El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL
DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SERIE 2.ª — TOMO I

ZARAGOZA
Imprenta de la Vda. de Ariño, Coso, 100
1899

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRATICO DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL
DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SERIE 2.ª — TOMO I

ZARAGOZA
Imprenta de la Vda. de Ariño, Coso, 100
1899

ÍNDICE

Serie 2.ª Año I Zaragoza, Mayo de 1899 Núm. 1

El Progreso Matemático

REVISTA DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

CAUSAS, OBJETO Y PROGRAMA
de la actual publicación

Transcurridos cuatro años desde que por circunstancias del momento se suspendió la publicación de EL PROGRESO MATEMÁTICO, hoy que estas circunstancias han variado, y que razones superiores nos impulsan de nuevo á emplear nuestras energías en el trabajo de propaganda científica, de que tan necesitados nos hallamos, para no adormecernos en un reposo que ciertamente sería perjudicial en el presente y lo porvenir; con esperanza en éste y con ánimo para la empresa que hoy acometemos, al anunciar una segunda serie en la publicación de EL PROGRESO MATEMÁTICO, creemos justo el exponer las causas que motivan este hecho y que nos han de afianzar en nuestra resolución.

Desde luego se impone, con necesidad ineludible, un movimiento rápido, incesantemente dirigido á elevar nuestro nivel científico, que hoy se aproxima al límite inferior admisible entre las naciones cultas.

Extasiados con las riquezas de nuestra literatura, embebecidos con el recuerdo de nuestras pasadas glorias, hemos olvidado el presente, sin preocuparnos del porvenir.

En alas de nuestra imaginación hemos buscado lo formal, lo brillante, lo artificioso, los efectos de la elocuencia, más no el fondo de la realidad.

La verdadera ciencia es modesta, rígida en sus procesos, oscura en sus manifestaciones, pero fuerte, poderosa en sus conclusiones irrebatibles, que sin variar se acumulan para realizar edificaciones graníticas, resistentes al impulso de los tiempos, á los caprichos de la moda, á los baibenes de las conveniencias personales.

Se impone que releguemos la educación de nuestra fantasía, contraria en muchos casos á la educación de la voluntad, que dirijamos nuestros esfuerzos á ejercitarnos en el paciente y continuado trabajo de los estudios experimentales y en los enérgicos ejercicios de nuestra razón, para buscar la verdad científica á través de sus intrincados razonamientos y múltiples combinaciones, que fortalecen el espíritu, haciéndolo resistente para el trabajo y apto para vencer dificultades y para acrecentar nuestras energías, cómo gimnasia intelectual.

Los estudios científicos dirigiendo las innumerables aplicaciones, la Matemática, elevando la categoría de las ciencias experimentales por la eficacia de sus fórmulas, que hoy han llegado á penetrar hasta en los dominios de la Química. A esta necesidad del predominio de los estudios científicos, exigida por la realidad de los hechos responde la publicación de la *segunda serie* de El Progreso Matemático, que es de esperar halle favorable acogida entre los amantes de las ciencias.

Pero hay otra razón, acaso más poderosa; la solidaridad hoy existente entre todas las naciones cultas, que establece un comercio científico, como especie de enlace intelectual, sin perjuicio de que esto sirva para mantener cada una un puesto digno en el concierto general.

Los filósofos, los médicos, los geógrafos, los estadistas se reunen periódicamente para realizar una obra común, motivada por el vínculo que une á las naciones, y cuyo fin es armonizar las varias aspiraciones é intereses y dar facilidades á la vida social, regida por cierto cosmopolitismo que ha llegado á ser una necesidad y un bien general.

Los matemáticos no podian ser una excepción en este movimiento, unificador, y claramente lo han manifestado de diversas maneras que vamos á exponer.

En el primer *Congreso internacional de bibliografía de las ciencias matemáticas*, verificado durante la segunda quincena de Julio del año 1889, se sentaron las bases de la futura unión matemática entre las diversas naciones. Los resultados de este Congreso fueron altamente satisfactorios, puesto que á él siguió la obra del *Repertorio bibliográfico de las ciencias matemáticas*, cuyo fin es legar al siglo XX la síntesis del trabajo matemático realizado durante el siglo XIX.

Establecida la pauta á que se había de subordinar la clasificación de todos los escritos matemáticos en las diversas naciones, tanto las corporaciones, como los periódicos científicos, como los particulares han reunido sus esfuerzos; y la casa editorial de Gauthier-Villars sigue publicando en forma cómoda é ingeniosa el índice de los trabajos matemáticos, que ha de conducir á una síntesis difícil de realizar por esfuerzos individuales.

Pero esto no bastaba, era la parte formal del asunto, era necesario acompañar al gran cuadro de la ciencia, la realización de su síntesis en trabajos técnicos dirigidos por el espíritu pedagógico y por un criterio filsófico que enlazase las diversas teorías, según su generación lógica é histórica.

El Congreso de Zurich ha sido el primero que se efectuó en 1897 con tales propósitos; y las actas del mismo publicadas el año pasado constituyen un hecho de grandísima importancia, cuyos resultados se afianzarán seguramente en el Congreso de Paris para el que ha principiado á realizar los trabajos preparatorios el comité central, bajo la ilustrada dirección de los eminentes matemáticos M. M. Darboux y Poincaré.

Otros varios Congresos han tenido lugar, y dignos de especial mención son los que anualmente celebran las asociaciones francesa y alemana, los certámenes trienales que desde el año 1897 celebra el Comité Lobatschewsky (para honrar la memoria de este eximio geómetra), cuyo gran premio y medalla de oro alcanzaron los célebres propagandistas y organizadores de la geometría no-Euclídea: el malogrado cuanto eminente talento matemático Sophus Lie cuya pérdida deplora hoy la ciencia, y el célebre profesor de la Universidad de Gottinga Sr. F. Klein.

Ante acontecimientos tales que expresan la actividad científica de todas las naciones, y dan la medida de su cultura, que se traduce en fuerza y bienestar moral y material; sería absurdo que nosotros permaneciésemos ajenos á este movimiento universal, y alejados de la vida intelectual por la que se rigen los pueblos modernos, y expresan su nacionalidad y su carácter propio, dentro del concierto humano.

La Matemática ha sido y es siempre la ciencia por excelencia; constantemente ha caminado con seguro paso; sus descubrimientos han permanecido inmutables en medio de la mutabilidad de todo lo demás.

Aliada de la filosofía en sus principios, sin dejar de mantener esa subordinación á la madre de todas las ciencias, que todas ellas la deben, ha sabido mantenerse libre de los exclusivismos filosóficos y prestarse á ser siempre el fiel contraste de las leyes de la Naturaleza, que fija indeleblemente en sus fórmulas.

La Matemática es además una gimnasia intelectual, ella marca el nivel que mide los pueblos y la fuerza y virilidad de los mismos; porque realmente exige energía el esfuerzo racional que subordina á la ley de la cantidad las leyes de la Naturaleza, y que encadena, con los lazos de la dialéctica, los conceptos de la razón en organismos donde se subordinan á los principios las consecuencias, más sólidamente que en el mundo material se subordinan los átomos á las fuerzas.

Tantos han sido los descubrimientos hechos en esta ciencia, que hoy se ha impuesto la acción colectiva arriba mencionada y se ha reconocido la necesidad de perfeccionar los métodos de enseñanza, para que las inteligencias puedan abarcar siquiera el conjunto de sus teorías, con objeto de llevarlas á las aplicaciones inmediatas.

Los métodos particulares han producido grandes ventajas, y han permitido elevar gradualmente la ciencia por series de síntesis sucesivas, y han alcanzado el objetivo de proporcionar cada vez mayor número de conocimientos con un esfuerzo intelectual decreciente, es decir, la eficacia de los métodos ha aumentado la capacidad científica de los individuos.

Los métodos proyectivos en Geometría han extendido indefinidamente los dominios de esta ciencia; los métodos simbólicos han producido igual resultado en el Análisis, y su asimilación con aquélla.

Pero sobre los métodos particulares se halla el método general ó formal, que hoy se impone para coordinar los riquísimos materiales de la ciencia matemática.

Emancipada por completo la Geometría del número, merced á la iniciativa de Staudt, y á los esfuerzos reiterados de los geómetras contemporáneos que han llevado á un alto grado de perfección este fin científico, ya puede dicha rama de la Matemática figurar en orden distinto y preceder al Algebra como lo ha declarado el célebre geómetra Herr Klein en el Congreso de Dusseldorf.

