cétera, para no prolongar este estudio, y no hacerlo más fatigoso.

Cuestión n.º 55 (véase t. II pág. 127).

Se tiene una recta indefinida XY y una perpendicular AB (B el pie) á dicha recta. Por el punto A se trazan diversas oblicuas y en sus pies se levantan perpendiculares á ellas, tomando en uno y otro sentido longitudes iguales á AB. Hallar y discutir la ecuación del lugar geométrico de los extremos de estas perpendiculares.

(Juan J. Durán Loriga).

Solución por el SR. SCHIAPPA MONTEIRO, profesor de la Escuela politécnica de Lisboa.

Según el enunciado de esta cuestión, se reconoce inmediatamente que el lugar geométrico pedido es simétrico con relación á AB.

Elijamos pues, por ejes de las x, y las rectas dadas XX', AB , y sea Aa una de las oblicuas trazadas por el punto A, y bab' la perpendicular trazada por su pie a , sobre la que se señalarán los segmentos $ab, b'a$ iguales al segmento dado AB, que representaremos por R.

Consideremos el punto b cuyas coordenadas son

$$Bp = x = Ba + ap \quad \text{y} \quad pb = y \quad (1)$$

Siendo semejantes los triángulos rectángulos pba, BaA , resultará que

$$Ba = \frac{R}{ap} y \quad (2)$$

de donde

$$x \cdot ap = R \cdot y + \overline{ap^2} \quad (3)$$

pero se tiene

$$ap = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$$

luego la ecuación del lugar buscado será

$$\pm x \sqrt{R^2 - y^2} = R^2 + Ry - y^2 \quad (4)$$

$$\text{ó} \quad F = y^4 - 2Ry^3 - (R^2 - x^2)y^2 + 2R^3y - R^2x^2 + R^4 = 0 \quad (5)$$

OBSERVACIÓN. Desde el punto B como centro, con el radio R, des-

cribamos la circunferencia $A\beta CD\beta'C'$ ó (B) y tracemos el diámetro $\beta B\beta'$, perpendicular á la oblicua Aa , que la corta en el punto P, y consideremos las coordenadas $BP_1, P_1\beta$ del punto β de esta circunferencia.

Los triángulos rectángulos $apb, BP_1\beta, APB$ serán iguales y cuando la oblicua Aa gire al rededor del punto medio fijo A, ó los puntos b y b' describirán la cuártica propuesta (Δ), el punto P describirá el círculo APB ú (O) cuyo centro es el punto medio O de AB, y se tiene siempre

$$PB = pb = y \quad \text{y} \quad Bp = Ba + AP = x \quad (6)$$

DISCUSIÓN. Cuando la oblicua Aa gira al rededor de A, el punto b describe la rama $CbEb_0C_1\dots$ de la cuártica (Δ), y el punto b' describe la otra rama $c'b'E'b'_0C'_1\dots$, que se cortan evidentemente en el punto b'_0 , que será un *punto doble* ó *nodo* de esta curva, correspondiente á $x=0$.

Para este valor de x la ecuación (4) se reduce á

$$y^2 - Ry - R^2 = 0 \quad (7)$$

de donde

$$y = + \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) = Bb''_0, \quad y = - \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) = Bb'_0 \quad (8)$$

Estos dos valores de y serán, pues, los de los segmentos que dividen el radio R del círculo (B) en media y extrema razón, ó representan respectivamente las longitudes de los lados del decágono estrellado y del decágono convexo inscritos en dicho círculo.

Se puede también obtener estos valores de y considerando la posición Aa_0 de la oblicua Aa para la que se tiene $b'_0a_0 = R$, determinando el triángulo rectángulo b'_0a_0A que da

$$R^2 = Bb'_0 (Rb'_0 + R) \quad (9)$$

$$\text{ó} \quad y^2 = R (R + y) \quad (10)$$

Correspondiendo el punto b'_0 al primer valor de y , es un *punto conjugado* ó *acnodal*, que se puede considerar como el *punto doble* de dos ramas *imaginarias* de la curva (Δ) ó como su *óvalo* reducido á un punto, puesto que se ve claramente

