Año II Zaragoza 15 Marzo de 1892 Núm. 15

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOBRE LA DESCOMPOSICIÓN DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS sn u, cn u, dn u EN SERIE DE FRACCIONES SIMPLES

POR F. GOMES TEIXEIRA

1. Se sabe que cuando se toma por punto de partida de la teoría de las funciones elípticas la integral

$$u = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

nos vemos conducidos á considerar una función, estudiada por vez primera por Weierstrass que la representó mediante la notación $p(u)$, la cual resulta de la inversión de la integral precedente.

La función $p(u)$ es susceptible de un desarrollo en serie de fracciones simples por medio de la fórmula

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_a \left[\frac{1}{(u-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right],$$

en la que a representa los valores que resultan de sustituir en la cantidad
$$2n\,\omega_1 + 2m\,\omega_2$$

$$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\ldots \qquad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\ldots$$

excluyendo la combinación $n=0$, $m=0$, y en la que $2\omega_1$ y $2\omega_2$ representan los períodos de la función $p(u)$.

Se sabe también que esta igualdad puede servir de base á una teoría de las funciones elípticas. En un artículo nuestro, publicado en el *Bulletin des Sciences mathématiques,* hacemos ver como de esta fórmula se obtienen con facilidad las propiedades de la función $p(u)$.

Cuando se establece de este modo la teoría de las funciones elípticas, se hace necesario deducir de las propiedades de la función $p(u)$ las propiedades de las funciones sn u, cn u y dn u. Aquí vamos á considerar una de estas propiedades, que se refiere al desarrollo de estas funciones en serie de fracciones simples, para ofrecer un modo de obtenerla por el desarrollo anterior de $p(u)$ (*).

Partiremos de la fórmula

$$\mathrm{sn}\, u = \frac{1}{\sqrt{k}} \, \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}$$

Esta fórmula manifiesta, atendiendo á las propiedades de las funciones $\mathrm{H}(u)$ y $\Theta(u)$ de Jacobi, que la función sn u admite por polos los puntos
$$2n\mathrm{K}+(2m+1)i\mathrm{K}',$$
representando n y m números enteros positivos, negativos ó nulos y K, K' las integrales

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

donde $k'^2=1-k^2$.

Estos polos son simples, y, como los períodos de la función sn u son $4\mathrm{K}$ y $2i\mathrm{K}'$, en los paralelogramos de los períodos contendrán los polos $i\mathrm{K}'$ é $2\mathrm{K}'+i\mathrm{K}'$.

Para hallar el residuo de sn u relativamente al primero de estos polos, puede recurrirse á un teorema muy conocido que da, representando este residuo por A_1,

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \, \frac{\mathrm{H}(i\mathrm{K}')}{\Theta(i\mathrm{K}')},$$

ó, atendiendo á las propiedades de las funciones de Jacobi,

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \, \frac{\Theta(0)}{\mathrm{H}(0)} = \frac{1}{k}.$$

Del mismo modo se halla, representando por A_2 el residuo de sn u relativamente al polo $2K+iK'$,

$$\mathrm{A}_2 = -\frac{1}{k}$$

(*) En los capítulos, que en el tomo III (actualmente en prensa) de nuestro *Curso de Analyse* dedicamos á la teoría de las funciones elípticas, seguimos el camino que acabamos de indicar para establecer la teoría de estas funciones.

2. Sentados estos principios generales, para hallar el desarrollo de sn u en serie de fracciones simples, aplíquese á la función sn u el teorema de descomposición de M. Hermite (*).

Tenemos, tomando como elemento simple la función $\zeta(u)$ de Weierstrass,

$$\operatorname{sn} u = A_1\,\zeta(u-iK')+A_2\,\zeta(u-2K-iK')+C,$$

y, derivando dos veces,

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} u}{du^2} = -A\,p'(u-iK')-A_2\,p'(u-2K-2iK')$$

puesto que

$$\frac{d\zeta(u)}{du} = -p(u).$$

Sustituyendo A_1 y A_2 por sus valores hallados anteriormente, tenemos

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} u}{du^2} = \frac{1}{k}\left[\,p'(u-2K-iK')-p'(u-iK')\,\right],$$

y, sustituyendo ahora las dos funciones

$$p'(u-iK') \quad \text{y} \quad p'(u-2K-iK')$$

por los desarrollos que se obtienen aplicando á estas funciones la fórmula siguiente que resulta de derivar dos veces la fórmula (1):

$$p'(u) = -\sum \frac{2}{(u-a)^3},$$

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} u}{du^2} = \frac{2}{k}\left[\sum \frac{1}{[\,u-2nK-(2m+1)iK'\,]^3} - \right.$$

$$\left. -\sum \frac{1}{[\,u-2(2n+1)K-(2m+1)iK'\,]^3}\right],$$

ó

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du^2} = \sum \frac{2(-1)^s}{k\,[\,u-2sK-(2m+1)\,iK'\,]^3},$$

donde el sumatorio Σ se refiere á todos los valores enteros de s y m.

Obtenido así el desarrollo de la derivada segunda de sn u pásase, para el desarrollo de la derivada primera, por una integración entre

(*) Hermite: *Cours de la Faculté des sciences de Paris*, p. 226.

los límites 0 y u, y para el desarrollo de sn u por una segunda integración entre los mismos límites. Tenemos así, haciendo

$$2sK+(2m+1)\,iK'=a\ ,$$

y notando que la derivada de sn u es igual á la unidad, cuando $u=o$, primeramente

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}=1-\frac{1}{k}\sum(-1)^s\left[\frac{1}{(u-a)^2}-\frac{1}{a^2}\right],$$

y después

$$\mathrm{sn}\,u=u+\frac{1}{k}\sum(-1)^s\left[\frac{1}{u-a}+\frac{1}{a}+\frac{u}{a^2}\right].$$

Y esta es la fórmula conocida, que pretendíamos demostrar, hallándose del mismo modo los desarrollos de cn u y dn u en serie de fracciones simples:

$$\mathrm{cn}\,u=1+\frac{1}{i}\sum(-1)^{m+1}\left[\frac{1}{u-a}+\frac{1}{a^2}+\frac{u}{a^2}\right],$$

$$\mathrm{dn}\,u=1+\frac{1}{ik^2}\sum(-1)^{m}\left[\frac{1}{u-a}+\frac{1}{a}+\frac{u}{a^2}\right],$$

SUR LA RECTIFICATION DES ARCS DES COURBES DITES LIMAÇONS DE PASCAL

PAR M. JOSEPH MARCHAND

ancien élève de l'Ecole Polytechnique

§ 1°. A côté des ovales de Cassini et de la lemniscate, rectifiables par les fonctions elliptiques on peut ranger les Limaçons de Pascal qui jouissent d'une propriété analogue. A ce titre cette classe de lignes, dejà remarquable à tant d'egards, mériterait de prendre place dans l'enseignement classique. Notre but ici serait de l'établir.

§ 2°. En coordonnées polaires les Limaçons de Pascal peuvent se ramener, on le sait, à l'équation simple:

(1) $$r=p+q\cos\omega$$

où p et q représentent des quantités positives.

Suivant que l'on a

$$p \gtreqless q$$

on obtient trois variétés distinctes: et nous rappelant la liaison des limaçons aux, coniques, chacune d'elles sera bien définie par les noms d'***elliptique, hyperbolique*** et ***parabolique.***

A la limite d'ailleurs si l'on fait:

$$p = o \text{ ou } q = o$$

l'équation (1) donnera évidemment des cercles.

§ 3°. Ces préliminaires posés, d'après la formule

$$ds = d\omega \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

il vient, par la substitution à r et à $\left(\frac{dr}{d\omega}\right)$ de leurs valeurs actuelles

$$ds = d\omega \, [p^2 + q^2 + 2pq \cos\omega]^{\frac{1}{2}};$$

et si nous posons $\omega = 2\varphi$, prenant φ pour nouvelle variable, et remarquant que

$$\cos\omega = 1 - 2\sin^2\varphi,$$

$$ds = 2d\varphi \, [(p+q)^2 - 4\,pq \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}};$$

d'où finalement

$$\frac{ds}{2(p+q)} = d\varphi \, [1 - k^2 \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$$

en représentant par k^2 la fraction $\frac{4pq}{(p+q)^2}$, dont la valeur est toujours inférieure à l'unité.