Y también, ya que en una ciencia puramente especulativa cual es la matemática en sí, es decir, como desenvolvimiento de las leyes de la dialéctica, aplicada á todo lo que entra en el concepto de cantidad, no basta el desarrollo dogmático, que si es eficaz para mantener la ilación, el encadenamiento de verdades en un organismo, cada vez más perfecto, y tanto más cuanto mayor y más variado es el conjunto de sus verdades, no lo es para ilustrar al alumno; necesario se hace el extender los estudios crítico é histórico de esta ciencia, para ver en ellos su génesis, como también ha manifestado el Sr. Klein, que con su autoridad seguramente influirá en los planes de enseñanza, cuya reforma es más necesaria que en ninguna otra nación en la nuestra, donde la rutina ha producido un estancamiento ó retroceso del cual urge salir.

Pero no basta el permanecer en el dominio de las abstracciones que forman la ciencia, es necesario descender á las aplicaciones concretas, y entre ellas encontramos el organismo de la enseñanza que debe constantemente perfeccionarse, para elevar la cultura científica al nivel medio que hoy tiene en las naciones adelantadas, y en esto existen muchas deficiencias que es necesario señalar. El plan que nos proponemos desarrollar es vasto.

En la parte especulativa se publicarán trabajos de carácter general dentro del dominio de la crítica científica, que expresen, ya la generación lógica, ya la histórica de la ciencia y también trabajos sobre asuntos especiales de caracter puramente técnicos, que puedan servir á los alumnos de Facultad y á los de carreras especiales como complemento de sus estudios, y además se ejercitará la actividad con colecciones de problemas.

En el orden concreto, preciso será descender también á tratar de la organización de la enseñanza y de la educación científica, hoy excesivamente descuidada entre nosotros; y señalar algunos vicios ó defectos de la misma y el indicar los medios de evitarlos, será tan provechoso como el exponer las más interesantes teorías, puesto que equivaldrá á facilitar los medios de adquirirlas con el auxilio de los métodos que, como su etimología indica, son los caminos de la ciencia.

Se publicarán las noticias más interesantes del movimiento científico, ya expresado por acontecimientos extraordinarios, ya concernientes á altas individualidades ó corporaciones científicas, á inventos ó alteraciones dignas de mencionarse en los progresos de la ciencia ó de la enseñanza, para lo que destinará la Revista una sección denominada *Crónica científica* y otra de *Bibliografía matemática*.

En resumen, nuestro lema será: *El desenvolvimiento matemático como base de la educación científica.*

LA REDACCION

APUNTES PARA UN PLAN DE EDUCACIÓN CIENTÍFICA

Ya que está próximo el momento de fijar nuevos rumbos á nuestra decadente instrucción y educación pública, como base de nuestro renacimiento, que solo puede depender de estos factores importantísimos del progreso, parece oportuno el hacer una reseña de la altura á que han llegado las Facultades de ciencias, que dan vida á las artes, industrias y todo género de profesiones técnicas, en otras naciones, que deben servirnos de modelo digno de imitación.

Podremos ver también de paso, el desequilibrio enorme que acusa nuestro estancamiento científico durante muchos años, y la necesidad imperiosa de hacerlo desaparecer, si no queremos vernos envueltos en una ruina material y moral, porque la primera atrae necesariamente la segunda.

Principiaremos por presentar la serie de errores que han subsistido en los planes de enseñanza, para después ofrecer el cuadro de estudios seguidos en algunas de las más importantes universidades extranjeras.

Desde luego consignaremos, como preliminar necesario, que la organización de nuestros estudios ha sido relegada siempre á último término; y puede afirmarse que desde la ley de Moyano, de 1857, no ha habido, al parecer, tiempo ni ocasión de tratarla seriamente.

El discutir si la Geometría debiera estudiarse conforme al plan de Euclides ó al de Legendre, si la Geometría debe ó no preceder al Álgebra; si la Geometría analítica pudiera estudiarse en un primero ó segundo curso de ciencias, ó el cálculo infinitesimal debiera tener un lugar más ó menos ventajoso; si los físicos y químicos deben llegar á cierta altura en conocimientos matemáticos, si los profesores han de reunir tales ó cuales condiciones, si los ejercicios que prueban á un alumno ó á un profesor debieran ajustarse á reglas fijas, estudiadas y aquilatadas conforme á un examen concienzudo; todo esto y otros asuntos que fuera prolijo enumerar no ha sido digno de examen con la asiduidad correspondiente á la importancia del asunto, por las personas peritas y por las corporaciones competentes, que pudieran hacer prevalecer su dictamen contra el desconocimiento de muchos detalles técnicos, que es preciso no olvidar en cuestión tan delicada como la de la educación científica, que forma una parte importantísima de la educación nacional.

Solo para promover reformas en la enseñanza de los ELEMENTOS DE EUCLIDES intervinieron las corporaciones inglesas *Association for the improvement of Geometrical Teaching*, *Comitee of Britisch Association y Body of Head Masters*, y en la polémica que trascendió hasta Francia é Italia, intervinieron el sabio profesor de la Universidad de Burdeos M. Hoüel, y los ilustres geómetras italianos, Brioschi y Cremona en pro de los Elementos de Euclides, hasta conseguir del Gobierno italiano la adopción de esta obra, que limitó en 1870 esta restricción á la Geometría plana.

Hoy vemos que la sociedad italiana *Mathesis* gestiona con el Ministro de Instrucción pública de Italia la fusión de las geometrías plana y del espacio en la segunda enseñanza. En el Congreso de Dusseldorf, el ilustre profesor Herr Klein propuso recientemente que en los planes de enseñanza la Geometría preceda al Algebra. Y todas estas mociones de las sociedades ó autoridades científicas trascienden hasta los Gobiernos, que reforman los planes de la educación y enseñanza en conformidad con los dictámenes científicos y técnicos de la más alta valía, y que conducen al adelantamiento de la cultura, y por consiguiente á las mejoras y ventajas materiales que éstas reportan en todos los organismos del Estado

Si estos detalles concernientes al modo de enseñarse una sola asignatura constituyen asunto digno de atención, lo es en más alto grado el orden y la disposición de las enseñanzas en cada Facultad; y esto, que es lo más descuidado entre nosotros, afecta de una manera decisiva á los resultados finales, pues el tiempo que trascurre en un régimen deficiente es tiempo perdido, que á la larga se traduce en desventajas manifiestas é irreparables.

Desde hace veinte años, en nuestras Facultades de ciencias, contra lo que acontece en otras Facultades, se dispuso el llevar al segundo año la asignatura que se denominó *Complemento de Algebra* y que era el comienzo natural de los estudios matemáticos en las Universidades sustituyéndoles, por un *primero y segundo curso de Análisis*, retrasando hasta el tercer año *el Cálculo infinitesimal,* verdadera llave de todas las ramas de dichos estudios, todo con pueriles motivos, produciendo el deplorable resultado de que los alumnos no tengan el suficiente tiempo de afianzar estos conocimientos en las aplicaciones que de ellos pudieran hacer en los cursos ulteriores.

En Italia, durante el primer curso, estudian los aspirantes al doctorado en Matemáticas puras, Física y Química, las asignaturas siguientes: Física esperimental, Algebra, Geometria analítica y proyectiva, con ejercicios de Geometría analítica y proyectiva.

El 2.º curso comprende: Química general, cálculo infinitesimal, Geometría descriptiva, ejercicios de Química, de Física y de cálculo infinitesimal.

En el segundo bienio, que comprende dos cursos, los aspirantes al doctorado en matemáticas, estudian Astronomía, Geometría superior, Análisis superior, Mecánica racional, Mecánica superior, Geodesia, Física matemática y Teoría de las sustituciones y aplicaciones á las ecuaciones algébricas (esta última como curso libre).

En cuanto á los doctores en ciencias físicas y químicas bastará manifestar, que además de las asignaturas propias de su sección, estudian la *Mecánica racional* y además, los primeros, la Mecánica superior, la Geodesia y la Física matemática.

¿Qué razón existe entre nosotros: 1.º para retrasar los estudios matemáticos, 2.º para desheredar á los físicos y químicos de varias asignaturas arriba consignadas? Cómo podrán leer los primeros las obras de autores como Lamé, Mathieu, Resal, Maxwell, Poincaré? ¿Podrán seguir los segundos las recientes investigaciones de la mecánica química y de la química física en obras recientes tales como las del profesor belga M. Duhem y del profesor de la Universidad de Berlín Van 't Hoff.