1.º Que la ecuación (4) se halla satisfecha para

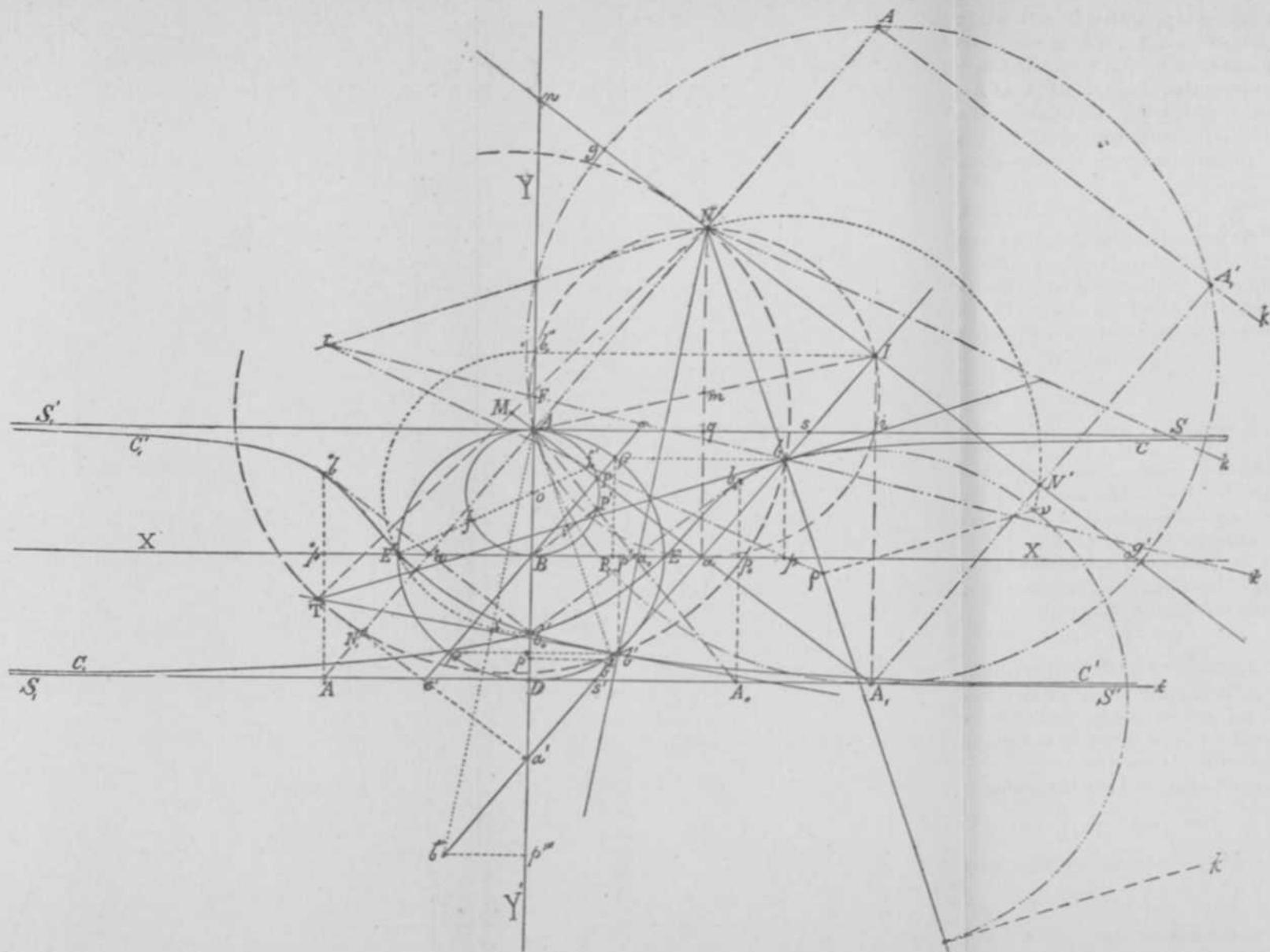
$$x = 0 \quad \text{ó} \quad y = + \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

2.º Que para los valores de y , mientras sean poco diferentes de

$$+ \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1),$$

los valores de x sean imaginarios.

Vamos todavía á obtener estos dos *puntos singulares*, sin conside-





rar la generación de la cuártica (Δ), recurriendo tan sólo á su ecuación por la aplicación del método general para determinar estos puntos, y los coeficientes angulares de las tangentes respectivas.

Haciendo $x=0$ en las derivadas primeras de la ecuación de (Δ), con relación á x é y , se tiene

$$x(y^2 - R^2) = 0 \quad (11)$$

$$y \quad 2y^3 - 3Ry^2 - 3R^2y + R^3 = (2y - R)(y^2 - Ry - R^2) = 0 \quad (12)$$

Ahora bien, quedando satisfechas estas ecuaciones por los valores

$$de \quad x = 0 \quad \text{é} \quad y = \frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \quad (8)$$

manifiestan que los puntos b'_0 y b''_0 son *dobles*.

No siendo nulas para estos valores de x é y las derivadas segundas

$$2(y^2 - R^2) \quad y \quad 2[6(y^2 - Ry) - R^3] \quad (13)$$

ó bien,

$$2Ry \quad y \quad 2.5.R^2 \quad (14)$$

de la ecuación de la curva, se tendrá, para determinar la inclinación de las tangentes en estos puntos, la ecuación

$$5R^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + R.y = 0 \quad (15)$$

que da

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{y}{5R}} \quad (16)$$

Se ve, pues, que para

$$x = 0 \quad \text{é} \quad y = \frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

se tiene las dos ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{5}+1}{10}} \quad (17) \quad y \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10}} \quad (18)$$

que dan respectivamente *inclinaciones ideales y reales* para los pares de tangentes en los puntos b'_0 y b''_0 de la cuártica (Δ).

Luego, para $x = 0$, resulta para y un valor positivo y el otro negativo, correspondiendo al primer valor de y un PUNTO CONJUGADO ó ACNODAL y al segundo un PUNTO DOBLE ó bien ACRUNODAL.

Para $y = 0$ resulta

$$x = \pm R$$

lo que muestra que cada una de las ramas $CEb'_0C_1 \dots$ y $C'_1E'b'_0C' \dots$ de la cuártica corta al eje de las x en los extremos E y E' del diámetro EE' del círculo B .

Haciendo $x = \pm \infty$, se tiene la ecuación

$$y = \pm R \quad (19)$$

que representa las asíntotas SAS' y $S'SD$ de estas dos ramas de la curva; puesto que, siendo el coeficiente angular de la tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(R^2 + R \cdot y - y^2)^2}{x[x^2y + (R^2 + Ry - y^2)(R^2 - 2y)]}, \quad (20)$$

llega á ser nulo para estos valores de x ó y .

Así la cuártica (Δ) se compone de dos RAMAS HIPERBÓLICAS APLANADAS de segundo género.

Tal sistema de asíntotas implica la existencia de dos puntos de inflexión reales. Para obtener estos puntos, veamos cómo varía la inclinación de la tangente con los valores de y comprendidos entre cero y $\pm R$.

Para esto, eliminemos x en la ecuación (20), ó partamos de la ecuación (4), y tendremos

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{(R^2 - y^2)^3}}{R^3 - (R^2 - y^2)y} \quad (21)$$

ó bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{y^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}} - \frac{y}{R} \right]} \quad (22)$$

Se ve por esto, que para la rama $CEb'_0C_1 \dots$, los valores de y comprendidos entre cero y $\pm R$, $\frac{dy}{dx}$ varía entre $+1$ y cero; y que, para la otra rama $C'_1E'b'_0C' \dots$, $\frac{dy}{dx}$ varía entre -1 y cero.