Prenons maintenant pour origine des arcs l'origine des coordonées où φ est nul en même temps que ω, on obtiendra la relation

$$\frac{\int_0^{\omega}}{2(p+q)} = \int_0^{\varphi} \left[1 - k^2 \sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

dans laquelle la quantité sous le signe $\int$ représente l'intégrale elliptique de 2ᵉ espèce de Legendre.

D'ailleurs k est la valeur de l'excentricité commune aux ellipses, ayant pour demi axes des quantités telles que

$$m(p+q) \quad m(p-q)$$

dans lesquelles, m prend une valeur positive arbitraire, donc:

l'arc de Limaçon a pour expression:

1°. Soit l'arc de l'ellipse ayant 2 (p+q), 2 (p−q) pour demi axes;

2°. Soit le double de l'arc d'ellipse ayant $(p+q)$ et $(p-q)$ pour demi axes;

et ainsi, en désignant toujours avec Legendre l'intégrale elliptique de deuxième espèce par le symbole $E(\varphi k)$, on écrira à volonté

$$\int_0^\omega [2(p+q)]\,E(\varphi k) \quad (3) \text{ ou } \int_0^\omega 2(p+q)\,E(\varphi k) \quad (4)$$

Remarquons maintenant, que si φ devient égal à $\frac{\pi}{2}$, ω prend π comme valeur correspondante: nous savons d'ailleurs que cette valeur $\frac{\pi}{2}$ de φ donne l'intégrale complète de 2e espèce de Legendre et par suite dans les formules précédentes un quadrant ou demi quadrant., suivant que l'on considère (3) on (4); d' autre part ω étant devenu égal à π, c'est le demi Limaçon qui sera simultanément décrit, donc si nous doublons en raison de la symétrie de forme et des limaçons et des ellipses, il viendra. dans (3) et (4)

$$\int_0^{2\pi} = 2\,[(p+q]\,E\left(\frac{\pi}{2}k\right) \quad (3') \quad \int_0^{2\pi} = 4\,(p+q)\,E\left(\frac{\pi}{2}k\right) \quad (4')$$

ainsi la longueur totale d'un limaçon est égale: soit au demi périmètre de l'ellipse figurant dans le deuxième membre de (3'), soit au périmètre entier de celle figurant dans (4'), à la quelle nous donnerons le nom d'isopérimétrique.

§ 4°. Legendre a donné pour $E(\varphi k)$ le développement en série suivant:

$$E(\varphi k) = \varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\int_0^\varphi \sin^4 d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}\int_0^\varphi \sin^6\varphi\, d\varphi..,$$

qui devient pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$E\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{3.4}\right)^2 3\,k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\,k^6 - .....\right]$$

par conséquent en remplaçant dans (4) et (4') les intégrales par leurs développements, on obtiendra

$$(5) \quad \int_0^\omega = 2\,(p+q)\left[\varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi - .....\right]$$

$$(5') \quad \int_0^{2\pi} = 2\pi\,(p+q)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)k^2 - .....\right]$$

k n'entre dans ces formules qu'à des puissances paires; or pour passer d'un limaçon elliptique à un limaçon hyperbolique, sans altérer la valeur de k, il suffit de changer p en q et q en p.

Donc, deux valeurs de p et q étant données, suivant la place qu'ils occupent dans (1), les paramètres définissent un couple et un seul que nous pouvons nommer conjugué de deux courbes, qui par cela même qu'elles ont mêmes paramètres, ont leurs arcs constamment égaux pour même valeur de la variable et conséquemment aussi sont isopérimétriques.

§ 5°. Supposons maintenant qu'ayant posé $p+q=\text{constante}=2C$ nous fassions varier dans la différence p — q., q, de o à 2C. D'après ce qui précéde, lorsque q variera de o à C, on obtiendra les limaçons elliptiques, de C à 2C les limaçons hyperboliques conjugués des premiers, enfin pour $q=C$, un limaçon parabolique, les ellipses isopérimétriques de ces limaçons auront leur grand axe constant; mais leur petit axe partant de la valeur 2C ira en diminuant au fur et à mesure que q augmentera de valeur, en sorte que leur périmètre confondu à l'origine, avec le cercle de rayon 2C, ira en diminuant d'une manière continue, pour se réduire comme valeur minima au double du grand axe. Les mêmes faits se reproduiront en sens inverse quand q continuera à croître de C à 2C.

§ 6°. L'unique limaçon parabolique contenu dans la famille définie par l'équation de condition

$$p+q=2C;$$

est caractérisé par ce périmètre minimum, et qui est ainsi égal à 8C.

D'ailleurs on doit alors écrire

$$k=1,$$

par conséquent la relation (5') devient

$$8C=4C\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2.3-\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2.5-.....\right]$$

c. à. d. en supprimant 4C aux deux membres

$$(6)\ \frac{2}{\pi}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2.3-\left(\frac{1.5}{2.4.6}\right)^2.5-.....$$

or la somme de la série du deuxième membre peut aisément être mise sous forme d'un produit de facteurs en nombre illimité; en effet, faisons les sommes successives des 2 3, ... etc. premiers termes il viendra

$$S_1 = 1,$$
$$S_3 = \frac{1^2}{2^2\,4^2}.3,$$
$$S_5 = \frac{1^2.3^2}{2^2\,4^2}.5,$$
$$S_7 = \frac{1.^2\,3.^2\,5^2}{2^2\,4.^2\,6^2}.7;$$

où la loi de formation se manisfeste bien nettement; et si cette loi se continue, ou pourra écrire généralement

$$(a) \quad S_{2n+1} = \frac{1.^2\,3.^2\,5.^2\,7.^2 \ldots\ldots (2n-1)^2}{2.^2\,4.^2 \ldots\ldots (2n)^2}(2n+1);$$

pour montrer qu' on en a le droit, il suffit d' établir qu' elle sera encore vraie en prenant un terme de plus. Or ce terme est

$$-\frac{1^2.\,3^2.\ldots\ldots(2n-1)^2.\quad(2n+1)}{2^2.\,4^2.\ldots\ldots(2n)^2\quad(2\,(n+1))^2}$$

et l' on pourra écrire

$$S_{2n+3} = S_{2n+1}\left[1 - \frac{1}{4\,(n+1)^2}\right] = S_{2n+1} \times \frac{(2n+1)\,(2n+3)}{\left(2\,(n+1)\right)^2}$$
$$= \frac{1^2.\,3^2.\ldots\ldots(2n+1)^2}{2^2.\,4^2.\ldots\ldots\left(2\,(n+1)\right)}(2n+3) \text{ c. q. f. d.}$$

l'égalité (6) devient ainsi

$$\frac{2}{\pi} = \text{Lim.}\,\frac{1^2.\,3^2.\ldots\ldots(2n-1)^2}{2^2.\,4^2.\ldots\ldots\;(2n)^2}(2n+1)$$

qui peut s' écrire aussi

$$\frac{2}{\pi} = \text{lim.}\,\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}\ldots\ldots\quad\frac{2n-1}{(2n)}.\frac{2n+1}{2n}\ldots\ldots$$

prenant maintenant les inverses des deux membres il viendra

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}\ldots\ldots\quad\frac{2n}{2n-1}.\frac{2n}{2n+1}\ldots\ldots$$

c'est la formule célèbre de *Wallis*.

On aurait pu donner à ce produit une autre forme. En effet, écrivons la suite des égalités qu' on peut tirer de (a) sous ces nouveaux sym boles,

$$S_3 = \left[1 - \frac{1}{2^2}\right]$$

$$S_5 = S_3\left[1 = \frac{1}{2^2.2^2}\right]$$

$$S_1 = S_7\left[1 - \frac{1}{2^2.3^2}\right]$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots$$

$$S_{n+1} = S_{n-1}\left[1 - \frac{1}{2^2.n^2}\right],$$

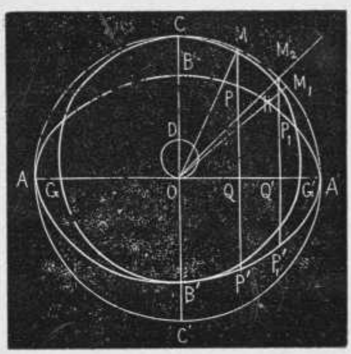
et si nous les multiplions membre à membre, on aura après avoir supprimé tous les facteurs communs:

$$S_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2^2.1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2.2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2.3^2}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{2^2.n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{2n}}\left(2^2 - \frac{1}{1^2}\right)\left(2^2 - \frac{1}{2^2}\right)\left(2^2 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\ldots\left(2^2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

et par suite on pourra écrire finalement

$$\pi = \text{Lim.}\frac{2^{2n+1}}{\left(2^2 - \frac{1}{1^2}\right)\left(2^2 - \frac{1}{2^2}\right)\left(2^2 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\ldots\left(2^2 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