Para demostrar la insuficiencia de nuestros estudios matemáticos, bastará citar los planes de las Universidades de Estrasburgo, Gottinga y Harvard University.

En Estrasburgo y en Gottinga los cursos elementales comprenden las asignaturas: Geometría analítica de dos y tres dimensiones, el cálculo diferencial é integral, la introducción á la geometría sintética (proyectiva), la mecánica técnica y la geometría de posición; además existe un curso de utilidad incontestable cuyo objeto es la *Enciclopedia* de las matemáticas elementales.

Los cursos superiores comprenden cuatro grupos:

1.º Geometría analítica de tres dimensiones, según los métodos recientes.—Teoría de las curvas alabeadas y de las superficies.—Teoría de la curvatura de las curvas y de las superficies. —Mecánica analítica.—Teoría del potencial.

Grupo 2.º — Integrales definidas.—Ecuaciones diferenciales ordinarias.—Ecuaciones derivadas parciales de la física matemática.—Cálculo de variaciones.—Teoría de los grupos de transformación (según Lie).

Grupo 3.º — Teoría general de las funciones.—Las ecuaciones diferenciales lineales, tratadas desde el punto de vista de las funciones.—Funciones elípticas.—Funciones hyper-elípticas. —Funciones abelianas y funciones θ.

Grupo 4.º. — Algebra superior.—Teoría de los números. —Teoría de las invariantes.—Teoría de los números algébricos. —Teoría de los grupos finitos.—Cálculo de las probabilidades.

También la *Historia de las matemáticas* figura en el programa de la Universidad de Estrasburgo.

En *Harvard University* se estudia para la clase: *Primarily for Undergraduates*: Logaritmos, Trigonometría plana y esférica, Geometría analítica plana (curso elemental), Algebra, Geometría sólida, Trigonometría y Geometría analítica plana, cálculo diferencial é integral (primer curso), Elementos de mecánica.

Para la clase de *undergraduates* y *graduates* se estudia: Geometría superior, Teoría de las curvas y de las superficies (primer curso), Curvas planas algébricas, especialmente las de tercer grado en coordenadas-puntos y líneas.— Teoría de las curvas y superficies (2.º curso). Cuaternios con aplicaciones á la Geometría y á la Mecánica (2.º curso).—Séries trigonométricas.—Introducción á las armónicas esféricas.—Función potencial.—Teoría de las funciones (curso preliminar).—Teoría de los números.—Hidrostática.—Hidrodinámica.—Funciones fuerzas, funciones potenciales de velocidad y sus aplicaciones. —Teoría de Lie aplicada á las ecuaciones diferenciales.—Teoría de las superficies.—Teoría de las funciones (2.º curso). Teoría de las funciones, según Riemann.—Funciones definidas por las ecuaciones diferenciales lineales.—Teoría de los movimientos planetarios.

Hay además cursos de lecturas é investigaciones dirigidas por los profesores acerca de:

Picard, Tratado de Análisis.—El Icosaedro y las funciones modulares elípticas.—*Euclides* y las hipótesis de Geometría.

Además hay cursos acerca de: Algebra lineal asociativa.—El Algebra de la lógica.—Cuestiones selectas de los cuaterníos.

—Forma de la Tierra.—Elasticidad.—Métodos de la Física matemática.—Transcendentes abelianas y elípticas.

Los cursos de Astronomía comprenden: Astronomía descriptiva.—Astronomía práctica.—Astronomía esférica.

Tendencias a llevar las teorias hacia los elementos. En un principio, los nuevos descubrimientos pertenecen á un reducido círculo, constituído por las eminencias capaces de penetrarse de ellos y de apreciar desde luego su verdad y su trascendencia; más tarde llega la época de la vulgarización, de ponerla al alcance de inteligencias inferiores.

Los apéndices de la Geometría de los Sres. Rouché y Comberouse expresan esta tendencia; pero en esta obra no se hallan todavía fundidas ó asimiladas con los elementos euclídeos las teorías de la Geometria moderna, creada por Chasles.

La obra *Lerhbuch der Arithmetique und Algebra* del profesor de la Escuela politécnica de Karlsruhe in Baden, Sr. Schroeder, ofrece un ejemplo del descenso de los conceptos combinatorios y de las clases lógicas hacia la teoría del cálculo elemental, tendencia manifestada, también en la *Teoria delle Grandezze*, del profesor de Turin, Sr. Bettazzi, en la obra *Grundlagen der Arithmetik* del Sr. Schubert, con que comienza la magistral obra *Encyclopedie der Mathematischen Wisenchaften*, publicada desde fines del año pasado bajo los auspicios de varias academias y sociedades científicas alemanas.

Las elegantes *Vorlesungen über Geometrie* de Clebsch expresan una unión sistemática de las geometrías sintética y analítica con el Algebra de las formas; y esta vulgarización de la nueva Algebra, debida principalmente á Boole y Cayley, fué adaptada á la enseñanza clásica por el profesor Salmon, que llevó á este dominio los fecundos conceptos de los elementos en el infinito y los elementos imaginarios, expuestos primordialmente en los magistrales tratados de Geometría, de Plücker.

Entre las obras que expresan esta tendencia á incluir teorías superiores en tratados elementales, podemos citar la *Géométrie analitique* de M. de Longchamps, que ha llevando también al Algebra algunas nociones del cálculo infinitesimal, como lo hace el Sr. Comberouse.

Dicha tendencia puede observarse de igual manera en algunas obras recientes de cálculo infinitesimal, tal es el *Traité d' Analyse* de M. Picard, que comienza con la noción de integrales definidas, donde éste sabio profesor reune teorías tales como las del potencial, las de Gauss sobre la curvatura de las superficies, las de Lamé acerca de las coordenadas curvilíneas, los trabajos del Sr. Schwarz sobre la representación conforme, las funciones armónicas, las integrales abelianas y el estudio de las funciones en las superficies de Riemann, la extensión de los teoremas de Galois y de Lagrange respecto al grupo de una ecuación á la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, cuyas analogías con las ordinarias establece, introduciendo los conceptos de grupos de transformaciones de Lie.

Esta tendencia al descenso del cálculo integral hacia el diferencial, ó mejor, á la fusión de ambos, se advierte en el *Cours d' Analyse* de M. C. Jordan que aplica desde luego á esta rama superior la teoría de los conjuntos del profesor de Halle Herr Georges Cantor.

Por último, nuevo testimonio de esta tendencia ofrece la obra *Elements d' Analyse mathèmatique á l' usage des ingenieurs et des physiciens*, publicada recientemente por M. Apell.

Tendencia a la division de las enseñanzas. Esto es conforme con el orden de la Naturaleza, en general, y con las leyes del desarrollo intelectual en particular.

La inteligencia humana, en cada una de las épocas de la historia ha adquirido la ciencia de un modo gradual, en esta adquisición no siempre la luz de la verdad ha brotado con toda su intensidad; pero la ciencia ha experimentado un progreso en su conjunto; y cada grado de este progreso ha contenido particularmente algo de los progresos anteriores, ha habido una mezcla de los crecimientos por *yuxta-posición* y por *intus-susception*, que se nota en la Naturaleza.

El desarrollo de la ciencia en cada individuo sigue en reducida escala, las leyes del desenvolvimiento general; por eso á los ciclos de la Naturaleza deben corresponder ciclos de la enseñanza.

Ejemplos de esta división de cada ciencia en estudios parciales podemos observar, especialmente en las Universidades germánicas y anglo-sajonas, según arriba hemos expuesto.

Contrario á esta ley ha sido el procedimiento seguido en nuestras Facultades de ciencias, de retrasar el estudio del Algebra superior y correlativamente los de la Geometría analítica y Análisis infinitesimal, por fijarse en ciertos detalles secundarios que puede salvar la buena voluntad del profesor, no empleando de algunas teorías más que las nociones precisas, para poder explicar otras, cuyo orden de prelación se impone dentro del plan general y de las conveniencias, para facilitar y abreviar los estudios, llegando por el camino más corto á los resultados más importantes y á las aplicaciones más útiles, descartando de paso lo que pueda por el momento convertirse en inútil bagaje.

Orden y disposicion de las enseñanzas. Ya hemos indicado que no es de rigor que tal ó cual asignatura preceda ó siga á otra en la práctica de la enseñanza, por màs que tengan su orden natural en el organismo de la ciencia; así pues, no es indispensable que antes de estudiar Geometría analítica se estudie el Algebra superior, ni que el Cálculo infinitesimal siga rigurosamente á éstas.