De aquí resulta que los puntos de intersección E , E' de la cuártica (Δ) con la RECTA DIAMETRAL XBX' son dos PUNTOS DE INFLEXIÓN REALES cuyas tangentes tienen la inclinación de 45° con relación á esta diametral ó al eje YBY' .

Esto sentado, se reconoce que, en la rama $CEb'_0C_1 \dots$, cuando x crece de una manera continua desde $+R$ hasta $+\infty$, y crecerá desde

cero hasta $+R$; y que, cuando x decrece desde $+R$ hasta cero, para crecer negativamente hasta $-\infty$, y crecerá negativamente hasta $-R$.

De donde resulta que esta rama, á partir del punto E, vuelve su concavidad con relación al eje de las x .

De una manera análoga se reconocerá que la rama $C_1E'b'_0C'...$, á partir del punto E' será cóncava hacia este mismo eje.

Luego, la ecuación de la curva para los valores de x desde cero hasta $\pm R$ da, para y , dos valores reales negativos y dos imaginarios, y para cualquier otro valor de x desde $\pm R$ hasta $\pm \infty$, resultan para y dos valores reales de signos contrarios y dos imaginarios.

Véase, pues, la discusión de la ordenada partiendo de la ecuación de la curva, y que podríamos desde luego reconocer considerando cinemáticamente esta curva.

La cuerda $b_0{}^0a^0b$ que determina el punto doble b'_0 de la cuártica y el punto correspondiente b_0 de su rama $CEb'_0C_1...$, es tangente en este último punto.

En efecto, los triángulos semejantes $a_0p_0b_0$ y ABa_0 dan

$$x^2 = 4Ry \quad \text{ó} \quad x = \pm 2 \sqrt{Ry} \quad (23)$$

de donde

$$\operatorname{tg} b_0a_0p_0 = \frac{2y}{x} = \frac{x}{2R} = + \sqrt{\frac{y}{R}} \quad (24)$$

Para la otra cuerda simétrica $b'_0{}^0a^0b$ de esta, resulta análogamente

$$\operatorname{tg} {}^0b^0a^0p = - \sqrt{\frac{y}{R}} \quad (25)$$

Llamando α la inclinación de estas cuerdas, se tendrá, en general,

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{y}{R}} \quad (26)$$

La ecuación (4) para este valor de x da

$$4By (R^2 - y^2) = (R^2 - y^2 + Ry)^2$$

de la que

$$R^2 - y^2 = Ry \quad \text{ó} \quad R^2 = Ry + y^2 \quad (27)$$

Se llega al mismo resultado considerando los triángulos semejantes ABP' y Ab'_0a_0 , y por consiguiente resulta

$$\frac{BA}{BA + b'_0B} = \frac{P'B}{a_0b_0}$$

y observando que se tiene $b'B = p_0 b_0 = {}^0 p^0 b$, resulta

$$R^2 = Ry + y^2$$

Llevando este valor de $R^2 - y^2$ á la ecuación (21), se tendrá

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{y}{R}};$$

luego $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ (L. Q. D. D.)

Se ve, comparando las expresiones (16) y (26), que la relación entre los coeficientes angulares de las tangentes á la cuártica (Δ) trazadas á esta curva por su punto CRUNODAL b'_0 y los coeficientes angulares de las tangentes en este punto es igual á $\sqrt{5}$.

NORMALES Y TANGENTES. Se sabe que, para una posición cualquiera de una figura plana que se mueve de una manera continua en su plano, las normales trazadas desde los puntos de la figura á las trayectorias de estos puntos, pasan por el centro instantáneo de rotación, y que los pies de las normales bajadas desde dicho centro sobre estas líneas son los puntos de contacto con sus envolventes.

Según esto, si se trazan las rectas AN y aN respectivamente perpendiculares á Aa y á la trayectoria Ba del punto a, su punto de intersección N será el centro instantáneo de rotación de las rectas rectangulares Aa y bab'.

Luego: las rectas Nb, Nb' serán normales á la cuártica en los puntos b, b', y la recta NI perpendicular á la recta bb' la normal á la envolvente de esta recta en el punto de intersección I de estas rectas.

Así, para tratar cinemáticamente la normal ó la tangente en un punto cualquiera b de la cuártica, basta trazar la cuerda bb' = R, conjugada con la recta diametral XBX', cuya construcción es fácil, para determinar enseguida el centro instantáneo de rotación N de esta cuerda, y por consiguiente la normal Nb ó la tangente bT.

Se llega igualmente á esta construcción, suponiendo el punto I como un punto fijo ó polo, por el que la cuerda bb' se halla sujeta á pasar durante un tiempo infinitamente corto, de manera que los puntos b y b' pueden considerarse como pertenecientes á una *concoide* de Arquímedes que tiene por directriz el diámetro XBX' de la cuártica (Δ).

Esto sentado, los puntos generadores b y b' tiene la misma sub-normal IN en coordenadas polares que el punto a sujeto á describir la directriz XBX', puesto que esta sub-normal es igual á la relación entre la velocidad de resbalamiento y la velocidad angular, que en

este caso, tienen los mismos valores para todos los puntos de la recta móvil Ibb' .

Si se prolonga la cuerda bb' , y, á partir de su punto de intersección a' con el eje AB , se toman á una y otra parte los segmentos $a'b''$ y $b''a'$ iguales á R , se tendrá el triángulo $Ab'b''$ que, siendo directamente igual al triángulo Abb' , tendrá los lados Ab' , Ab'' respectivamente perpendiculares á las tangentes Tb y Tb' en los extremos b , b' de esta cuerda.

De aquí resulta otro procedimiento para obtener la tangente ó la normal en un punto cualquiera de la cuártica.

Como se reconoce *á priori*, la envolvente de la cuerda bb' es una parábola (π) que la toca en el punto I que tiene por foco el punto A , por PODAR ó tangente en el vértice B , la recta diametral de la cuártica, y por directriz la asíntota S_1DS' de esta curva.