§ 7°. Nous donnerons pour finir cette note le moyen graphique de déterminer sur une figure tracée les extrémités des arcs correspondants sur l'ellipse et les 2 limaçons isopérimétriques. L' exemple choisi dans la figure ci contre est un limaçon elliptique ayant pour paramètres $p = CD$, $q = DO$: Sur $AO = p + q$ et $OB = p - q$ comme axes nous avons décrit l'ellipse AB A'B' isopérimétrique. Enfin nous avons décrit le cercle OAM, la droite OBCX représente l'axe polaire, et nous supposons que les angles varient dans le sens CA'. Ceci posé traçons un rayon vecteur quelconque, avec un angle $\varphi = COM$: Si du point M nous abaissons une perpendiculaire sur AA' le point P où elle coupe



l'ellipse, déterminera d'après une construction bien connue, l'extrémité de l'arc BP, déterminé par cette valeur de φ; d'ailleurs son symétrique P′ déterminera un arc B′P′ égal à BP. En sorte que si nous doublons φ, comme $\omega = 2\varphi$, le rayon vecteur correspondant du limaçon passera en un point R de cette courbe, tel qu'on pourra constamment écrire

$$\text{arc limaçon } CR = (\text{arc } BP + \text{arc } B'P') \text{ ou } 2 \text{ arc } BP.$$

Il est facile de suivre sur les 2 courbes les mouvements corrélatifs de 2 mobiles dont les trajectoires satisferont constamment à l'égalité ci-dessus; on voit ainsi en particulier que tandis que le mobile de l'ellipse parcourt BPA′B′, celui du limaçon dècrit le limaçon entier.

Remarques-Lorsque l'arc GRG′ est décrit, $\omega = \frac{\pi}{4}$ et conséquemment $\varphi = \frac{\pi}{4}$; donc

$$\text{arc } GRG' = \text{arc } BP_1 + \text{arc } B'P'_1.$$

et par suite

$$\text{arc } G'B' = \text{arc } P_1A'P'_1$$

Si en particulier le limaçon considéré est parabolique, comme l'ellipse isopérimétrique se réduit au double de son grand axe, et que la construction s'applique encore dans ce cas limite on voit que

$$\text{arc } CRG' = 2OQ_1 = 2p \cos 45 = 2p\sqrt{2}.$$

et

$$\text{arc } G'B' = 2p\,(2 - \sqrt{2})$$

Remarquons enfin que si deux limaçons, elliptique et hyperbolique ont été déduits l'un de l'autre par échange de paramètres, le même rayon vecteur détermine constamment sur chacun d'eux l'extrémité d'arcs égaux. Beaucoup de points intéressants pourraient encore être relevés; mais le lecteur suppléera aisément à notre silence.

TEOREMAS, PROBLEMAS
Y
MÉTODOS GEOMÉTRICOS

I

INTRODUCCIÓN

En la Geometría hay que distinguir desde luego dos cosas: el objeto y el sujeto.

El objeto existe necesariamente en un fondo ilimitado y continuo que es el espacio. Todos los puntos que la Geometría estudia, ya aisladamente, ya en sistemas que constituyen las líneas, las superficies, ó, en general, las *formas geométricas*, existen independientemente de la inteligencia que de ellas ha de tener conocimiento; y las leyes á que se hallan sujetas y que constituyen su esencia, son necesarias é é inmutables.

Pero estas figuras y sus condiciones de existencia quedarían perdidas en el fondo del espacio como en una especie de caos, si el sujeto, ó la inteligencia humana no las hiciese brotar del mismo, dándoles la determinación que les corresponde según su naturaleza individual.

De esta acción del sujeto sobre el objeto surge el organismo de la ciencia geométrica, organismo invariable en cuanto á la materia ú objeto, pero susceptible de infinidad de formas. Estas formas del organismo sufren una alteración ó perfeccionamiento sucesivo, por efecto del mayor conocimiento del objeto que resulta de facilidades cada vez mayores en el sujeto para generalizar los resultados obtenidos en épocas anteriores, para incluir unas leyes en otras superiores, para establecer coordinaciones y subordinaciones dentro del plan general ó del sistema.

Pero la marcha seguida por nuestra actividad intelectual en la constitución de la ciencia, obedece á una ley necesaria. La de proceder del individuo al género. Del estudio de aquéllos al de sus relaciones y dependencias. Lo primero es la determinación individual del objeto geométrico, después sigue la de las correlaciones de unos individuos, ó agrupaciones de los mismos.

Tomando cómo tipo los elementos de Euclides, vemos cómo en orden serial ó sucesivo se va construyendo el objeto geométrico, desde el triángulo que es la figura elemental.

El triángulo equilátero, figura la más fácilmente determinable, es en rigor el primer eslabón de la cadena, y después de establecer la determinación del triángulo por tres elementos, á saber, un ángulo y los lados que lo forman, sigue la operación constructiva por el triángulo isósceles, que permite el ir sucesivamente construyendo la bisectriz de un ángulo, la perpendicular á una recta, etc., é ir al mismo tiempo fijando las propiedades de las figuras, como por ejemplo, que un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los internos no adyacentes, que cuando hay igualdad entre aquél y el alterno interno, no hay triángulo, pues las rectas son paralelas, etc.

Pasemos por alto las particularidades que puedan observarse en cualquier tratado, sea el de Euclides, el de Legendre ú otro, pues nos basta saber para nuestro propósito que en estas obras resultan determinadas las figuras geométricas hasta los poliedros regulares y los tres cuerpos redondos y hasta obtenida la expresión de su medida, y ascendamos á otro grado superior de este estudio, cuyo primer desarrollo aparece para nosotros en los lemas de Pappus y en los porismas de Euclides, y cuyo perfeccionamiento ó sistematización vemos en la Geometría superior de Chasles, por no citar otros desarrollos parciales de este orden de conceptos geométricos que la historia nos revela, bastándonos citar las obras de Pascal, Brianchon y Poncelet, para no alejarnos por ahora de nuestro objeto actual.

Ya en esta nueva etapa el sistema predomina sobre el individuo. Las series y los haces homográficos nos manifiestan correlaciones de puntos con puntos y de rectas con rectas, así como las figuras homográficas y homológicas, el polo y la polar, las figuras polares recíprocas, ó en general, las correlativas nos indican correspondencias entre rectas y puntos. Las figuras homotéticas y las inversas nos manifiestan otras diversas, etc., y estas relaciones pueden multiplicarse indefinidamente á medida que la inteligencia prosigue su acción combinatoria, fijando otras nuevas relaciones que dilatan continuamente el horizonte científico.

Después de haber diseñado estas generalidades, vamos á fijarnos en el modo de ejercerse dicha acción de la inteligencia sobre el objeto.

Este hemos dicho existe en toda la plenitud de su esencia en el espacio como fondo indeterminado mientras sobre él no se ejerza la acción del sujeto, que sólo puede ejercerse de una manera gradual y sucesiva por efecto de la limitación de la inteligencia humana, que si la supusiésemos por un momento suficientemente apta y eficaz para envolver con una sola mirada la totalidad del objeto, vería á la par que todas las relaciones que constituyen la parte teórica de la ciencia, todos los problemas resueltos; vería no sólo las entidades dadas en cada uno simultáneamente con las buscadas en éstos, la hipótesis y la tesis de todos los teoremas, sino que además no se le ocultaría ese andamiaje de la geometría que constituyen las construcciones auxiliares, *los términos medios* que sirven para enlazar ambos extremos.

Desde esta hipótesis que nos ha conducido al caso de la inteligencia Suprema ó absoluta, descendamos á la realidad de la inteligencia humana, imperfecta, limitada en sus funciones y necesitada por lo tanto de un instrumento que supla su debilidad y le haga asequible el recorrer los dominios de la ciencia, y sujetar á su acción el encadenamiento de verdades que constituyen ésta.

Dicho instrumento es el método ó el *camino* que en cada caso le permite llegar desde su punto de partida hasta el fin que se propone.