Los escasos conceptos fundamentales ó categorías permiten distribuciones varias entre los objetos á ellas subordinados. Los progresos de la Matemática han hecho desaparecer aquellas divisiones convencionales hasta cierto punto, de carácter provisional, denominadas Aritmética, Geometría, Algebra etc, pues los conceptos de orden, combinación, número, extensión se pueden aplicar de muy varias maneras, compenetrarse en unas ocasiones, separarse en otras; conduciendo á hacer de la Matemática, no un agregado de estudios heterogéneos, sino un sistema homogéneo en el que ejercen igual influencia aquellos primordiales conceptos, que si en la síntesis se disponen según cierto orden, cuando se trata de su asimilación á la inteligencia mediante la educación y la enseñanza, pueden desprenderse del todo en cantidad y forma adecuada, para llegar á dicha asimilación.

Los hechos confirman este aserto, pues Legendre y sus imitadores adoptaron nueva disposición en los elementos de Euclides. Los descubrimientos de Abel y de Galois permitieron pasar de la disposición que observamos en los tratados de Algebra, donde predominaba el carácter analítico y el problema de la resolución numérica de las ecuaciones, hasta el nuevo tratado de Algebra del profesor de Leipzig Herr H. Weber, en el que predominan las teorías combinatorias de las sustituciones y el concepto de orden, dominante en las teorías de los profesores Cantor y Dedekind.

Aunque el empleo simultáneo de las figuras en el plano y en el espacio se observa ya en las obras de Monge y de Staudt, y desde el año 1881, ya algunos autores han intentado el prescindir de esta división arbitraria, que podemos considerar como transitoriamente convencional, podemos calificar de novedad y resultado beneficioso para la enseñanza, la *fusión de la Geometría plana con la del espacio,* hecha sistemáticamente por los profesores Lazzeri y Bassani de la Real Academia naval de Livorno en su obra *Elementi di Geometria*, donde además se ha evitado el empleo de las proporciones, haciendo dicha rama de la Matemática, independiente de la Aritmética y del Algebra.

Finalmente citamos la trascedental reforma, que sería la de posponer el Algebra á la Geometría en los planes de enseñanza, innovación propuesta por el ilustre Klein, y que realmente tiene su primera razón en el hecho de haber precedido Euclides a Diofanto en algunos siglos; y acerca de este asunto, creemos oportuno el reproducir, lo expuesto en el folleto: *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales* (1877):

«El desárrollo de la inteligencia humana varía de naturaleza en tres distintos periodos, ó más bien, en cada uno de estos se nota el predominio de una de sus facultades sobre las demás.

»En el primero, la intuición empírica ó percepción, la memoria y la imaginación anulan casi por completo el desarrollo de las otras facultades. No se puede generalizar, abstraer, inducir, ni deducir, si no hay elementos para estas superiores funciones de la inteligencia.

»Adquirir materiales para el conocimiento científico, es el primer trabajo de la inteligencia que se efectúa también en el periodo más apropiado, el del preponderante desarrollo y ejercicio de la memoria, de las percepciones y de la imaginación.

»El segundo periodo de desarrollo intelectual, es pues, el de la inducción, generalización, abstracción y clasificación.

»Las ideas abstractas conservan el carácter de contingentes, propio de los objetos y fenómenos observados que les han servido de fundamento, y no pueden llenar las aspiraciones del espíritu en el tercer periodo, el más perfecto de su desarrollo; pues la razón, excitada por las ocasiones de ejercerse tan repetidas que se le han presentado, descubre en su fondo algo á que no satisfacen las ideas abstractas, y ve lo necesario opuesto á lo contingente, lo infinito á lo finito, la causa dominando al efecto, la ley al fenómeno, la condición imponiéndose á lo condicionado.

»La enseñanza sigue estas fases de la vida intelectual, que señala con sus tres divisiones en primaria, segunda ó preparatoria y superior.

»La enseñanza debe corresponder á las fases ya anteriormente indicadas del desarrollo intelectual. Las percepciones y recuerdos, las ideas abstractas y las ideas racionales son los tres puntos de vista para fijar el plan.»

En el folleto á que nos referimos, consideramos necesario expresar la graduación de los estudios matemáticos, conforme á un plan educativo, por medio de cinco tratados, cuyo contenido se manifiesta como sigue:

«El primer tratado llamado *Exposición preliminar ó intuitiva*, contendrá las definiciones, divisiones y operaciones, correspondientes á la Aritmética, ciencia del número, es decir, la descripción del objeto y sus variedades y la parte práctica, cuya justificación es un análisis intuitivo de escasa dificultad; después seguirán las definiciones y divisiones pertenecientes á la Geometría, ciencia de las figuras, cuyo objeto, más concreto é inteligible que el del Algebra, cuyos métodos más numerosos que los de ninguna otra parte de la Matemática, la hace muy propia para mostrar desde luego los medios que ha de emplear la inteligencia en la demostración y resolución de problemas. La memoria y la intuición empírica son las funciones intelectuales casi exclusivamente ejercidas en esta parte.

»El segundo tratado será la *Metodología*, que principiará por consideraciones generales respecto al teorema y problema, distinción de uno y otro, partes de que constan y numerosos ejemplos prácticos para ejercitar en distinguir la hipótesis de la tésis, los datos de las incógnitas y en obtener el teorema recíproco de otro dado; seguirá una ordenada descripción de los métodos de demostración, empezando por los geométricos de superposición, rebatimiento y giro, de carácter práctico, concretada á las demostraciones de teoremas muy sencillos; después se enseñará el método de la *cuarta proporcional* y de las *rectas antiparalelas*, pasando á los generales de *sustituciones sucesivas* y de los *límites*, para dejar en último término el *ad absurdum* que se expondrá en sus tres casos La *Metodologia* dará como resultado poner en conocimiento del alumno los diferentes procedimientos matemáticos que se combinan para demostrar y resolver las cuestiones.

»El tercer tratado debe ser la exposición razonada de la ciencia elemental en sus cuatro partes: *Aritmética*, *Geometría*, *Algebra y Teoría de las funciones circulares* con la *resolución númerica de los triángulos rectilíneos*. En virtud de lo ya expuesto, bastará indicar el método ó métodos demostrativos empleados para cada caso, desarrollándolos, á lo sumo, en los primeros ejemplos ó en algunos que presenten dificultad ó circuntancias notables. Esto evitará el trabajo más difícil para el alumno que estudia los textos actuales, consistente en deducir de una larga relación lo esencial, que constituye las demostraciones, es decir, un análisis de la doctrina expuesta, para comprender sus extremos, y una síntesis que resuma las ideas capitales con su natural dependencia, para ponerle en posesión de la verdad, no mediante la memoria sino mediante el juicio, lo cual supone un gran discernimiento, un buen criterio y facilidad para traducir las palabras en ideas, con reciprocidad. Esta tercera parte dará por resultado perfeccionar al alumno en el conocimiento de los métodos que superficialmente adquirió durante el anterior, por efecto del gran ejercicio práctico que constituye la exposición demostrada de la ciencia elemental.

»La *Crítica* dará por resultados hacer pasar el conocimiento expontáneo de la ciencia adquirida por el alumno, á conocimiento fundado. Aprenderá en este tratado las razones del orden expositivo y del empleo de los métodos, y cómo se subordinan y coordinan entre sí las verdades; es decir, cómo fundan las unas á las otras, y según qué leyes ó reglas se sustituyen. En éste, como en el anterior tratado, hay un predominio superior de la razón sobre las demás facultades.

»El quinto y último tratado será una *síntesis general* hecha á priori, prescindiendo de las trabas que impone la necesidad de fundar (en el estado actual de la ciencia) unas proposiciones en otras, es decir, deficiencias en los métodos, y al estado intelectual de los alumnos, que exige con frecuencia alteraciones en la rigurosa exposición sintética. Esta se realizará procurando presentar un cuadro completo, donde aparezcan las verdades según sus conexiones naturales, revelando sus armonías, presentándose como simétrico conjunto, para que la inteligencia, en cuyo fondo reside la idea de orden, lazo universal de las ideas, retenga los conocimientos adquiridos, no por el artificio pasajero de la memoria, sino por una fuerza permanente, capaz de reproducirlas en todas ocasiones.

«El objeto de este quinto tratado es evitar que la inteligencia, agobiada por los detalles, se pierda en la numerosa variedad de éstos, colocándola á una superior altura desde donde le sea fácil distinguir el conjunto de todos los detalles, unidos entre sí por relaciones naturales.»