Se conoce igualmente que la circunferencia (m) que pasa por A y toca á Ba en a , pasará por el punto I y por el centro instantáneo de rotación N de la cuerda bb' .

El centro m de esta circunferencia describirá pues, una parábola (π') confocal de la parábola (π) que tiene por directriz la podar de ésta.

La circunferencia (I) que pasa por A y toca á DS' en el punto de intersección A_1 de esta recta con la oblicua AaA_1 , es la circunferencia generatriz de la parábola (π).

El lugar geométrico del centro instantáneo de rotación N de la cuerda bb' es también otra parábola (ω) que tiene por vértice el punto C y por foco el punto F y cuyo parámetro es R .

En efecto, en el triángulo rectángulo AaN , en el que Aq es la perpendicular bajada desde el vértice A del ángulo recto sobre la hipotenusa aN , se tiene

$$\overline{Aq}^2 = aq \cdot qN = BA \cdot qN$$

y haciendo $Aq = x$, $qN = y$, resulta

$$x^2 = R \cdot y \quad (28)$$

según queríamos demostrar

Esta parábola es pues, el lugar desde donde se pueden trazar geoméricamente pares de normales á la parábola (π) y á la cuártica (Δ), teniendo por puntos de normalidad ó de incidencia los extremos de cuerdas de longitud constante $2R$.

Es claro que la circunferencia (M) que pasa por los extremos b, b' de una de estas cuerdas y por el punto de encuentro N de las normales respectivas bN y $b'N$, pasará por el polo T de esta cuerda.

CENTRO Y RADIO DE CURVATURA. Se sabe que: «cuando una figura plana invariable varía de posición en su plano, según un movimiento continuo cualquiera, y una recta ligada á esta figura queda constantemente tangente á una curva fija (que puede reducirse á un punto, si se une el centro de curvatura de esta curva, ó el punto que la reemplaza, con el centro instantáneo de rotación, y por el extremo de esta línea prolongada en una cantidad igual á la misma, se le traza una perpendicular, el centro instantáneo de rodación debe encontrarse en esta perpendicular.

En nuestra figura se tienen dos rectas rectangulares Aa y bb' moviéndose de una manera continua, pasando la primera por el punto fijo A , y la segunda rodando sobre la parábola igualmente fija (π).

Según esto, si se considera el punto b , extremo de la cuerda bb' de la cuártica, el centro instantáneo de rotación de esta cuerda será, como se acaba de ver, el punto de intersección N de las perpendiculares AN y aN á Aa y Ba , levantadas en los puntos A y a , al que corresponden la normal Nb á esta curva y la normal NI á la parábola (π).

Según el principio enunciado, prolongando primero AN una longitud $NA' = AN$, y trazando por el punto A' la paralela $A'A_1k$ á la recta Aa , el centro instantáneo de rodación k , se encontrará sobre esta paralela; pero, en segundo lugar, tomando sobre la normal NI á la parábola (π) desde N hacia I un segmento Ng'' igual á su radio de curvatura $N\rho_0$, trazándose por el punto g'' la paralela $g''k$ á bb' , el centro instantáneo k se hallará también sobre esta paralela: Luego el centro k será el punto de intersección de las rectas $A'A_1$ y $g''k$.

Sin embargo, se debe observar que la determinación del punto k se simplifica mucho en virtud de una propiedad muy conocida de los radios de curvatura de las parábolas, que conduce fácilmente á concluir que este punto se encuentra sobre la directriz DS' de la parábola (π).

Según esto, el punto instantáneo de rodación k relativo á la cuerda bb' será la intersección de la asíntota DS' de la cuártica (Δ) con la perpendicular $A'A_1k$ en el extremo del segmento AA' igual á $2AN$.

Ahora sólo falta proyectar en j el punto k sobre la normal Nb , relativa al punto considerado b , y tomar

$$b\rho = \frac{\overline{bN}^2}{bj} \quad (29)$$

El punto ρ será, pues, el centro de curvatura y $b\rho$ el radio del círculo osculador en b .

En la figura se ha determinado también este punto ρ , levantando $N\rho$ perpendicular á Nb y trazando $r\rho$ paralela á Nk .

OBSERVACIÓN.— Como se ve, se podría cinemáticamente apreciar la variación de la inclinación de la tangente y del radio de curvatura en los diferentes puntos de la cuártica (Δ) , para reconocer la existencia de los puntos dobles reales E, E' ; de las asíntotas AS, AS' , etc., etc. recurriendo al lugar geométrico $(\Delta)_n$ de los puntos $b'' b'''$ de (Δ) , cuyos vectores $Ab'' Ab'''$ son equipolentes á las normales $Nb Nb'$ en los extremos de la cuerda bb' igual á $2R$, determinada en (Δ) por la prolongación de la cuerda $b''b'''$ de $(\Delta)_n$, también igual á $2R$.

Se observa que cada par de rectas M'', M''' , equipolentes á las normales $Nb Nb'$ forman con el eje AB y la paralela AN á la cuerda bb' de normalidad ó de incidencia un *haz armónico*.

Para determinar la ecuación de la curva de las normales $(\Delta)_n$, elijamos aún por eje de las x, y las rectas dadas XX' y AB , y consideremos el punto b'' cuyas coordenadas son

$$x = p''b'' \quad \text{é} \quad y = Bp'' - a'p'' - a'B$$

De la semejanza de los triángulos $a'aA, a'aB$ y $a'b''p''$ resulta

$$\overline{Ba}^2 = R \cdot a'B \quad \text{y} \quad \frac{Ba}{a'B} = \frac{p''b''}{a'p''} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\text{ó} \quad \frac{\overline{Ba}^2}{a'B} = \frac{x^2}{R^2 - x^2} a'B \quad \text{de donde} \quad a'B = \frac{R}{x^2} (R^2 - x^2)$$

luego la ecuación del lugar buscado $(\Delta)_n$ será

$$\pm \sqrt{R^2 - x^2} = y + \frac{R(R^2 - x^2)}{x^2} \quad (30)$$

En esta ecuación se reconoce que y se hace nula ó imaginaria según que x es igual ó superior á $\pm R$, lo que muestra que la curva $(\Delta)_n$ tiene *dos puntos estacionarios* ó de *retroceso* que coinciden con los puntos de inflexión E, E' de la cuártica (Δ) .