Así como el espacio real está poblado de cuerpos que forman los sistemas estelares y planetarios cuyos elementos tienen entre sí relaciones fijadas en el vasto plan que rige el Universo, de manera que las combinaciones de masas y energías determinan la infinidad de acciones y reacciones, de movimientos, de conflictos y de armonías que constituyen tan vasto organismo, de modo que una ley suprema aplicada á dichos elementos primordiales han bastado para la determinación de la vida del mismo, en nuestra inteligencia se desenvuelve un organismo ideal. Los puntos de partida, los fundamentos sobre que ha de estribar todo el edificio son aquellas entidades simples, que formando los géneros supremos no tienen género superior á que referirse y que son indefinibles y sólo tienen su acceso á nosotros por efecto de una intuición inmediata, tales son el punto, la recta, el ángulo, y además aquellas relaciones elementalísimas que se escapan al raciocinio y que forman como parte de nuestra esencia intelectual y que se llaman axiomas.

A la manera que si al pretender ir más allá de la realidad del Universo en que vivimos, lo absoluto nos ofrece una solución de continuidad una barrera infranqueable, la falta de un camino que nos pueda dirigir por región inaccesible á nosotros, los axiomas y los conceptos primitivos ú objetos simples é indefinibles se nos ofrecen como lo excepcional en los umbrales de la ciencia; y si procedemos en orden regresivo, ó descendente desde aquellos límites hacia el interior, hacia la región en que puede desenvolverse nuestra actividad dentro de los dominios de nuestra realidad, entonces nuestra marcha es en extremo expedita y facil; ya nos es posible caminar en cualquiera dirección, porque la trama de las verdades es contínua y á nuestro albedrío podemos elegir direcciones que nos conduzcan, bien á un mismo resultado, bien á resultados indefinidamente variados y distintos.

Los diferentes tratados de Geometría que se han escrito, ya sean los Elementos de Euclides, ó los de Legendre, ó los que posteriormente se han publicado alterando más ó menos el encadenamiento científico, nos ofrecen un primer ejemplo de la diversidad de caminos que pueden seguirse para establecer el organismo de la ciencia geométrica, y eso que tales *elementos*, como su nombre indica, ofrecen el conjunto de las verdades más fundamentales de tan vastísima ciencia, pues en efecto, dichos elementos son los organismos en que se resume cuanto concierne á la determinación de las figuras más simples que pueden concebirse en el total conjunto de la ciencia, el ángulo, el triángulo, el cuadrilátero, el círculo, el plano, los ángulos diedros y poliedros, los poliedros y los cuerpos redondos. Hay en esta primera etapa de la ciencia un predominio de lo individual sobre lo sistemático, además los caracteres determinativos de cada individualidad son los más inmediatos ó simples.

El paralelismo, la perpendicularidad y el segmento circular son los solos medios de referir unos ángulos á otros iguales, ó mejor, de transportar un ángulo de una posición á otra. Los triángulos iguales llevan uniformemente á determinar también igualdad de ángulos y segmentos, facilitando el constituir el encadenamiento que conduce á la determinación de dichos elementos. La igualdad de razones ó de productos de segmentos determinan paralelismo ó antiparalelismo y recíprocamente. El teorema de Pitágoras es la base fundamental de relaciones de magnitud entre segmentos, y las líneas trigonométricas ligan entre sí los elementos distintos de un triángulo, lados y ángulos.

Pero sentados estos fundamentos de la ciencia, caben infinidad de combinaciones ulteriores por las que se determinan unas figuras mediante otras ó por las que unas propiedades surgen de otras, llegándose en suma á reducirse la ciencia á *la transformación de unas propiedades ó de unas figuras en otras.*

Los 220 porismas que restableció Chasles en su obra *Les trois livres de porismes d'Euclide,* los 38 lemas de Pappus, la multitud de obras que forman agrupaciones de teoremas y problemas, como por ejemplo, los de Ritt, Catalán, Desboves, Amiot, Petersen, Echegaray, las preciosas colecciones que constituyen *A sequel to Euclid* de Casey y *A treatise on the Geometry of the Circle,* publicado recientemente por Mr. William J. M. Celland, que á parte de cuestiones referentes á teorías geométricas modernas, ofrecen el rico filón de cuestiones que acrecientan y desenvuelven como organismo admirable la novísima Geometría, cuyos fundadores son MM. Lemoine y Brocard, todo esto con sólo presentar á nuestra imaginación una pequeña región del dominio de la Geometría, nos revela de un modo elocuentísimo la infinita variedad de modos de que dispone para determinar relaciones y transformar un corto número de entidades, ya sean puntos, rectas, ángulos, tangentes, triángulos, cuadriláteros, círculos, etc.

Tres cosas deberemos distinguir desde luego para que surja la luz de este caos de relaciones entre las entidades geométricas: la existencia de estas relaciones, su traducción en las relaciones de ideas, y los medios de pasar de unas relaciones á otras ó de unos conceptos á otros.

En el espacio existen en potencia ó virtualmente todas las relaciones geométricas que la inteligencia humana pueda concebir, y aún muchas más. Estas relaciones son inmutables, necesarias y conformes con la esencia de la extensión donde se hallan como en la cantera la estatua que ha de vaciar el cincel de un artista, y no de otra manera la inteligencia ha de diseñar las entidades que deben pasar de la potencialidad al acto, para constituir el organismo geométrico,

¿Cuál es la forma bajo la cual se han de manifestar estas realidades subjetivas correlativas é inseparables de realidades objetivas en el espacio? Esta forma es las de nuestros actos intelectuales cuyos enunciados ó traducción verbal conocemos con el nombre de teoremas, corolarios, porismas, lemas, etc. Y en este punto ya notamos un principio de variedad. Tal proposición, que en un plan expositivo es teorema, pasa á ser corolario ó lema en otro; tal proposición, que aparece unas veces como un problema, otras reviste la forma del teorema, notándose en esta disposición una influencia de la acción intelectual sobre el objeto que ésta modela según sus propósitos ó según la capacidad peculiar á cada individuo.

Chasles en la obra arriba citada y M. P. Bretón (de Champ) en sus

Recherches nouvelles sur les porismes d'Euclide hacen detallados análisis de estos varios géneros de proposiciones en sus trabajos encaminados á dilucidar el concepto de *porisma*, labor en que intervinieron muchos é ilustres geómetras, desde Pappus y Proclus en época remota hasta Girard, Fermat, Halley, Simson y Playfair, por los siglos XVII y XVIII y aún últimamente Wronski, Poncelet, etc.

En su obra *Les trois livres de porismes d'Euclide*, Chasles, además de ilustrar al lector sobre las varias acepciones en que se ha tomado la palabra *porisma*, trata de otras varias proposiciones como los *lugares*, el *teorema* y el *problema local*, el *corolario*, la *dada*, las *conocidas* que forman el asunto de obras debidas á Euclides, Apolonio y Hassan Ben Haithem.

Que si el *lugar*, difiere del *teorema local* y del *problema local*, aunque participa de uno y otro, como manifiesta Chasles; que si los *corolarios* son proposiciones que se concluyen inmediatamente, sea del enunciado de un teorema, sea de su demostración, sin ser su reproducción en otra forma; que si las *dadas*, especies de teoremas incompletos en los que faltaba determinación, en magnitud ó en posición de ciertas cosas anunciadas como consecuencia de la hipótesis, tenían como las anteriores proposiciones sus analogías con el porisma, proposición que varios geómetras, entre ellos Chasles, conceptúan como participando de los caracteres del teorema y del problema; que si estas mismas proposiciones, objeto de la obra citada de Chasles, suplían en la antigüedad el moderno análisis de Descartes, buscando el multiplicar las expresiones diferentes de cada lugar, es decir de cada curva, que les permitieran pasar de unas á otra [1], maneras entonces conocidas, ó inventadas por Euclides, para expresar por dos coordenadas ligadas entre sí por cierta relación, las descripciones diversas de los tres lugares, recta, punto y círculo, y para pasar de una de estas descripciones á otras [2].

Estas consideraciones críticas, como las muchas de análogo carácter y concernientes al mismo asunto, expuestas en la obra de M. Breton, manifiestan cuán señalada es la influencia subjetiva en el modo de ser de las proposiciones, en la forma de ofrecérsenos las verdades dentro del encadenamiento sistemático, contribuyendo esta causa de variación á dar al organismo científico cierta flexibilidad independiente del rigor lógico que aumenta el poder de atracción que la ciencia ejerce sobre nuestro espíritu.

---

(1) Les trois livores de Porismes d'Euclide, pág. 60.

(2) Aperçu historique, pág. 277.