ESTUDIOS SUPERIORES EN EL ATENEO DE MADRID

LA MODERNA ORGANIZACION DE LA MATEMÁTICA

(Curso breve explicado por D. Zoel G. de Galdeano en Marzo de 1898)

PROGRAMA

CONFERENCIA 1.ª — *Carácter de la Matemática en el siglo XIX.* — Variedad de sus teorías. — Tendencia unificadora. — Conceptos principales que han conducido á la unificación.—Generalidad de las diversas teorias.—Necesidad de una nueva clasificación de éstas.

2.ª — *Teoria de los números* —Influencia de Gauss.—Teorías de Dedekind y Kummer.— Concepto de los conjuntos de Cantor.— Investigaciones de Bois-Reymond.—Moderna exposición de la Aritmética general y de las teorías de las magnitudes y funciones de variables reales.

3.ª — *Geometría moderna.* Carácter propio de la Geometria en la escuela de Monge.—Direcciones dadas por Carnot, Poncelet, Staudt, Chasles, Plücker y Clebsch.—Lo imaginario y lo infinito.— Las geometrías infinitesimales y vectoriales.

4.ª — *Geometrías no-euclideas.* — Geometrias de Lobatschewsky y de Riemann.—Estudio comparativo de los tres géneros de geometrías.—Principales desarrollos de las no-euclideas.

5.ª — *Geometría de* n *dimensiones* — Concepto del hiper-espacio.—Exposición general de la geometria de *n* dimensiones.—Particularización de la de cuatro.—Poliedros de Schlegel.—Nociones acerca del *Analysis situs.*

6.ª — *Algebra.*—Carácter esencial de esta rama.—Principios de Lagrange, Abel y Galois.—Álgebras superiores de Peirce, Dedekind y Weierstrass.

7.ª — *Algebra de la lógica.* —Métodos de Boole y Jevons.—Doctrina de Schrœder.—Principios combinatorios de Grassmann.

8.ª — *Algebra de las formas.*—Correspondencia entre el Álgebra de las formas y la Geometría proyectiva.— Aplicaciones de las sustituciones lineales.—Transformaciones de Cremona.—Problemas de la equivalencia y de la afinidad de las formas.

9.ª — *Teorías de los funciones.*—Dominio del cálculo infinitesimal. Funciones de variables complejas: sus especies.—Periocidad de las funciones.

10.ª — *Unificación de los conceptos de la Matemática en el siglo XIX.*—Nociones acerca de los trabajos de Sophus Lie sobre los grupos de transformaciones.—Resumen del trabajo sintético del siglo XIX.

EXTRACTO DE LA CONFERENCIA PRIMERA

CARACTER DE LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XIX

SEÑORES: Si bien la verdad es tanto más bella cuanto más sencilla, y se impone ella sola con sus propios atractivos, tengo el sentimiento de no poseer el don de la elocuencia para expresar mis propósitos encaminados á reunir en breve síntesis el rico caudal de importantes y fundamentales descubrimientos realizados durante el siglo actual en la ciencia matemática, y que puestos de relieve sobre el fondo de sus inagotables verdades, constituyen un hermoso conjunto, suma de las más preciadas conquistas de la inteligencia humana. Pero si mis deficiencias oratorias no se armonizan con mis propósitos, al menos experimento la satisfacción del cumplimiento de un deber, que creo realizar desarrollando el tema «*La moderna organización. de la Matemática*» ciencia menospreciada entre nosotros por efecto, según manifestó el señor Menendez Pelayo en la *España Moderna*, del *utilitarismo*, esa aspiración constante y casi única hacia el fin práctico y la utilidad inmediata de la ciencia, cuando ésta es esencialmente idealista.

Los idealismos produjeron mártires, como el célebre matemático Abel, que murió en la miseria, dejando una aureola de gloria para la humanidad y para su patria; los idealismos han sido energías condensadas de las naciones, que han creado las escuelas científicas.

Exísten en Matemáticas escuelas francesa, inglesa, alemana á cuyo frente aparecen los nombres de Cauchy, Monge, Riemann, Hamilton, Grassmam. etc. España no tiene escuela propia, porque no ha cultivado la ciencia por la ciencia.

Antes de entrar en materia, observaré que, siendo la Matemática ciencia eminentemente abstracta é ideal, ciencia de puros conceptos que emanan de nuestra razón, se encuentra en sus fronteras con la Metafísica, esta ciencia de los principios y de las causas que la ilumina con las nociones primordiales de espacio, tiempo, fuerza, pero sin compenetrarse.

Los sistemas filosóficos son puntos de vista exclusivos para explicar cuanto conocemos y cuanto existe, y son diversos, según el punto de partida; la Matemática es una, inmutable é independiente de todo criterio especial, es una edificación siempre acrecentada con los descubrimientos del presente, que se acumulan á los de tiempos anteriores, formando organismos cada vez más ricos, pero siempre de validez incontestable, ilustrada par los conceptos metafísicos; y aun en algunas de sus ramas, por ciertos postulados que recoje de la experiencia, se edifica sobre sus definiciones, que adquieren el valor de principios fundamentales, y llena el molde vacío de la lógica con la materia de los conceptos matemáticos.

Comenzando á desarrollar la tésís de esta lección, podremos considerar la Matemática anterior al siglo XIX cuyo periodo áureo se halla en las épocas de Descartes, Newton y Leibnitz, periodo de creación de sus ramas más fecundas, donde se llegan á enlazar el número y la extensión en el algoritmo infinitesimal. Las últimas ramificaciones de estos descubrimientos se hallan en los trabajos de Euler y Lagrange.

En este gran periodo predomina el análisis y la individualización; la ciencia todavía oculta á las miradas de la inteligencia, había de aparecer lenta y gradualmente oculta bajo una serie de problemas, cuyas soluciones completas ó incompletas eran otros tantos pasos hacia su constitución.

La cuadratura del círculo, la trisección del arco, la medición de las áreas eran otras tantas ocasiones para descubrir la verdad envuelta en los encadenamientos del método analítico, este precioso instrumento de investigación creado por Pitágoras y ejercido por Platón en su célebre Academia.

La verdad no se presentaba simétrica, ordenada en sistema; pero tenía aquella rigidez lógica que admiramos en la monumental obra de Euclides, donde el método ad absurdum hace brotar de cada proposición las proposiciones envueltas en ella mediante las relaciones de negación, afirmación y reciprocidad, y que hoy corresponde á la relación proyectiva, á la correspondencia silogística y á la correspondencia unívoca, los más fecundos conceptos de sistematización.

El análisis, llevando un encadenamiento desde una verdad supuesta hasta una verdad demostrada podía, desde entonces, presentarse bajo la forma de teorema, enriqueciendo paulatinamente el organismo científico, y llevando hacia las síntesis parciales, conforme las que la ciencia se ha ido modelando á través de los siglos.

La Aritmética de Diofanto llevaba el gérmen de la teoría de las ecuaciones, que ha constituido otro de los grandes problemas, tanto, que aquellas soluciones abandonadas en la época de los árabes y hasta en la de Vieta, habían de ser los fundamentos para expresar y conocer la cantidad bajo las afecciones cualitativas, que han conducido á la vasta teoría de las cantidades ideales, imaginarias, á las claves, à todas las formas del simbolismo actual.

Desde que la resolución de las ecuaciones de 3.º y 4.º grado hizo entrever la posibilidad de resolverse el problema del Algebra, todos los grandes talentos matemáticos ejercieron en él su actividad. y los Descartes, Newton, Rolle, Lagrange, Sturm, Cauchy, dejaron huellas indelebles de su genio en el tratado de las ecuaciones numéricas, hasta que el inmortal Abel, demostrando la imposibilidad de resolverse aquél de una manera general, trazó nuevos rumbos á la ciencia, fundando, sobre la teoría combinatoria de las sustituciones, el Algebra moderna, que se había de extender finalmente hasta la teoría de los grupos de transformaciones.

Descartes enlaza el número con la extensión en su Aplicación del Algebra á la Geometría, y amplifica los dominios de la cantidad con la interpretación de las cantidades negativas.

Esta unión de lo abstracto y lo concreto, del número puramente subjetivo con el espacio, entidad objetiva, con sus cualidades propias, se hace más ostensible y permanente en el algoritmo infinitesimal de Leibnitz, donde se funden el número y la extensión bajo el algoritmo infinitesimal, y en el cálculo de las fluxiones de Newton, donde la cantidad afecta apariencias geométricas, bajo la acción del fluir, mediante un nuevo factor, el movimiento; y estas nuevas teorías, desenvueltas por los Bernouilli, L'Hospital y Euler, llegan, como espléndida herencia al siglo XIX, que sobre ella ha de fundar ulteriores conquistas.