Para $x = 0$, se tiene $y = -\infty$

No entraremos en más detalles ni indicaremos otras propiedades, por no prolongar demasiado este trabajo, manifestando al terminar, que no hemos pretendido ofrecer ninguna novedad al ilustrado matemático D. Juan J. Durán Loriga, autor de tan interesante cuestión que hemos tratado de resolver y analizar.

Cuestión num. 57 (véase t. II pág. 128).

Se dan dos planos paralelos conteniendo, el uno una recta D, el otro una elipse E, cuyo uno de los ejes es paralelo á la recta D.

Se pide determinar la superficie de revolución engendrada por esta elipse al girar al rededor del eje D. Casos particulares y comprobaciones.
(H. Brocard).

Solución por el Sr. A. SCHIAPPA MONTEIRO, profesor de la Escuela Politécnica de Lisboa.

Adoptemos por plano de las x, z el que contiene la recta D, por plano de las yz el plano perpendicular á este trazado por esta recta, y en fin, por el de las xy el plano perpendicular á éste trazado por el centro de la elipse (E).

Sean $x = OA = l$ $y = OB = k$ $y z = 0$

las coordenadas del centro C de la elipse, cuyos semi-ejes son a y c , siendo este último paralelo á la recta D. Según esto, las ecuaciones de esta cónica serán

$$\frac{(x-l)^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1) \quad \text{é} \quad y = k \quad (2)$$

Si en vez de considerar la superficie de revolución pedida como engendrada por la revolución de la elipse (E) al rededor del eje D, se la considera como engendrada por un círculo (Δ) cuyo centro se mueve sobre D, mientras que su plano permanece perpendicular á este eje, y cuyo radio crece y decrece de manera que la circunferencia encuentre siempre á la elipse, esta circunferencia móvil se convierte en una generatriz de esta superficie, y tendrá por ecuaciones

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (3) \quad z = \gamma \quad (4)$$

en las que, como se sabe, ρ y γ son constantes arbitrarias ó parámetros variables.

Ahora, para expresar que el círculo móvil (Δ) tiene, en todas sus posiciones, un punto comun con la directriz (E), es preciso que sus cuatro ecuaciones queden satisfechas por un mismo sistema de valores atribuidos á x, y, z , lo que exige la eliminación de estas tres coordenadas entre las cuatro ecuaciones, y se tendrá la ecuación final de la forma

$$\frac{(l \pm \sqrt{\rho^2 - k^2})^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

que establece ya entre los parámetros la dependencia necesaria para que la generatriz (Δ) se apoye constantemente sobre la directriz (E).

(Se continuará).



LOS CENTROS DE LAS PARALELAS IGUALES

POR M. BASILE SOLLEERTINSKY

DEFINICIÓN.—*El centro de las paralelas iguales es un punto tal, que las paralelas á los lados del triángulo de referencia, trazadas por este punto y limitadas en los lados son iguales entre sí.*

LEMA.—*El lugar geométrico del punto M tal, que las paralelas á los lados del ángulo A del triángulo ABC, trazadas por este punto y comprendidas entre los lados de los ángulos B y C sean iguales entre sí, consiste en dos rectas que unen los pies α , α' de las bisectrices del ángulo A al punto A' simétrico del A con relación al medio de BC (M. Neuberg, Mathesis, t. I, pág. 158).*

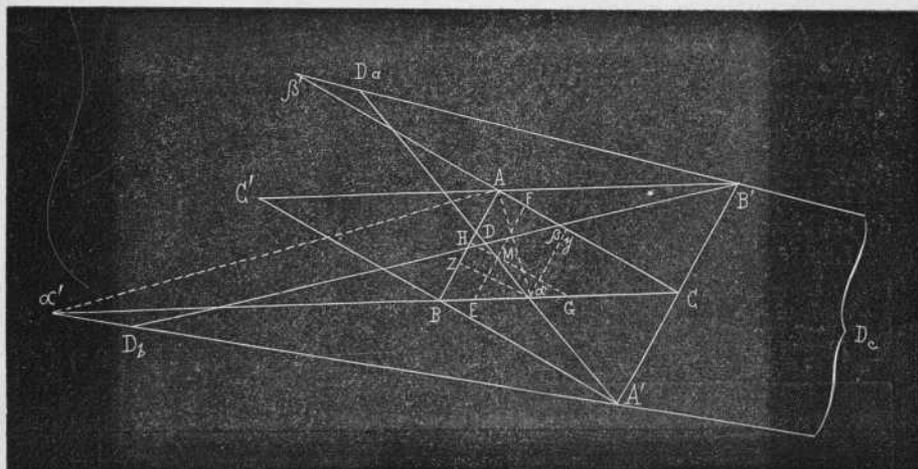


Figura 1.ª

Sean EF, GH (fig. 1.ª) las paralelas á BA, CA, trazadas por un punto M de A' α ; αy , αz las paralelas á los mismos lados trazadas por α .

Se tiene
$$\frac{EF}{\alpha y} = \frac{EC}{\alpha C}; \quad \frac{GH}{\alpha z} = \frac{GB}{\alpha B};$$

pero
$$\frac{EC}{\alpha C} = \left(\frac{MA'}{\alpha A'} \right) = \frac{GB}{\alpha B}$$

luego
$$\frac{EF}{\alpha y} = \frac{GH}{\alpha z}$$

Y, siendo iguales los segmentos αy , αz , resulta que

$$EF = GH$$

El razonamiento análogo probaría que la recta $A'z'$ pertenece también al lugar.