Después de haber contemplado someramente el objeto en su estado de posibilidad, es decir, en el caso de poder tener una realidad conforme con su esencia en el momento que sobre él obra como causa creadora nuestra inteligencia (motor que de aquella potencialidad la conduce al acto, expresado bajo la sola forma positiva que le es adecuada en la ciencia, es decir, la *verdad,* ó relación de conveniencia ó conformidad), y de haber hecho indicaciones sobre las diveaidades en la forma que introduce nuestra actividad en la constitución del organismo científico, que si bien es inalterable en el fondo, admite variedades, motivadas por las condiciones personales del que lo construye, por la correlativa importancia y subordinación que pueden tener entre sí las verdades en el conjunto, corresponde tratar del modo de ejercerse esta acción del sugeto sobre el objeto, ya para allegar nuevas verdades ó relaciones que aumenten el contenido científico y hagan más espeso el tejido de las mismas, ya para coordinarlas y subordinarlas entre sí al formar el organismo de la ciencia; este modo de ejercicio es el método ó camino, según su etimología, que sigue la inteligencia en la invención ó en la exposición; este camino ó marcha que, según las dos direcciones opuestas de que es susceptible, se llama *análisis* ó *síntesis*, en la acepción más general, es decir, prescindiendo de ciertas condiciones que exigen la consideración, al lado de estos procesos generales de la inteligencia, de otros particulares que estriban en circunstancias especiales, motivadas y ocasionadas por el objeto ó por el sujeto.

El análisis y la síntesis que forman dos encadenamientos inversos de teoremas ó de problemas tan notablemente expuestos en la obra de Duhamel *Des métodes dans les sciences de raisonnement*, ese procedimiento de investigación que se remonta hasta la época de Platón, según el testimonio de Pappus, y se basa en suponer cierto lo que se trata de demostrar, ó hallado lo que se pretende obtener; es una forma general de actuar la inteligencia sobre el objeto, que por eso mismo lleva en sí una indeterminación absoluta. La inteligencia puede sustituir unos problemas ó teoremas á otros por encadenamientos variables cuyos extremos han de ser lo desconocido con algo conocido que comunique á lo primero su verdad ó realidad, mediante los eslabones intermedios. Nada afecta á lo esencial del procedimiento que el camino elegido sea más ó menos directo ó accidentado, que los rodeos para llegar al fin se haya multiplicado con exceso, esta circunstancia depende de la ilustración del que proceda, de sus condiciones intelectuales, de lo oportuno ó feliz de la elección del andamiaje que le ha de servir para construir y completar su edificación.

Así como en el mundo físico, y según la hipótesis á que se subordina hoy la explicación de los fenómenos materiales, el éter en todas direcciones trasmite las energías sometidas á una transformación perpetua á través de los sistemas de mundos; y filtrado, por los espacios que dejan entre sí los átomos materiales, es el intermediario siempre entre dos acciones que podemos concebir en dos momentos dados de ese flujo continuo de fenómemos, de igual manera en la trama infinita de relaciones geométricas pueden elegirse dos extremos que es necesario enlazar por el intermediario común, que aquí son las *construcciones auxiliares*. Desde una figura hemos de llegar hasta otra, y esto se realiza agregando á la primera otras figuras, todas las que sean necesarias para completar la red de relaciones de la que al fin sólo deben destacarse, como las líneas principales de un dibujo, aquéllas que constituyen los dos extremos del encadenamiento que han de servir para enunciar el teorema demostrado ó el problema resuelto, como el sorites en la lógica enlaza los extremos que han de constituir una proposición con el auxilio de una serie de medios destinados á desaparecer.

Los Elementos de Euclides son un modelo acabado de este encadenamiento de verdades que forma una síntesis ú organismo. Establecidos los axiomas y postulados necesarios para la edificación, comienza el encadenamiento por la figura más regular, el triángulo equilátero, encadenamiento en que, indistintamente, los teoremas y los problemas se suceden en esta obra de *determinación* geométrica, en la cual se emplea casi continuamente el método *ad absurdum*, que es propiamente, como dice Lacroix (1), un procedimiento analítico, «porque en él se supone que la proposición enunciada es cierta, y se buscan consecuencias tales que, siendo absurdas, hagan ver que la hipótesis considerada, lo es también», método introducido en los Elementos, según manifiesta Chasles (2), por Euclides.

Pero no basta considerar esta admirable síntesis realizada por Euclides de los conocimientos geométricos acumulados hasta aquella época, debemos considerar el análisis y la síntesis como complementándose en la evolución de la Geometría. El primero, instrumento de invención, tiene por resultado el acrecentamiento del número de verdades, como el segundo el formar agrupaciones y encadenamientos que incluyen en cada etapa los nuevos materiales aportados. Aquél procede con cierta irregularidad, señalando cada vez dos puntos extremos en el vasto substratum de la extensión que deben unirse por

(1) Essais sur l'Enseignement, pp. 210-211.
(2) Aperçu historique, p. 9.

la continuidad del razonamiento aplicado á los términos medios que proporcionan las construcciones auxiliares; y después de haber ofrecido su resultado bajo la forma de nuevos teoremas, la síntesis lo coloca en el orden que debe corresponderle en el organismo total, designándole su categoría propia entre las demás verdades, como lema, teorema, corolario, porisma, etc.

Además, la síntesis geométrica que constituye un tratado no puede admitir la totalidad de las proposiciones que resultan de la invención por el análisis. En el organismo de la ciencia engranan perfectamente entre sí los principios fundamentales de cada teoría con sus consecuencias inmediatas, mas no el infinito número de verdades complejas que se resuelven en aquellos elementos del organismo.

Cada teoría con el conjunto de sus teoremas es como un foco luminoso de verdades que irradian para multiplicarse indefinidamente en la combinación inagotable de aplicaciones á casos concretos. Esto explica en primer término la necesidad de los porismas en aquella época en que no se había llegado á la variedad de teorías que caracteriza la Geometría de la época presente. La obra de los porismas, como dice Pappus, «era una vasta colección de proposiciones de una concepción ingeniosa y de útil auxilio para la resolución de los problemas más difíciles», y como dice Chasles: «Los antiguos no tenían, como nosotros desde Descartes, términos de comparación entre los lugares á los que llegaban en sus investigaciones geométricas. Para nosotros basta expresar un lugar en coordenadas ordinarias para conocer su naturaleza: la discusión de su ecuación nos enseña inmediatamente las afecciones y circunstancias singulares de este lugar...». «Los antiguos no poseían tal procedimiento general y uniforme de investigación: no disponiendo de un término de comparación, debieron inventar medios auxiliares para llegar á reconocer las relaciones de un lugar que se ofrecía por primera vez con otros lugares ya conocidos. Estos medios no podían consistir más que en cambios de descripción, ó de coordenadas del lugar, para obtener algunas relaciones simples, y aun de identidad con modos de descripción de los lugares conocidos».

«Tal es el origen de sus porismas, que tenían por objeto sustituir á una expresión geométrica ó analítica de un lugar, otra expresión geométrica ó analítica del mismo lugar...» Así estos porismas suplían, entre los antiguos, á nuestro Análisis moderno, que ha llegado á reemplazarlos á pesar nuestro.

Establecidos los fundamentos de la ciencia en la obra de Euclides, es decir, los puntos fijos de referencia de otras verdades más complejas, y por consiguiente reducibles á aquéllos, la Geometría, al dilatar sus dominios, había de necesitar nuevos puntos de apoyo para, desde ellos, continuar sus progresos; y hemos visto que la obra de los porismas debió contribuir á este fin al mismo tiempo que llevaba consigo el germen de nuevos desenvolvimientos que se han verificado en los tiempos modernos; y en efecto, Chasles, al encontrar en los lemas de Pappus señales tan marcadas de las *relaciones anarmónica* y *armónica* de las *divisiones homográficas*, etc., expresa su opinión de que, si la obra de los porismas se hubiese conservado, desde hace largo tiempo se habría llegado á estos conceptos de la Geometría moderna, y aun declara explícitamente, que para llevar á cabo su obra de adivinación y restablecimiento de los mismos, le fué preciso antes dar el desarrollo conveniente á estas teorías en su *Tratado de Geometría superior*, que forman la base de la misma.

Habiendo llegado á estas alturas en nuestra excursión por el dominio de la Geometría, nos es forzoso antes de pasar adelante, señalar una distinción entre los métodos que esta ciencia ha empleado.