Por otra parte, la Geometría seguía rígida é inalterable en los Elementos de Euclides, si bien Desargues y Pascal heredaban las hermosas creaciones de Apolonio acerca de las cónicas, y echaban los cimientos de la Geometría proyectiva al importar el concepto de la relación perspectiva, y Fermat, enriqueciendo con sus propios inventos la Aritmética de Diofanto, elevaba sobre la Aritmética ordinaria, la teoría de los números, que había de sistematizar Gauss, en este siglo.

Tales son los precedentes de la Matemática moderna; con este brillante legado inaugura el siglo XIX su labor encaminada á cambiar la faz de la ciencia. Esta se había elevado, sobre la base del análisis, que redujera cada problema á una verdad demostrada; el problema se transformó en teorema, el análisis en síntesis, los esfuerzos lentos de la invención en las breves formas de la exposición sistemática.

Al enumerar los brillantes descubrimientos debidos á nuestro siglo, que superan en variedad y número á los de los siglos anteriores, puesto que á la organización de las teorías acompañan inventos de toda especie y generalizaciones amplísimas de conceptos, heredados en gérmen de los grandes inventores del siglo XVII, creemos útil esquematizar, estos inventos con los nombres ilustres que llenan esta época de progreso y de desarrollo en todos los ramos del saber, y que será timbre de gloria para la humanidad y recuerdo perenne de las generaciones venideras.

Gauss, cuyo talento universal abordó todas las cuestiones capitales de la ciencia, en la teoría de los números, cuyo puesto de honor le corresponde juntamente con sus sucesores Dirichlet, Kummer y Dedekind, resume con estos nombres la teoría de los números del siglo XIX; y con su podersa iniciativa, iluminó los nuevos descubrimientos de Bolyai y Riemann, que con los de Lobatchewsky originaron los sistemas posibles de Geometría, que reducen á un caso particular la Geometría, hasta entonces fundada en la admisión del postulado euclídeo, y llevan á la generalización del concepto de espacio, en conformidad con las generalizaciones del Análisis, que conducen al estudio de las variedades de n dimensiones.

Cauchy, al acoger bajo la influencia de su genio creador la representación geométrica de las cantidades imaginarias que dió Argand, entrega á la ciencia el precioso legado de la teoría de las funciones analíticas, que hoy llena el vasto dominio de la Matemática. Puiseux, Liouville, Hermite y Briot completan estos desarrollos, que unidos á los descubrimientos de Legendre, Abel y Jacobi sobre las funciones elípticas y á la ingeniosa y transcendental representación de Riemann, seguida en Alemania por Newmann, Durége y otros, nos elevan hasta las teorías de las funciones abelianas é hiperelípticas.

Monge, creador de la Geometría descriptiva, al referir figuras distintas por medio de relaciones proyectivas, crea el concepto de lo imaginario geométrico, é impulsa esa grandiosa unificación, buscada primero por Carnot, al pretender referir los signos del análisis á las transformaciones continuas de las figuras, por medio de las correlaciones directa, inversa y compleja. que luego Poncelet afianza, exponiendo su principio de continuidad con su original teoría de las cónicas suplementarias y las cuerdas ideales y con su método de proyección, es decir, importando á la geometría los fecundos conceptos de lo imaginario y lo infinito, que tanta unidad dieron después á la Ciencia.

A los nombres de Monge, Carnot y Poncelet, se agregan los de Chasles, Staudt, Plücker y Clebsch que resumen la geometría moderna.

El Algebra, que se había detenido en los descubrimientos de Lagrange, Sturm y Cauchy, bajo la influencia de la teoría combinatoria de las sustituciones, se ofrece con nuevo caràcter más científico, según la crearon Abel y Galois, dentro de la extensión de los grupos de transformaciones discontinuos.

Sin ir más adelante en esta reseña histórica, podemos ya notar las tendencias unificadoras de las diversas teorías, al mismo tiempo que nuevos elementos, importados en la ciencia, la amplifican de un modo prodigioso.

El Algebra, desviándose algún tanto del concepto de continuidad, se somete al de combinación. El cálculo generalizado se aplica á objetos cuyo concepto se eleva sobre el de cantidad; las operaciones particulares se agrupan bajo la operación combinatoria; el principio de las leyes formales del cálculo exige tan solo el respetar el principio lógico de contradicción.

Sobre la relación proyectiva, que determinan la relación anarmónica ó las formas armónicas, ó afinidad lineal; y sobre la correspondencia dualística de las figuras polares se hallan, en particular, las correspondencias de Cremona ó birracionales y la correspondencia de los conexos ó complejos de puntos y de rectas, que supera á la polaridad, traduciendo geométicamente formas dependientes de un doble sistema de variables, y en general, otras correspondencias subordinadas á la vasta teoría de los grupos, que dan origen á las teorías de los grupos fuschianos, funciones automorfas, representación conforme y á las correspondencias que se estudian en el *Analysis situs*, ó Geometría de situación, fundada por Riemann.

La Geometría proyectiva quedó reducida por Cayley á una parte de la geometría métrica, desde que en su sexta *Upon Quantics*, basándose en su original noción de distancia, consideró, no precimente las propiedades de una figura en sí, sino en sus conexiones con lo que llama *lo absoluto*, ó la *cónica del infinito*, pues, como dice el Sr. Klein en su memoria, *Sur la Géométrie dite non euclidienne*, puede constituirse una métrica proyectiva general en el espacio, relativa á una superficie de segundo grado, elegida arbitrariamente como superficie *fundamental*, determinación métrica que da, según la especie de superficie empleada, una imagen para las diferentes teorias de paralelas.

Los nuevos elementos importados á la Matemática exijen, pues, una nueva distribución de las ciencias parciales, ó ramas, que comprende.

Como una rama superior de la *combinatoria* tenemos ya la que estriba en la extensión de las clases, bajo los conceptos de *subordinación* y *supraordinación*, que ha dado origen al Álgebra de la lógica.

Sobre el Álgebra ordinaria aparecen las Algebras simbólicas, susceptibles de varias representaciones geométricas: sobre la Geometría ordinaria la Pangeometría y las geometrías que dependen de la naturaleza de los elementos que se toman como fundamentales, subordinando todas las ramas á la teoría de los grupos.

Como procedimientos, la proyección que, además de ser geométríca, puede ser una correspondencia de elementos, tal cual aparece en los conjuntos de Cantor, que originan las varias agrupaciones que sucesivamente hacen más densas las séries de números enteros, racionales, algébricos, trascendentes, y que se concretan en conjuntos de puntos.

La adjunción es otro de los modernos procedimientos; mediante ésta, Galois consiguió reducir el grupo propio de las ecuaciones resolubles por radicales, y llegó á su resolución.

La adjunción de los elementos imaginarios en el infinito ha dado unidad á las relaciones geométricas, y hecho proyectivas las relaciones métricas, según la teoria de Cayley; la adjunción, en fin, asocia los sistemas de ciertas entidades en otras más generales; y bajo la influencia de estos procedimientos, la Matemática tiende á unificarse dentro de una vasta organización, cuyas ramas principales serán objeto de los siguientes conferencias.

CRÓNICA

Congreso de Zurich.—En conformidad con los acuerdos tomados en el Congreso preliminar de matemáticos, celebrado en Paris bajo la presidencia de M. Poincaré, tuvo lugar en 1897, el primer Congreso internacional en Zurich, donde se reunieron los más ilustres matemáticos de la época actual, cuyo comité directivo se formó por los profesores Geiser, como presidente, Bleuler, Brioschi, Dumas, Franel, Hirsch, Klein, Laisant, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Rudio, Mühll, Vassilief y Weber.

Su objeto era:

1.º Promover relaciones personales entre los matemáticos de las diversas naciones.

2.º Facilitar en las memorias ó conferencias un resumen del estado actual de las diversas ramas de las matemáticas, y ofrecer la ocasión de tratar ciertas cuestiones de reconocida importancia.

3.º Deliberar sobre los problemas y la organización de los congresos futuros.

4.º Tratar cuestiones de bibliografía, de terminología etc., respecto á las que parece necesario un acuerdo internacional. Se trataron por los Sres. Poincaré, Rudio, Hurwitz y Peano las tésis siguientes:

a). Sobre las relaciones del análisis puro y de la Física matemática: b), sobre la organización de los futuros Congresos, c) acerca de la teoría de las funciones analíticas en la época actual: d) lógica matemática, y e) cuestiones de las matemáticas superiores.