En fin, la suposición de que las paralelas iguales EF , GH se encuentran en un punto M , no situado en $A'\alpha$ ó $A'z'$ es inadmisibile, porque siendo μ y μ' los puntos en que EF se encuentra á $A'\alpha$, $A'z'$, las dos paralelas á CA , trazadas por μ y μ' , serían iguales á la tercera GH , lo que es imposible.

TEOREMA.—*Los centros de las paralelas iguales son anticomplementarios de los recíprocos de los centros de los círculos inscritos (ídem).*

Sea $A'B'C'$ el triángulo formado por las paralelas á los lados de ABC trazadas por los vértices opuestos, que es el triángulo anticomplementario, y todo punto de este triángulo es el anticomplementario de su homólogo en el triángulo ABC .

Siendo los triángulos $A'BC$ y ABC simétricos con relación al medio de BC , los puntos α y α' considerados en el triángulo $A'BC$, son los isotómicos de los pies de las bisectrices del ángulo A' .

Por consiguiente, las rectas $A'z$, $A'z'$ pasan por los recíprocos de los centros de los círculos inscritos al triángulo $A'B'C'$.

Lo mismo sucede á las rectas $B'\beta$, $B'\beta'$ que unen B' á los pies β y β' de las bisectrices del ángulo B .

Las intersecciones D , D_a , D_b , D_c de estas cuatro rectas son los recíprocos de los centros de los círculos inscritos á $A'B'C'$; pero, según el lema, son también los centros de las paralelas iguales.

Longitud común de las paralelas (*).— Sean: KL , MN , RS (fig. 2.^a)

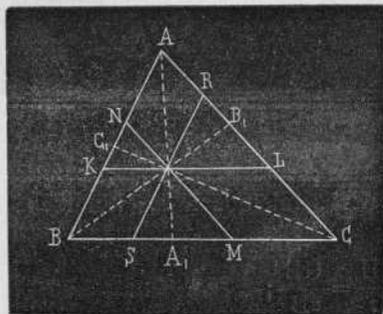


Fig. 2.^a

las paralelas á los lados del triángulo ABC trazadas por un punto P del plano; A_1 , B_1 , C_1 los pies de las rectas AP , BP , CP .

Se tiene, en magnitud y en signo,

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AP}{AA_1}, \quad \frac{MN}{CA} = \frac{BP}{BB_1}, \quad \frac{RS}{AB} = \frac{CP}{CC_1}$$

Pero se sabe que

$$\frac{AP}{AA_1} + \frac{BP}{BB_1} + \frac{CP}{CC_1} = 2$$

luego

$$\frac{KL}{BC} + \frac{MN}{CA} + \frac{RS}{AB} = 2$$

(*) Mathesis, t. I, pág. 150.

Así, designando la longitud de los lados de ABC por a, b, c y la de las paralelas correspondientes á D, D_a, D_b, D_c por l, l_a, l_b, l_c se tendrá

$$\left. \begin{aligned} l \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 2 & l_a \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 2 \text{ (*)} \\ l_b \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 2 & l_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

de donde $l = \frac{2abc}{bc + ca + ab}$ $l_a = \frac{2abc}{-bc + ca + ab}$, etc.

COROLARIO. $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} = \frac{1}{l}$

Cuestión ním. 27 (Véase t. I, pág. 164).

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO CONOCIDO: 1.º La base. 2.º El ángulo opuesto. 3.º La longitud común l de los segmentos determinados por los lados del triángulo sobre tres paralelas á estos lados que pasan por un mismo punto (**) (E. Lemoine).

Tenemos que considerar dos casos:

1.º Se da l ó l_a . Entonces se obtiene de (1)

$$x = \frac{bc}{b+c} = \frac{al}{2a-l} = \frac{al_a}{2a+l_a}$$

las expresiones fáciles de construir.

Tracemos, por el pie x de la bisectriz interior del ángulo A, la paralela αE á CM (fig. 3.ª). Se tendrá

$$\frac{\alpha E}{CA} = \frac{Bx}{BC}$$

de donde

$$\alpha E = \frac{bc}{b+c} = x$$

Se podrá, pues, construir Ax . Después, siendo D la intersec-

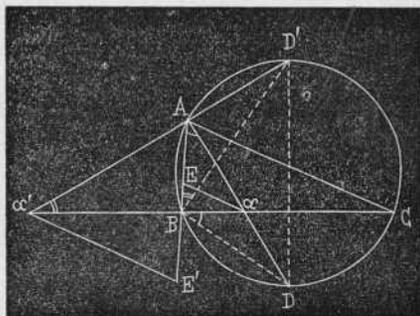


Fig. 8.ª

(*) Cuando el punto P está en D_a (fig. 1.ª), las rectas KL y BC tienen direcciones contrarias.

(**) La solución no difiere esencialmente de la indicada por M. Lemoine (J. M. E., 1893, p. 211).

NOTA. Se ve $BC = Bx + \alpha C$ y $\alpha E = \frac{b \cdot \alpha B}{Bx + \alpha C} = \frac{b}{1 + \frac{\alpha C}{\alpha B}} = \frac{b}{1 + \frac{b}{c}}$, etc.

Z. G. DE G.

ción de Az con la circunferencia ABC , se tiene (á causa de las antiparalelas Bz , AB)

$$DB^2 = D\alpha \cdot DA$$

Pero hallándose dadas la diferencia Az y el producto \overline{DB}^2 de los segmentos Dz , DA , se pueden construir estos segmentos.