El análisis y la síntesis, procedimientos los más generales del espíritu en la investigación científica, constituyen el método universal que domina el conjunto de la ciencia humana, si bien al aplicarse á la Geometría, su acepción es otra de la acepción general, pero dejando huella de su origen.

Después del análisis y la síntesis, que forman el método universal en sus dos fases ó direcciones opuestas, otros métodos conocemos en Geometría á que debemos dar la denominación de generales, tales son: el método *cartesiano*, el método *trigonométrico*, el de las *equipolencias*, el de los *cuaternios*, etc.

Estos métodos tienen un carácter formal, que se refieren á modos de actuar la inteligencia en general, prescindiendo de las particularidades del objeto, pues son aplicables á la variedad de objetos de una manera uniforme.

La Geometría analítica de Descartes refiere á un sistema fijo de líneas, coordenadas, los sistemas de puntos que entran en la definición de cada entidad geométrica; es un instrumento universal que se adapta á todas las concepciones geométricas. Sometidas las entidades geométricas al cálculo, éste realiza transformaciones en cierto modo misteriosas en las que desaparece á nuestra intuición el objeto, y presenta sus maravillosos resultados á nuestro espíritu. Al despreciar los enlaces ó las proposiciones intermedias, nos deja en la ignorancia del modo por el que se ha realizado el acceso desde el punto de partida hasta el resultado; se sabe que una cosa es cierta porque el razonamiento ha sido riguroso; pero ignorándose el cómo y por qué lo es. Algo análogo puede afirmarse respecto á los métodos de las equipolencias y de los cuaternos, cálculos de los hechos geométricos en el plano y en el espacio respectivamente, como manifiesta M. Laisant [1]. El primero, método uniforme por el que, basándose en unas cuantas reglas generales, se hace una extensión de relaciones de puntos en línea recta á otras de puntos en el plano; el segundo que, con sus vectores, traslaciones y rotaciones forma la base de un nuevo sistema de Geometría analítica, y ambos, ocultando bajo un simbolismo sistemático la prodigiosa eficacia que poseen para llegar á demostrar teoremas y resolver los más variados problemas. En fin, el método trigonométrico, que tiende su red indefinida de triángulos entre los puntos que resultan determinados, mediante su enlace más ó menos mediato, con los tres vértices del primer triángulo de aquélla.

Después de estos métodos generales que indirectamente llevan á la verdad ocultando las relaciones de los objetos bajo el simbolismo formal que los constituye, llegamos á los métodos de la Geometría pura, á aquéllos por los que la inteligencia procede directamente sobre el objeto y en los que la intuición acompaña á las varias transformaciones que conducen al resultado final. Estos métodos de transformación de las figuras tienen su origen en las obras de Pascal y Desargues, y se han ido continuando por La Hire y Le Poivre, hasta que en el siglo actual la nueva evolución realizada por la escuela de Monge ha dado á los métodos puramente geométricos el impulso que llevó hasta el sistema gráfico de Staudt, y que hoy continúa su incesante progreso, espresado en la infinidad de métodos de transformaciones que han convertido á la Geometría con un dominio ilimitado de formas que se derivan unas de otras por procedimientos cada vez más diversos.

Pascal con su célebre teorema sobre el *hexagrammun mysticum* estableció la base de un tratado completo de cónicas, siendo el fundamento de su obra *Essai pour les coniques*, como dice Leibnitz, el empleo de la perspectiva para engendrar las cónicas por el círculo «después de haber explicado la generación del cono, hecha ópticamente por la proyección de un círculo, sobre un plano que corta el cono de los rayos, explica las notables propiedades de cierta figura compuesta de seis rectas, que llama exágrama místico» [2].

---

(1) Introduction à la méthode des quaternions.

(2) Como un ejemplo de la fecundidad del teorema de Pascal podemos citar la memoria del Sr. Veronese *Nuovi teoremi sull'exagrammum mysticum* (Roma 1877), donde el autor expone sus resultados partiendo de los obtenidos ya por los geómetras Steiner, Plücker, Cayley, Salmon y Kirkman.

Desargues, cuyo método, como el de Pascal, se fundaba en la perspectiva, enriqueció la Geometría con su teorema fundamental referente á la *involución de seis puntos*, generalización de la proposición 130 de Pappus en la que á las dos diagonales del cuadrilátero se sustituye una cónica que pasa por los cuatro vértices de éste, «teorema *central*, como dice Chasles, en la teoría de las cónicas, porque de él se derivan, naturalmente, infinidad de propiedades diversas de estas curvas como de un centro único;» y tambien se le debe la notable propiedad de los triángulos: *si dos triángulos situados en el espacio ó en un plano, tienen sus vértices situados dos á dos en tres rectas concurrentes en un punto, sus lados se encuentran dos á dos en tres puntos situados en línea recta*, teorema á que dió más tarde Poncelet una gran generalización en su teoría de las *figuras homológicas*.

En el tratado de las cónicas de La Hire se halla la teoría de los polos, demostrándose sintéticamente los teoremas siguientes:

1.º «Si alrededor de un punto fijo se hace girar una transversal qne corta á una cónica en dos puntos, las tangentes en estos puntos se encuentran en una recta», y recíprocamente «si desde cada punto de una recta se trazan dos tangentes á una cónica, la recta que una los dos puntos de contacto, pasará por un punto fijo».

2.º «Si por un punto fijo se trazan varias transversales que encuentran á una cónica, las rectas que unan dos á dos los puntos de dos cualesquiera de las transversales se encontrarán sobre la *polar* del punto fijo.»

3.º El punto en que cada transversal encuentra á la polar del punto fijo, es el conjugado armónico de este punto fijo con relación á los dos puntos en que la transversal encuentra á la curva», proposición esta última conocida ya por Apolonio [1], así como la primera y su recíproca fueron demostradas más tarde por Monge de una manera intuitiva y elegante y extendidas á las superficies de segundo grado.

Además de esta importante teoría debe citarse el método de *transformación de las figuras en otras figuras del mismo género*, expuesto en la obra titulada *Planiconiques*, de la cual nos ofrece algunas noticias y desarrollos Chasles en su *Aperçu historique*, método que tiene por base la consideración en un plano de dos rectas paralelas, la *formatriz* y la *directriz* y un punto llamado *polo*. «Por cada punto M de una curva dada en un plano se traza, en una dirección arbitraria, una transversal que encuentra á la directriz en un punto, el cual se une

(1) Aperçu historique p. 124.

al polo por una recta, y á la formatriz en un segundo punto, por el cual se traza una paralela á esta recta. Dicha paralela encuentra á la recta que une el punto M con el polo en un punto M' que se dice *formado* por el punto M».

Al lado de este descubrimiento de La Hire hay que citar el de Le Poivre, que inventó de nuevo el método del primero, teniendo uno y otro métodos de generación de las cónicas por medio del círculo por propiedad característica que: á cada punto y á cada recta considerados como pertenecientes al círculo generador, corresponden un punto y una recta pertenecientes á la cónica, siendo la relación de posición de las dos figuras tal, que dos puntos *correspondientes* se hallan en línea recta con un punto fijo S y dos rectas *correspondientes* concurren en un eje fijo, pudiéndose reconocer en estas relaciones las propiedades de las figuras *homológicas*, expuestas más tarde por Poncelet en su *Traité del Propriétés projectives des figures*, siendo el *polo* y la *formatriz* respectivamente el *centro* y el *eje de homología*.

En fin, Newton, cuya inteligencia superior penetró todas las más capitales cuestiones que la ciencia ofrecía en su época, tambien imaginó un medio general de transformación de figuras en las que á puntos corresponden puntos y á rectas, rectas; dando una construcción geométrica y una expresión analítica, sencillas una y otra, pero como dice Chasles en su obra, ya varias veces citada, sin dar á conocer el camino que le había conducido á este modo de transformación.

Este notable período de transición entre la geometría antigua y la geometría sintética moderna, que ofrece el germen de las doctrinas que adquieren un considerable desarrollo á partir del descubrimiento de la Geometría descriptiva por Monge, se cierra con los resultados debidos á dos geómetras tan notables como Simson y Stewart.

El primero además de emplear preferentemente sus esfuerzos de restituir la obra perdida de los porismas de Euclides, escribió sus *Sectionum Conicarum*, obra que contiene, además del teorema *ad quator lineas* de Pappus, los de Pascal y Desargues, haciendo ver que toda la teoría de los polos se deduce de uno de éstos.