Como primer resultado de este Congreso se publicó un elegante tomo titulado: *Verhandlungen des Ersten internationalen Mathematiker Congresses,* donde se contienen los resúmenes de todos los trabajos presentados por los matemáticos concurrentes al mismo.

Otra de las consecuencias fué preparar el segundo Congreso internacional que se celebrará en París del 6 al 12 de Agosto del año 1900, siendo presidente de la *comisión administrativa,* M. G. Darboux y de la *Comisión de trabajos,* M. H. Poincaré.

CONGRESO DE DUSSELDORF. Septiembre 1898. Siguiendo la costumbre adoptada por la Asociación matemático-alemana, se trataron los asuntos, y se presentaron las memorias que semestralmente publica el órgano de esta sociedad *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung;* y es muy digna de mencionarse la interesantisima conferencia que dió el profesor Herr F. Klein acerca de *La Universidad y de la Escuela técnica superior*.

«La enseñanza matemática, dijo el Sr. Klein, debe tener muy en cuenta el desarrollo histórico de la ciencia, debe convertirse en filogenética; en vez de comenzar por nociones abstractas de una lógica irreprochable, la enseñanza debe tener un carácter concreto y despertar de una manera tangible la concepción de las cosas. *La Geometría debe preceder al Algebra.*»

La Sociedad italiana Mathesis. Bajo la iniciativa del profesor de la Universidad de Turín, Sr. Bettazzi, se ha constituido la sociedad de estudios entre los profesores de matemáticas de las escuelas medias, denominada *Mathesis*, cuyo objeto es la mejora y el perfeccionamiento de los profesores, bajo el doble punto de vista científico y didáctico, y cuyo órgano es el *Bolletino della Società* «Mathesis»; y hoy gestiona esta Sociedad, con el ministro de Instrucción pública, la adopción en la enseñanza de los dos perfeccionamientos llevados á feliz término por los Sres. Lazzeri y Bassani en sus *Elementi di Geometria*, á saber, la independencia de la Geometria del cálculo, y la fusión sistemática de la Geometría plana y la del espacio, que seguramente darán muy satisfactorios resultados en la enseñanza, retardando á los alumnos de los Institutos ó Liceos el entrar desde luego en las abstraciones del Algebra, cuya aridez no hay que desconocer en los primeros años de los estudios.

Ciertamente que esta mejora se adapta á anteponer ventajosamente el estudio de la Geometria al del Algebra.

BIBLIOGRAFÍA

Traité d'Algèbre supérieure par *Henri Weber*, traducido del alemán por J. Griess—Gauthier-Villars—1898.

Sin género de duda puede considerarse como acontecimiento de gran interés, para el progreso de la enseñanza, la publicación en 1896 del *Lehrbuch der Algebra*, debido al profesor de la Universidad de Estrasburgo *Herr H. Weber*, hasta el punto de que inmediatamente se ha traducido en lengua francesa, por M. J. Griess, el primer tomo, al que es de esperar siga en breve el segundo.

Sin olvidar las clásicas cuestiones que se resolvieron entre la época de Descartes y la de Lagrange y Sturm, y que han sido el objeto exclusivo de los estudios en los planes de enseñanza, hasta hace pocos años, el Sr. Weber da nueva organización á esta rama de la Matemática, revistiéndola de su carácter propio, pues sin descuidar la parte relativa á la continuidad, hace destacarse del conjunto las teorías combinatorias.

Con este propósito, inmediatameute después de tratar las *Funciones racionales*, en el primer capítulo, donde se expone lo fundamental concerniente á las funciones derivadas, á las funciones homogéneas, funciones reducibles é irreducibles, se hallan expuestas las teorías de determinantes, resolución trigonométrica de la ecuación binomia, ídem de las de 3.º y 4.º grado, siguiendo el procedimiento debido á los Sres. Lipschitz, Dedekind y Frobenius para el cálculo de las raíces, y empleando el modo de razonar, ya extendido en los tratados modernos de Análisis, para establecer la continuidad de las raíces.

El capítulo IV tiene por objeto: *Las funciones simétricas*, el empleo de éstas para el estudio de la discriminante, la resultante y la eliminación, terminando con la transformación de Tschirnhausen y sus aplicaciones.

El capítulo V tiene por objeto las *Transformaciones lineales*, donde se exponen los fundamentos de las teorías de invariantes y covariantes, y termina el libro I con el capítulo IV dedicado á la transformación de Tschirnhausen.

El libro II comprende las materias siguientes: Realidad de las raíces—Teorema de Sturm—Límites del número y del valor de las raíces. Aproximación de las raíces, fracciones contínuas y raíces enésimas de la unidad.

Estas teorías del Algebra, que pudiéramos llamar antigua, se hallan renovadas en la obra del Sr. Weber por su modo de exposición y por el enlace que de ellas ha hecho con otras modernas. Los asuntos más interesantes bajo este concepto son: el estudio de la bezutiana, respecto á la realidad de las raíces, las formas cuadráticas, las funciones esféricas, las investigaciones de Hermite y de Hurwitz respecto al teorema de Sturm, la *teoría de las características* de Kronecker. La comparación geométrica de las diferentes reglas para la obtención de límites de las raíces, según el Sr. Klein.

Bajo los epígrafes: *Fracciones continuas* y *Teoría de las raíces de la unidad*, el Sr Weber ha escrito una *Teoría de los números* muy interesante, y digno precedente del libro III, que bajo la denominación: *Las magnitudes algébricas*, comprende las teorías de Galois y Dedekind, Basta citar los siguientes asuntos: Idea de cuerpo de números, la adjunción, funciones en Ω, cuerpos algébricos, primitivos é imprimitivos, cuerpo normal, resolvente de Galois, grupos de permutaciones, grupo de Galois, grupos transitivos é intransitivos. ecuaciones abelianas y cíclicas, períodos de las ecuaciones y ecuaciones metacíclicas.

La simple enumeración, hecha muy someramente, manifiesta cuán interesante es el Algebra del Sr. Weber, que seguramente dará la pauta para el estudio de esta rama en la actualidad, y acaso durante muchos años.

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES *de deux variables independentes par E. Picard et G. Simart.—Gauthier-Villars*, 1897.

Esta interesante obra parece ser una continuación del muy notable *Traité d'Analyse* de M. Picard, que en su elegante y metódica exposición de la superficie de Riemann estudia sus transformaciones, conforme á los principios del *Analysis situs*, mediante sistemas de secciones y agujeros y la distribución de los lazos correspondientes á los puntos de ramificación, empleando. para la reducción de las singularidades de una función, el teorema de Herr Nöther, que permite reducir el estudio de las curvas al de las que solo tienen *puntos múltiples con tangentes distintas.*

En la *Théorie des fonctions algébriques*, de MM. Picard y Simart, el objeto principal es el estudio de las funciones algébricas de dos variables, basándose en el *Analysis situs*, de cuyos fundamentos hacen una exposición extensa, ocupándose de las integrales múltiples de orden n—1, en el espacio de n dimensiones, de los diferentes órdenes de conexión en los espacios de n dimensiones y de la extensión del teorema de Cauchy, según M. Poincaré.

El capítulo IV trata de *las singularidades de una superficie algébrica y de las invariantes de una superficie, desde el punto de vista de la Geometría de situación*; exponiendo la reducción de las singularidades, los diferentes órdenes de conexión, la conexión líneal y los ciclos lineales.

Al tratar de las *integrales dobles de primera especie*, se estudia el *género geométrico de las superficies algébricas*, los sistemas lineales de curvas trazadas sobre una superficie, el segundo género de las superficies algébricas y el grado del sistema canónico.

El capítulo VIII y último tiene por objeto *las curvas alabeadas algébricas y la fórmula susceptible de dar el género de una superficie.*

Antes de estudiar las superficies que pasan por una curva alabeada, exponen los autores varios teoremas, partiendo de la representación empleada por Cayley para una curva alabeada, esto es, que «una curva alabeada algébrica c se dice de orden ó de grado m, si su perspectiva, tomada desde un punto arbitrario del espacio, sobre un plano cualquiera, es una curva algébrica de orden m; y si se supone hecha esta perspectiva paralelamente al eje de las z, se tendrá evidentemente para todos los puntos de la curva

$$f(x,y) = o \qquad x = \frac{\varphi(x, y_{,})}{\psi(x, y_{,})}$$

representando f una curva plana irreducible de orden m, y x, φ, ψ polinomios en x é y de grados respectivos n y $n-1$ tales, que la curva $\varphi=o$ pase por los puntos de intersección de $f=o$ y $\varphi=o$.