2.º Dados l_b ó l_c , se construye desde luego

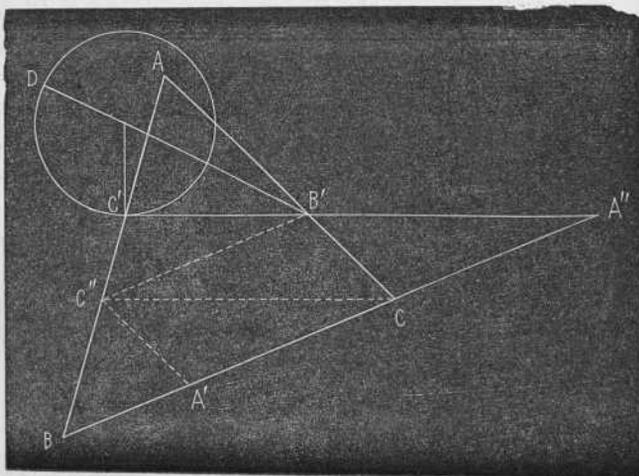
$$\alpha'E' = \frac{bc}{b-c} = \frac{al_b}{2a-l_b} = \frac{al_c}{l_c-2a}$$

Se halla después Az' y (siendo BA y $\alpha'B$ antiparalelas), se tiene

$$\overline{D'B'}^2 = D'A' \cdot D'\alpha'$$

Cuestión núm. 36 (Véase t. I, pág. 295).

Construir un triángulo, dados los puntos que dividen (seguido el perímetro en el mismo sentido) los tres lados en media y extrema razón
N. C. M. (H. Van Aubel).



Solución por el Sr. SOLLERTINSKY (B) (de Gatchina, Rusia).

Sean A' , B' , C' los puntos de división; A'' el punto en que $B'C'$ encuentra á BC .

Evidentemente la paralela á CB , trazada por B' , dividirá á BA en MER (*).

Sea C'' este nuevo punto. Se tiene así: $BC'' = C'A$

(*) MER es abreviación de *media y extrema razón*.

De la proporción $\frac{BA}{BC'} = \frac{BC'}{C'A}$ resulta

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{BA - BC'}{BC' - C'A} \quad \text{ó} \quad \frac{BC'}{BC'} = \frac{BC'}{C'C'}$$

Por consiguiente, el segmento BC' queda dividido, en C'' , en MER , y á causa de las paralelas, lo mismo se verifica en el segmento $A'C'$ que está dividido en B' .

Se puede, pues, construir el punto A'' , á saber: Si se describe, con el radio $\frac{B'C'}{2}$, la circunferencia tangente en C' á $B'C'$, la distancia máxima $B'D$ del punto B' á esta circunferencia será igual á $B'A''$.

Además, estando los segmentos AC , AC' divididos en MER en los puntos B' , C' , las rectas $C'B'$, $C'C$ son paralelas, de donde $CA'' = C'B'$.

De igual manera, siendo $C'A'$ paralela á AC , se tiene $C'B' = A'C$. Así, pues, el punto C es el punto medio de $A'A''$.

En fin, las paralelas á CB y CA trazadas por B' y A' se encontrarán en C'' , y la recta $C'C''$ encontrará á CB' y á CA' en los puntos A y B .

Observación.—El problema admite dos soluciones. Los triángulos obtenidos ABC , $A_1B_1C_1$ son equivalentes, tienen el mismo centro de gravedad con el triángulo $A'B'C'$, se hallan inscriptos al triángulo $\alpha\beta\gamma$, que es homotético de $A'B'C'$, y sus vértices dividen los lados de $\alpha\beta\gamma$ en MER , se hallan inscriptos y circunscriptos á dos elipses concéntricas y homotéticas, etc.

Cuestión núm. 45 (Véase t. II, pág. 128).

Tres rectas trazadas desde los tres vértices de un triángulo determinan sobre los lados opuestos seis segmentos tales, que la diferencia entre el producto de los tres segmentos no consecutivos y el producto de los otros tres, es

$$\frac{abc}{a'b'c'} \left(\frac{\Delta}{\Delta'} \right)^2 lmn$$

En esta expresión Δ , a , b , c designan el área y los lados triángulo dado; Δ' , a' , b' , c' el área y los lados del triángulo formado por las tres rectas; l , m , n los segmentos de estas rectas comprendidos entre los vértices y los lados del primer triángulo.

(N. C. M.)

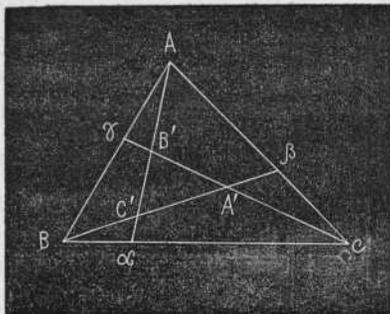
(E. Cesàro).

Solución por el Sr. SOLLERTINSKY.

Sea $A'B'C'$ el triángulo formado por las tres rectas $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ trazadas por los vértices del triángulo ABC .

Se tiene (siempre en magnitud y en signo)

$$\frac{A'B'C'}{C'B'z} = \frac{B'C' \cdot C'A'}{BC' \cdot C'z}; \quad \frac{C'B'z}{AB'z} = \frac{C'z}{A'z}; \quad \frac{AB'z}{ABC} = \frac{B'z}{BC}$$



Después de multiplicar estas proporciones, resulta

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{a'b'}{al} \cdot \frac{B'z}{BC'}$$

Se obtiene de la misma manera:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{b'c'}{bm} \cdot \frac{C'\beta}{CA'}; \quad \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{c'a'}{cn} \cdot \frac{A'\gamma}{AB'}$$

Por consiguiente

$$\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^3 = \frac{(a'b'c')^3}{abc \cdot lmn} \cdot \frac{B'z \cdot C'\beta \cdot A'\gamma}{BC' \cdot CA' \cdot AB'}$$

De donde

$$B'z \cdot C'\beta \cdot A'\gamma = \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^3 \frac{abc \cdot lmn}{a'b'c'} \cdot \frac{BC' \cdot CA' \cdot AB'}{a'b'c'} \quad (1)$$