Y no sería justo terminar este período de la historia de la Geometría sin citar las obras notabilísimas de Stewart tituladas: *Propositione geometreæ, more Veterum demonstratæ ad Geometriam antiquam illustrandam*, etc. y *Some General Theorems*, hallándose en ésta sus célebres teoremas (1) que expresan propiedades generales de cuatro

(1) Recientemente (1891) ha publicado M. C. Thiry una obra titulada *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre*.

«Varios geómetras, como son R. Simson, Thomas Simpson, Euler y John Leslie, dice el au-puntos, de los que tres están en línea recta formada por la relación

$$\overline{DA}^2 . BC + \overline{DB}^2 . AC - \overline{DC}^2 . AB = AB . AC . BC \text{ (1)}.$$

Chasles, en su *Aperçu historique*, observa que los cincuenta teoremas de Stewart pueden reducirse á cuatro, cuyos enunciados da, refiriéndose los dos primeros de éstos á los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos en el círculo, que considera como casos particulares de teoremas comprendidos en la teoría de las cónicas.

En cuanto á las *Propositiones geometricæ*, las referentes á la única recta se refieren casi todas á una propiedad general del cuadrilátero, que se reduce al lema demostrado por Pappus, que enuncia así: *Toda transversal encuentra los cuatro lados de un cuadrilátero y las dos diagonales de un cuadrilátero, en seis puntos que tienen entre sí la relación de involución*, menciona las que se refieren al teorema que Pappus cita como formando parte de los porismas, á saber: *Cuando los tres lados de un triángulo, de forma variable, giran alrededor de tres polos fijos, situados en línea recta, y dos de los vértices del triángulo recorren dos rectas fijas dadas, el tercer vértice engendra una tercera recta que pasa por el punto de intersección de las dos primeras.* En cuanto á las proposiciones referentes al círculo, observa el autor de la Geometría superior que pueden considerarse como concernientes á la descripción de esta curva por la intersección de dos rectas que giran alrededor de dos polos fijos, formando sobre una transversal segmentos que tienen entre sí ciertas relaciones, siendo una relación de segundo grado en el caso de recorrer el punto de intersección de las dos rectas móviles una cónica.

Monge creando la Geometría descriptiva dió un nuevo y colosal impulso á los estudios geométricos inaugurando una nueva época para la ciencia de la extensión.

Z. G. DE GALDEANO.

(Se continuará).

---

tor en el Prefacio, han utilizado el teorema de Stewart en sus escritos matemáticos.—Esta proposición es, como se ve, de una gran importancia, y sin embargo, es desconocida por la mayor parte de los alumnos de instrucción media».

En 1837, Chasles escribía acerca de esta proposición: «*Esta propiedad casi desconocida en nuestra época, merecería tener cabida en los elementos, ó al menos en los complementos de Geometría*».

La obra de M. Thiry contiene numerosas aplicaciones á la Geometría del triángulo, como los puntos y el ángulo de Brocard, el teorema de Feuerbach, círculo de Lemoine, etc.

(1) Chasles deduce el teorema de Stewart de una relación de cinco puntos en línea recta.

SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE

PAR M. H. BROCARD

(Voir EL PROGRESO MATEMÁTICO, T. I, pp. 314-317, T. II, 25-27).

Les propriétés des fractions périodiques, signalées dernièrement dans les articles cités du Journal, nous ont paru motiver les remarques suivantes, qui cependant n'ont peut être pas le mérite de la nouveauté. Elles conduisent, toutefois, à une détermination des chiffres de la période, mais en partant des derniers chiffres, et non des premiers comme les donnerait l'opération directe de la division.

A ce titre, elles offrent le sujet d'une *Récréation arithmétique,* qui pourra intéresser nos lecteurs.

A notre connaissance, le seul exemple de question présentant une certaine analogie avec l'objet de cette notice, se trouve dans les N. A. M. où TERQUEM avait proposé, en 1846, d'effectuer une division, en opérant par la droite, mais en donnant au préalable le reste de l'opération faite suivant la regle classique (question 139).

L'intervalle de 26 années entre l'énoncé et la solution (J. DE VIRIEU. 1872. pp. 129-131) montre que ce problème parait avoir présenté quelque difficulté.

Nous en exposerons ici une solution, mais nous comptons lui donner quelque extension et l'appliquer à d'autres problèmes qui nous semblent n'avoir pas encore été l'objet d'une étude systématique.

Désignons par $(n)_a$ un nombre formé de n chiffres a.

D'après le théorème de J. PLATEAU *(loc. cit II. 26) tout nombre impair A non terminé par 5 a un nombre* $(n)_1$ *parmi ses multiples.*

Supposons le nombre A terminé par 1, 3, 7 ou 9.

Pour que son produit par un nombre quelconque B se termine par 9, il faut que le multiplicateur B se termine par 9.

Comme le dénominateur de la fraction génératrice de la période P est de la forme $(n)_9$, on se trouve amené à traiter la question suivante:

Déterminer les autres chiffres du multiplicateur B *de façon que tous les autres chiffres du produit* AB *soient également des chiffres 9.*

Pour obtenir ce résultat, observons d'abord que les dix premiers multiples du nombre A se terminent une fois par chacun des dix premiers chiffres. Si donc on a écrit le multiple terminé par 9, il suffira de prendre le multiple terminé par le chiffre, complémentaire à 9, de celui des dizaines du premier, et ainsi de suite, et d'écrire en regard le numero du multiple correspondant.

Pour fixer les idées, soit, par exemple, A = 17 (*Loc. cit.* I. p. 316).

Formons ses 9 premiers multiples:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	34	51	68	85	102	119	136	153

Le multiple terminé par 9 est 119, correspondant à 7. Aux dizaines, 1, il faut, pour avoir 9, ajouter 8; donc le multiple à prendre est 68, correspondant à 4. On a ainsi;

$$\begin{array}{r} 119 \\ 68 \\ \hline 799 \end{array}$$

Aux nouvelles dizaines, 1, 6, dont le total est 7, il faut, pour avoir 9, ajouter 2; c'est-à-dire le multiple 102, correspondant à 6; etc. etc, on aura, en définitive, la suite

119 correspondant à 7
68 4
102 6
119 7
17 1
17 1
68 4
153 9
34 2
85 5
51 3
34 2
136 8
136 8
85 5
0 0

L'opération s'arrête d'elle même et on reprendrait ensuite les nombres précédents. On en conclut la période

0588235294117647

dont les chiffres ont été, comme on le voit, obtenus dans l'ordre inverse de celui des opérations de la division de 1 par 17.

Il est à observer que, dans cet exemple, les sommes à compléter à 9 ont toujours été inférieures ou au plus égales à 9. Mais elles pourraient fort aussi bien lui être supérieures, et dans ce cas, on les additionnerait comme d'habitude pour augmenter seulement le chiffre des unités de façon à obtenir le chiffre 9.

Cette particularité se présentera d'autant mieux que le diviseur adopté sera plus grand.

En prenant, par exemple, le nombre $A = 47$, nous aurons

1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	94	141	188	235	282	329	376	423

puis les opérations suivantes:

329 7
47 1
(1) 282 6
141 3
423 9
3 76 8

Ici, l'addition des chiffres 4 et 7 donne 11; on reportera donc le chiffre (1) des dizaines. Pour ne pas l'oublier à l' opération suivante, il conviendra de l'inscrire, à son rang, au-dessus du chiffre correspondant. On aura donc

188 4

et on ajoutera 1, 3 et 8 ce qui donnera 12; on inscrira le chiffre (1) à part, au-dessus de celui des centaines de 188.

On aura donc, en définitive:

329 7
47 1
282 6
141 3
(1)423 9
(1)376 8
188 4
47 1
423 9
47 1
141 3
. . . .

de sorte que la période se terminera par

. . . . . 3 1 9 1 4 8 9 3 6 1 7 0

et la demi-période par

. . . . . 6 8 0 8 5 1 0 6 3 8 2 9

Les quotients correspondants sont, comme on le sait, complémentaires à 9, et les restes, complémentaires au dénominateur.

On aurait obtenu, tout aussi aisément, les divers chiffres du multiplicateur à prendre pour avoir un produit formé uniquement de chiffres 1, 2, 3 .... 8, et en opérant par exemple, sur les nombres $(n)_1$, on aurait immédiatement reconnu la nécessité de reporter les dizaines. C'est ainsi que la division de $(n)_1$ par 7 aurait donné

```
          (1)
    (1)(1)| 2 1 . . . . . . 3
       |  | 4 9 . . . . . . 7
   (1) |  5 6 . . . . . . . 8
     | 3 5  . . . . . . . . 5
     | 7  . . . . . . . . . 1
 2 1 0  . . . . . . . . . . 0 puis 3, etc.
```

et en effet 1 5 8 7 3 est le quotient de la période de $\frac{1}{7}$ par 9. (II. p. 25).