Con este motivo se emplean las *superficies adjuntas*, cuya noción se debe á Herr Nöther, terminando el primer tomo de la obra con la determinación del número de condiciones necesarias para que una superficie pase por una curva alabeada, y el género numérico de una superficie.

Repertorio di Matematiche superiori--*Definizioni, Formole—Teoremi Cenni bibliografici per Ernesto Pascal, Milano, Ubrico-Hoepli (1898).*

El profesor de la Universidad de Pavía Sr. Pascal, ha llevado á la enseñanza, sus profundos estudios sobre el Análisis en sus compendiosos y por esto mismo, fáciles tratados de *Calcolo infinitesimal* y *Exercici é Note critiche di calcolo infinitesimale*, inspirados, como dice en su prólogo, en obras tan dignas de estudio como las de Lipschitz, Mansion, Stolz, Dini, Genocchi-Peano y Harnack, escribiendo manuales muy adecuados para la juventud.

Recientemente ha continuado su propósito de divulgación de las altas teorías matemáticas publicando el primer tomo de su *Repertorio*, dedicado al *Análisis*, que constituye un *Vade-mecum* de los estudiantes y aún, de todos los que se dedican á la Matemática.

Al tratar de los números irracionales y complejos, expone sus representaciones, especialmente según la teoría de Cantor y la de Hamilton, ó sea de los conjuntos y de los cuaterníos, y así puede presentar clara é intuitivamente los conceptos de función y de límite.

Entre las teorías modernas de mayor interés tratadas con la elegancia característica de este sabio profesor citaremos: La teoría de los grupos de sustituciones.—Determinantes.—Series y productos infinitos.—Resultantes.—Discriminantes.—Teoría de Galois.—Integrales indefinidas, definidas y elípticas —Ecuaciones diferenciales, invariantes y parámetros diferenciales.—Sistemas completos de formas invariantivas.—Funciones monógenas, holomorfas y meromorfas.—Puntos singulares esenciales.—Funciones modulares.— Superficie de Riemann.—Integrales abelianas y funciones elípticas. Funciones hiperelípticas, abelianas, eulerianas, circulares, hiperbólicas ó hipergeométricas.—Congruencias de 2.º grado, residuos cuadráticos, equivalencia de las formas y nociones de los números algébricos, según Kummer y Dedekind.

Problémes de Géométrie élémentaire groupés d'aprés les méthodes á employer pour leur résolution par *Ivan Alexandroff*, traduit par D. Aitoff.—París Hermann, 1899.

Una obra de esta naturaleza es muy adecuada para despertar en los jóvenes la aptitud para la investigación personal, al facilitarles gradualmente el poder llegar á la resolución de unos problemas, apoyándose en las analogías que tienen con otros;

El Sr. Alexandroff expone en cada capítulo el método que va á emplear, propone en seguida, resolviendo algunos, los problemas-tipos, y á continuación presenta una colección de ejercicios que fácilmente se resuelven, atendiendo á las reglas generales.

Los métodos empleados en esta interesante obra son: *Lugares geométricos, semejanza, construcciones inversas, simetría, translación, rotación, inversión y aplicación del Algebra á la Geometría.*

CUESTIONES RESUELTAS

Sean A *un punto luminoso,* B *un punto tomado, como el primero, en el plano de un círculo que tiene* C *por centro.*

Se pide obtener el lugar de los puntos M *del círculo donde se refleja el rayo luminoso* AM, *de manera que pase por el punto* B, *cuando el radio del círculo toma valores cualesquira.*

¿Cuál es el problema de máximo que se encuentra en esta cuestión?

Determinar directamente ciertos puntos particulares del lugar buscado

(*Ph. Breton*).

(Solución por el Sr. H. BRORARD)

Debiendo hallarse siempre el punto C en la bisectriz del ángulo AMB, estará á distancias *iguales de las rectas* AM y BM.

Para tener un punto de la curva, bastará pues, trazar círculos que tengan C por centro y trazarles tangentes por A y B.

Estas tangentes se encontrarán en cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4.

Si se consideran las cuatro circunferencias que tengan C por centro y pasen por los puntos M_1, M_2, M_3 M_4, dos de estos puntos corresponderán á reflexiones reales del rayo luminoso AM, los otros dos tendrán solamente una significación geométrica.

Para obtener la ecuación del lugar (M), se procederá de la manera siguiente:

Siendo C el orígen y CA el eje de las y, las coordenadas de A y B serán $(o. a.)$, $(b. a.)$.

Siendo $x^2+y^2=R^2$ la ecuación de uno de los círculos, las rectas AM, BM, tendrán por ecuaciones

$$y = mx + d, \qquad y - b = n\,(x-a)$$

con las condiciones:

$$\frac{d}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{b-na}{\sqrt{1+n^2}}$$

La eliminación de m y n es inmediata y da para el lugar (M) la ecuación

$$d^2 x^2 [(x-a)^2 + (y-b)^2] = [bx-ay)^2 [x^2 + (y-d)^2]$$

La curva (M) es, pues. de 4.º grado.

Como verificaciones, se ve que pasa por los puntos A (o, d), B (a, b), C (o, o) y por el punto D, proyección de C sobre AB. Admite asíntotas rectilíneas cuyos coeficientes de inclinación están dados por la ecuación

$$a^2 c^4 - (d^2 - a^2 - b^2)\, c^2 + b^2 - d^2 = o$$

de donde

$$c^2 = -1 \qquad c^2 = \frac{d^2 - b^2}{a^2}$$

Determinando otros varios puntos, se reconoce que la curva (M) tiene un punto doble en el orígen, con dos tangentes rectangulares.

En cordenadas polares tiene por ecuación:

$$\rho^2\,[(b\cos\omega - a\,\mathrm{sen}\,\omega)^2 - d^2\cos^2\omega] - 2d\rho\,[\mathrm{sen}\,\omega\,(b\cos\omega - a\,\mathrm{sen}\,\omega)^2$$
$$- d\cos^2\omega\,(a\cos\omega + b\,\mathrm{sen}\,\omega)] - ad^2\,[a\cos 2\omega + b\,\mathrm{sen}\,2\omega] = o$$

La curva presenta una analogía de trazado con la estrofoide oblícua.

Observaciones. Cuando el radio AM se refleja sobre la circunferencia, uno de los trayectos AM+MB es *mínimum*, el otro es *máximum*.

Este problema es una reproducción de la cuestión clásica del billar circular.

CUESTIONES PROPUESTAS

254 Sobre los tres lados de un triángulo ABC se toman puntos A', B', C' que dividen sus lados en la misma razón $m : n$; las rectas AA', BB', CC' se cortan en los puntos M, N, P, por los que se trazan, primero, las rectas $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$, paralelas respectivamente á BC, CA, AB, después las rectas $C_2 A_2$, $A_2 B_2$, $B_2 C_2$ paralelas á CA, AB, BC, en fin, las rectas $A_3 B_3$, $B_3 C_3$, $C_3 A_3$ paralelas á AB, BC, CA.

1.° Los vértices homólogos de los 4 triángulos homotéticos ABC, $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ está en tres líneas rectas, que se confunden con las medianas del triángulo ABC.

2.° Las distancias de los vértices del triángulo ABC á los vértices homólogos del triángulo $A_1 B_1 C_1$ son medias proporcionales entre las distancias de dichos vértices á los vértices homólogos de los triángulos $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$.

3.° Determinar las razones de homotecia de los triángulos $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ al triángulo ABC.

(H. Van Aubel).

255 Por un punto cualquiera O, tomado en el plano de un triángulo ABC, se trazan rectas paralelas á las tres medianas AD, BE, CF; sean A_1, B_2, C_3; $A_3, B_1 C_2$; $A_2, B_3 C_1$ los puntos en que estas paralelas encuentran respectivamente á los lados BC, CA, AB. Demostrar que los dos triángulos $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ valen cada uno el cuádruplo del triángulo ABC.

(H. Van Aubel).

256 Se da una circunferencia, un diámetro OCE y la tangente OB en O, se proyecta un punto A de la curva en D; sobre OB se toma DB=OD. Obtener el lugar (M) de la intersección de las rectas OA, BE. Determinar los puntos de intersección de las tangentes comunes al círculo y á la curva (M).

(H. Brocard).

Zaragoza: Imprenta de la Sra. Viuda de Ariño, Coso, 100