Igualmente

$$\frac{A'B'C'}{CB'z} = \frac{B'C' \cdot A'B'}{CB' \cdot B'z}; \quad \frac{CB'z}{CA'z} = \frac{B'z}{A'z}; \quad \frac{CA'z}{ABC} = \frac{zC}{BC}$$

de lo que

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{a'c'}{al} \cdot \frac{zC}{CB'}$$

Luego

$$zC \cdot \beta A \cdot \gamma B = \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^3 \frac{abc \cdot lmn}{a'b'c'} \cdot \frac{CB' \cdot AC' \cdot BA'}{a'b'c'}$$

Pero si se toman en los lados de un triángulo $A'B'C'$ tres puntos cualesquiera A, B, C , se tiene

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BA' \cdot CB' \cdot AC' + B'A \cdot C'B \cdot A'C}{a' \cdot b' \cdot c'}$$

Por consiguiente

$$zC \cdot \beta A \cdot \gamma B - B'z \cdot C'\beta \cdot A'\gamma = \frac{abc}{a'b'c'} \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^3 lmn.$$

Solución por el Sr. CESÁRO (ERNEST).

Tres rectas trazadas por los vértices de un ángulo ABC, determinan, sobre los lados opuestos, los segmentos

$$BL = a_1, \quad CM = b_1, \quad AN = c_1,$$

$$LC = a_2, \quad MA = b_2, \quad NB = c_2.$$

Sean T, a, b, c los números que miden el área y los lados de ABC y T', a', b', c' los números análogos relativos al triángulo A'B'C', formado por las rectas consideradas. Hagamos todavía

$$AB' = u_1, \quad BC' = v_1, \quad CA' = w_1$$

$$AC' = u_2, \quad BA' = v_2, \quad CB' = w_2$$

de modo que

$$u_1 - u_2 = a', \quad v_1 - v_2 = b', \quad w_1 - w_2 = c'$$

Hagamos en fin, para abreviar,

$$b_1 c_1 + b c_2 = b_2 c_2 + c b_1 = \alpha,$$

$$c_1 a_1 + c a_2 = c_2 a_2 + a c_1 = \beta,$$

$$a_1 b_1 + a b_2 = a_2 b_2 + b a_1 = \gamma,$$

y observemos que, si se representa por Δ la diferencia $a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2$, se tiene

$$\gamma c_1 - \beta b_2 = \alpha a_1 - \gamma c_2 = \beta b_1 - \alpha a_2 = \Delta$$

Esto sentado, propongámonos calcular Δ en función de $T, T', a, b, c, a', b', c'$ y de las longitudes l, m, n de las rectas AL, BM, CN.

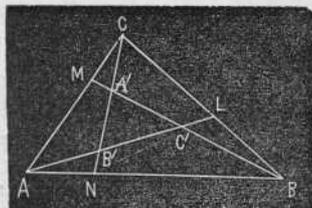
Los triángulos ALB, ALC cortados por las transversales CN, BM dan

$$\frac{AB'}{B'L} = \frac{ac}{a_2 c_2}, \quad \frac{AC'}{C'L} = \frac{ab_2}{a_1 b_1}$$

de lo que se deduce

$$\frac{u_1}{l} = \frac{ac_1}{\beta}, \quad \frac{v_1}{m} = \frac{ba_1}{\gamma}, \quad \frac{w_1}{n} = \frac{cb_1}{\alpha},$$

$$\frac{u_2}{l} = \frac{ab_2}{\gamma}, \quad \frac{v_2}{m} = \frac{bc_2}{\alpha}, \quad \frac{w_2}{n} = \frac{ca_2}{\beta};$$



después, en virtud de (1),

$$\frac{a'}{l} = \frac{a\Delta}{\gamma\beta}, \quad \frac{b'}{m} = \frac{b\Delta}{\gamma\alpha}, \quad \frac{c'}{n} = \frac{c\Delta}{\alpha\beta},$$

$$y \quad \frac{u_1 v_1 w_1}{lmn} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} a_1 b_1 c_1, \quad \frac{u_2 v_2 w_2}{lmn} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} a_2 b_2 c_2 \quad (2)$$

$$\frac{a'b'c'}{lmn} = \frac{abc\Delta^3}{(\alpha\beta\gamma)^2} \quad (3)$$

Esto sentado, observamos que

$$T = T' + BCA' + CAB' + ABC'$$

y, por consiguiente,

$$\frac{T}{T'} = 1 + \frac{v_2 w_1}{b'c'} + \frac{w_2 u_1}{c'a'} + \frac{u_2 v_1}{a'b'}$$

Se puede dar sucesivamente al segundo miembro las formas siguientes:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{v_2(w_2 + c')}{b'c'} + \frac{w_2(u_2 + a')}{c'a'} + \frac{u_2(v_2 + b')}{a'b'} \\ = 1 + \frac{u_2}{a'} + \frac{v_2}{b'} + \frac{w_2}{c'} + \frac{v_2 w_2}{b'c'} + \frac{w_2 u_2}{c'a'} + \frac{u_2 v_2}{a'b'} \\ = \left(1 + \frac{u_2}{a'}\right) \left(1 + \frac{v_2}{b'}\right) \left(1 + \frac{w_2}{c'}\right) - \frac{u_2 v_2 w_2}{a'b'c'} \end{aligned}$$

$$\text{luego } \frac{T}{T'} = \frac{u_1 v_1 w_1 - u_2 v_2 w_2}{a'b'c'}$$

ó bien, en virtud de las fórmulas (2)

$$\frac{T'}{T} = \frac{abc \, lmn}{a'b'c' \, \alpha\beta\gamma} \Delta;$$

después, utilizando (3),

$$\frac{T'}{T} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\Delta^2}$$

Esta igualdad notable se debe á Steiner. La eliminación de $\alpha\beta\gamma$ entre (4) y (5) da la fórmula

$$\frac{lmn}{\Delta} = \frac{abc}{T^2} : \frac{a'b'c'}{T'^2}$$

que se deseaba obtener.