On aurait de même, pour le nombre $(n)_3$,

```
      (1)(1) 6 3 . . . . . . . 9
   (1) |  | 7 . . . . . . . . 1
     | |  4 2 . . . . . . . . 6
     | 4 9 . . . . . . . . . 7
     2 8  . . . . . . . . . . 4
     0  . . . . . . . . . . . 0
```

et en effet on a

$$47619 = 3 \times 15873$$

Observons, incidemment, que si le dénominateur A de la fraction se terminait par 1, ses divers multiples par 1, 2, 3, .. 9 se termineraient respectivement par les mêmes chiffres. Les chiffres de la période seraient donc ceux des unités des multiples successivement employés:

Exemple: A = 71.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	142	213	284	355	426	497	568	639

on aura, pour déterminer la période, à essayer la division de ..... 9999 par 71.

```
          (1) 6 3 9
            | 4 2 6
            | 7 1
          5 6 8
        1 4 2
    5 6 8 0
  2 1 3
  . . . . .
```

La période se termine donc par .... 38028169.

De même, la division de $(n)_7$ par 71 donnerait

```
            (1)
        (1)(1)| 4 9 7
      (1)  | 5 6 8
    (1)  | 4 2 6
  (1)  | 6 3 9
     | 6 3 9
  4 9 7
  7 1
3 5 5
```

c'est à dire .... 51799687, et comme vérification on doit avoir

$$\ldots 51799687 = \ldots . 38028169 \times \frac{7}{9}.$$

et en effet, on a bien

$$\ldots 51799687 \times 9 = \ldots .. 38028169 \times 7,$$

mais on remarquera que, dans le cas présent, le groupe .. 38028169 n'est pas divisible par 9. La vérification devra pourtant se faire, mais à la condition de déterminer les chiffres du quotient à partir de la droite, opération qui, après les explications données, ne présente plus de difficulté:

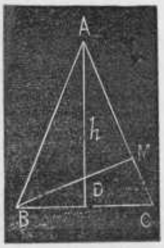
38028169	9
9	1
(1)36	4
18	2
36	4
(1)9	1
(1)9	1
27	3
81	9
....	

(La suite incessamment).

CUESTIONES RESUELTAS

Cuestión número 48. (Véase t. II pág. 64).

Demostrar que si un triángulo isósceles tiene el ángulo en el vértice de 45°, la base es media proporcional entre el cuádruplo de la altura y el exceso de la altura sobre la base.



Solución por D. Adolpho Guimaraes, oficial de ingenieros.

En la cuestión 47 (véase en la página 63) se demostró que

$$\overline{BM}^2 = \overline{CM}^2 + 2\,AM\,.\,CM \qquad (1)$$

Siendo el ángulo del vértice de 45°, tenemos:

$$AB = AC = \frac{2\,AD}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$AM = BM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2\,AD}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad CM = \frac{BC}{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Sustituyendo en la expresión (1), resulta

$$\frac{2\,\overline{AD}^2}{2+\sqrt{2}} = \frac{\overline{BC}^2}{4}(2-\sqrt{2}) + \frac{2\,AD.BC}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}},$$

y dividiendo ambos miembros por $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, se obtiene

$$4\,\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + 4\,AD\,.\,BC, \quad ó \quad \overline{BC}^2 = 4\,AD\,(AD - BC),$$

como se quería demostrar.

Solución por D. Alfredo Roca y Cancelo.

Representamos por a y h la base BC y la altura AD, y por b los lados AB = AC.

Del triángulo ABD resulta:

$$b^2 = h^2 - \frac{a^2}{4}, \ (1) \qquad 4b^2 = 4h^2 - a^2, \quad a^2 = 4b^2 - 4h^2.$$

Hay pues que demostrar la identidad

$$4b^2 - 4h^2 = 4h\,(h - a), \text{ ó sea, } b^2 = 2h^2 - ah.$$

Para ello observemos que de los triángulos ABD y BMC semejantes resulta:

$$\frac{MC}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{b} \quad MC = \frac{a^2}{2b}; \text{ luego } AM = b - \frac{a^2}{2b} = \frac{2b^2 - a^2}{2b}.$$

También resulta de dichos triángulos que

$$\frac{BM}{h} = \frac{AM}{h} = \frac{a}{b}, \quad ah = b.\,AM = b \times \frac{2b^2 - a^2}{2b} = \frac{2b^2 - a^2}{2}$$

Pero de la fórmula (1) resulta que $2h^2 = 2b^2 - \frac{a^2}{2}$;

luego $$2h^2 - ah = 2b^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{2b^2 - a^2}{2} = b^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

Solución por D. Ricardo C. ro, alumno de la Universidad de Zaragoza.

Construcción.—Tómese OH = BH = $^1/_2 a$.

Desde O como centro trácese una circunferencia tangente á la base. Unase O con B, y bájese la perpendicular OI á AB.

Siendo OH = HB, el triángulo OBH es isósceles; luego el ángulo OBH = 45°.

Por hipótesis tenemos A = 45°, luego $\angle$ ABC = $\angle$ ACB = $\frac{180^0 - 45^0}{2}$ = 67°.30′, y por tanto $\angle$ DBO = $\angle$ DBH — $\angle$ OBH = 67. 30′ — 45° = 22.° 30′ y además $\angle$ EAO = $\frac{45^0}{2}$ = 22.° 30′.

Resulta pues, $\angle$ DBO = $\angle$ EAO, es decir, que el triángulo ABO es isósceles; luego IA = IB. Además IE = ID. Restando miembro á miembro resulta IA — IE = IB — ID, ó sea EA = DB cuya igualdad hemos de emplear en la

Demostración.—Considerando la tangente BH y la secante BE, tenemos

$$\overline{BH}^2 = BD\,.\,BE = BD\,(BD + DE) = AE\,.\,AD, \qquad (1)$$

valiéndonos de la igualdad deducida en la construcción.

Considerando las secantes AD y AH, tenemos

$$AE\,.\,AD = AH\,.\,AF \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) deducimos

$$\overline{BH}^2 = AH\,.\,AF \qquad (3)$$

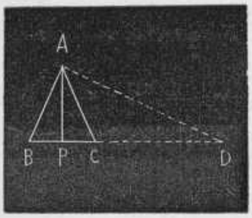
Pero $BH = \frac{a}{2}$, $AH = H$ y $AF = H - a$; luego sustituyendo en la igualdad (3) resulta

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h\,(h-a)$$

ó sea

$$\frac{a^2}{4} = h\,(h-a) \quad \text{ó} \quad a^2 = 4h\,(h-a).$$

Solución á la cuestión 48, remitida por el Sr. Durán y Loriga.



Sea el triángulo ABC. Llamemos l á la base y h á la altura. Se trata de demostrar la igualdad.

$$l^2 = 4h\,(h-l).$$

Tracemos la perpendicular AD á AB. Siendo semejantes los triángulos ABD y ABM, resulta que:

$$\frac{h}{AD} = \frac{\frac{l}{2}}{AB}, \quad \text{ó bien,} \quad \frac{h}{l} = \frac{AD}{2AB}.$$

Pero, por ser AC bisectriz del ángulo BAD, se tiene

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB}; \quad \text{luego} \quad \frac{h}{l} = \frac{CD}{2l} \quad \text{ó} \quad h = \frac{CD}{2} \qquad (1)$$

Se tiene además:

$$\overline{AB}^2 = BD\,.\,BM,\ BD = \overline{AB}^2 \frac{l}{2} = \frac{4h^2 + l^2}{2l}$$

$$\text{y} \quad CD = BD - BC = \frac{4h^2 + l^2}{2l} - l = \frac{4h^2 - l^2}{2l};$$

y sustituyendo en (1), resulta

$$h = \frac{4h^2 - l^2}{4l}, \quad \text{ó bien} \quad l^2 = 4h\,(h-l).$$

Aclaración al enunciado de la cuestión 46.

Téngase presente que el ángulo CPD del enunciado es el formado uniendo el pie de la perpendicular PQ con los puntos C, D en que las dos rectas trazadas desde un punto cualquiera M de dicha perpendicular á los extremos A y B del diámetro, cortan á la circunferencia.

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos